Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006810**

ID профиля: **380170**

Вариант 10

Новицкого Ильи

Чистовик

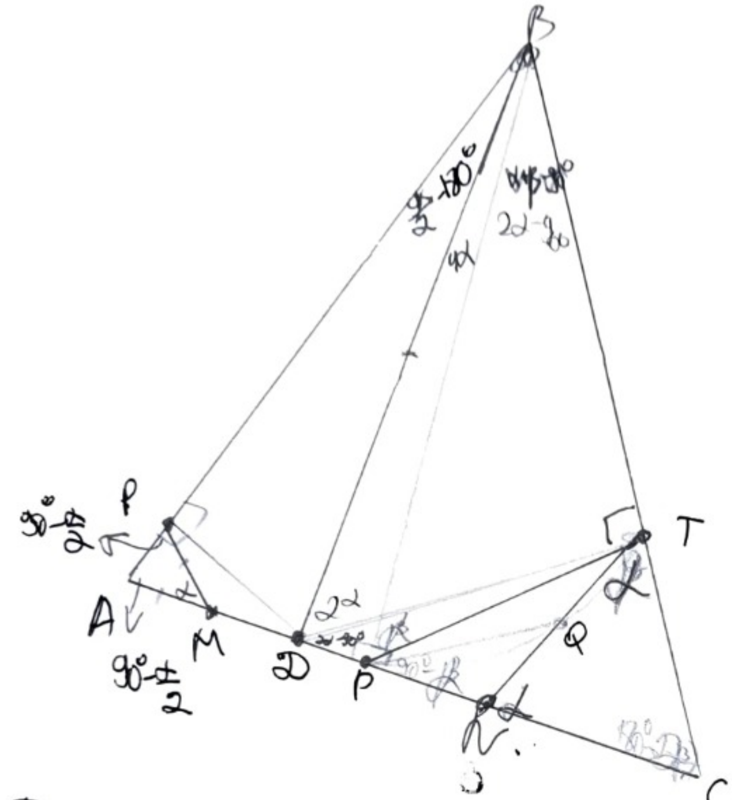
№ 1.

1

Дано:
BD – диаметр
M и N – середины
AD и DC.

Найти:
$\angle ABC$.

Решение:
] BD – не высо-
та, тогда
] $\angle TNC = \alpha$,
а $\angle NTC = \beta \Rightarrow$
$\angle ACB = 180° - \alpha - \beta$,
но $\angle BPD = 90°$, т.к.
опир. на гипот. BD



Тогда Σ углов △ BPC без ($\angle PBC$) $= 90° + 180° - \alpha - \beta$

$\Rightarrow \angle PBC = 180° - 90° - 180° + \alpha + \beta = \alpha + \beta - 90°$

~~PBTQ – вписанн.~~

Заметим, что △ DTC – прямоуг ($\angle DTB = 90°$)

$\Rightarrow NT = DN = NC. \Rightarrow \angle TNC = \angle NTC = \alpha$

$\angle TDC = 90° - 180° + 2\alpha = \underline{2\alpha - 90°}$, но

$\angle BAC = \dfrac{\smile PB - \smile PD}{2} = \angle BDP - \angle PBD = 4\alpha - 90° - x$

$90° - \dfrac{\alpha}{2} = 4\alpha - 90° - \angle PBD$

$\angle PBD = 4\alpha - 90° - 90° + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{9\alpha}{2} - 180°$

$\angle ABC = \dfrac{9\alpha}{2} - 180° + 4\alpha + 2\alpha - 90°$

$\sum$ углов △ABC $= \cancel{90°} - \cancel{\frac{\alpha}{2}} + \cancel{180°} - \cancel{2\alpha} + \cancel{\frac{9\alpha}{2}} - \cancel{180°} + 4\alpha + \cancel{2\alpha} - \cancel{90°} = 180°$

Чистовик

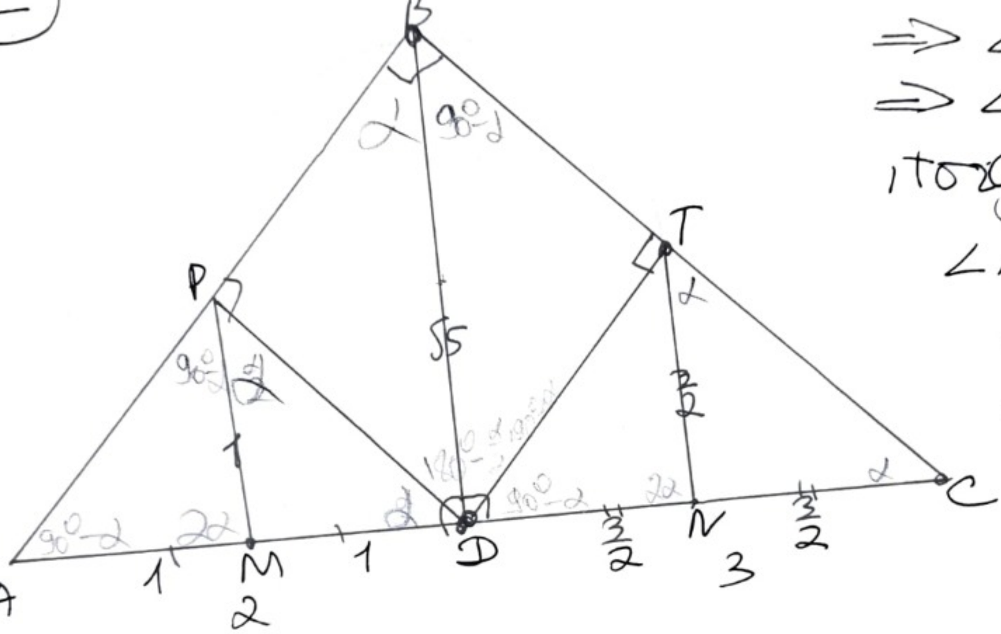
$\Sigma = 4\alpha + 4\alpha = 180^\circ.$

$8\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{4\cdot 2} = \frac{45^\circ}{2}$

$\angle NCT = 180^\circ - 2\cdot\frac{45^\circ}{2} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$

, но $\angle C < 90^\circ$, т.к ΔBPC – прямоуг. $\Rightarrow$ случай с BD – не высотой невозможен

(2)



Пусть $\angle C = \alpha \Rightarrow$
$\angle DNT = 2\alpha$
$\Rightarrow \angle AMP = 2\alpha$
$\Rightarrow \angle A = 90^\circ - \alpha$,
, тогда $\angle ADP = \alpha$.

$\angle A = 90^\circ - \alpha$
$\angle C = \alpha. \Rightarrow$
$\angle A + \angle C = 90^\circ$
$\Downarrow$
$\angle PBT = 90^\circ$

Ответ: $\angle PBT = 90^\circ$.

б) $MP = 1$; $NT = \frac{3}{2}$; $BD = \sqrt{5}$ $\quad S_{ABC}$ – ?

$MP = 1$, тогда $AM = 1$; $MD = 1$; $DN = \frac{3}{2}$;

$NC = \frac{3}{2}$, т.к PM – $\frac{1}{2}AD$, $NT = \frac{1}{2}DC$. , тогда.

$AD = 2$; $DC = 3$.

$S_{ABC} = S_{ADB} + S_{CDB} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{5} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 3$

$= \frac{\sqrt{5}}{1}^{\backslash 2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$

211006810 (U380170 M1276468)

Ответ: $S_{ABC} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

Чистовик

Задание ②

ОДЗ $x\in[-3;7]$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

3

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2\sqrt{21+4x-x^2}-4$

возводим в кв. ограничения сами наложи:

$10-2\sqrt{-x^2+4x+21}=100+16x-4x^2-16\sqrt{-x^2+4x+21}$

~~Након~~ $90+16x-4x^2=14\sqrt{-x^2+4x+21}$

возводим в кв. при усл. $\cancel{4x^2 \ldots}$ $90+16x-4x^2\geq 0$: =>

(!) / $90+16x-4x^2\geq 0$ /

=> $x\in\cancel{\left[\frac{4-\sqrt{106}}{2};\frac{4+\sqrt{106}}{2}\right]}$

Получаем:

$16x^4-128x^3-268x^2+2096x+3984=0$

$4(x+2)(x-6)(4x^2-16x-83)=0$

Решения:

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \text{ - не подход по ограничениям.} \\ x=6 \text{ - решение} \\ x=2-\frac{3\sqrt{11}}{2} \text{ - решение} \\ x=2+\frac{3\sqrt{11}}{2} \text{ - не подх по огр.} \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=2-\frac{3\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$

(!) $-4x^2+16x+90\geq 0$

$4x^2-16x-90\leq 0 \,|:2 \Rightarrow 2x^2-8x-45\leq 0$

$D=64-4\cdot 2(-45)=4\cdot 106$

$x_1=\frac{16+2\sqrt{106}}{2\cdot 4}=\frac{8+\sqrt{106}}{4}$

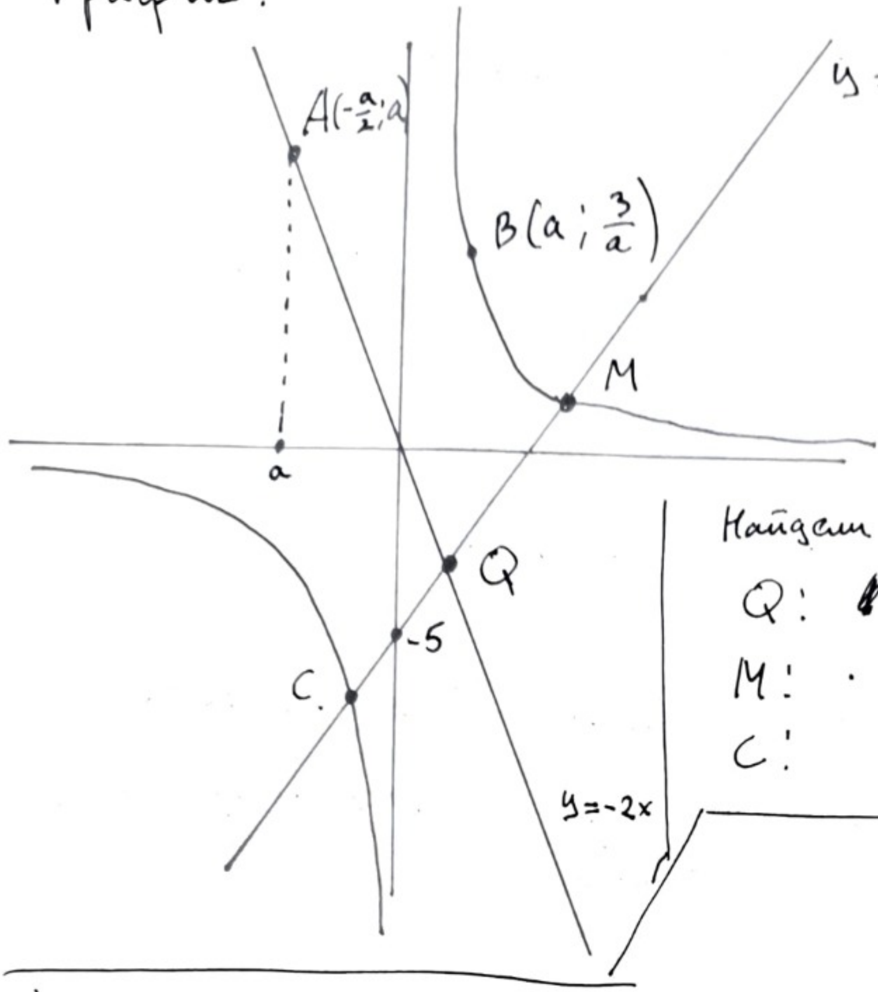
$x_2=\frac{16-2\sqrt{106}}{2\cdot 4}=\frac{8-\sqrt{106}}{4}$

$x\in\left[\frac{8-\sqrt{106}}{4};\frac{8+\sqrt{106}}{4}\right]$

Чистовик

5

График:



Найдем точки M; Q; C;

Q: $Q(1{,}25; -2{,}5)$

M: $M(3; 1)$

C: $C(-\frac{1}{2}; -6)$

1) При $a \in [3; +\infty)$ точка A лежит выше прямой $y = 2x - 5$ точка B лежит ниже прямой $y = 2x - 5$ или совпадает с ней. не подх

2) При $a \in (0; 3)$ точка A лежит выше прямой $y = 2x - 5$ Точка B лежит выше прямой $y = 2x - 5$; случай подходит.

3) При $a \in (-\frac{1}{2}; 0)$ точка A лежит ниже прямой $y = 2x - 5$ Точка B лежит выше прямой $y = 2x - 5$ не подх

4) При $a \in (-2{,}5; -\frac{1}{2})$ точка A лежит выше прямой $y = 2x - 5$, точка B лежит выше прямой $y = 2x - 5$ подходит.

5) При $a = -2{,}5$ точка B лежит на прямой - не подх.

6) При $a \in (-\infty; -2{,}5)$ точки лежат по раз. стороны не подх

Ответ: $a \in (0; 3) \cup (-2{,}5; -\frac{1}{2})$

211006810 (U380170 M1276468)

Черновик

$2\alpha-90^\circ$

$90^\circ-180^\circ+\alpha+\beta$

180°

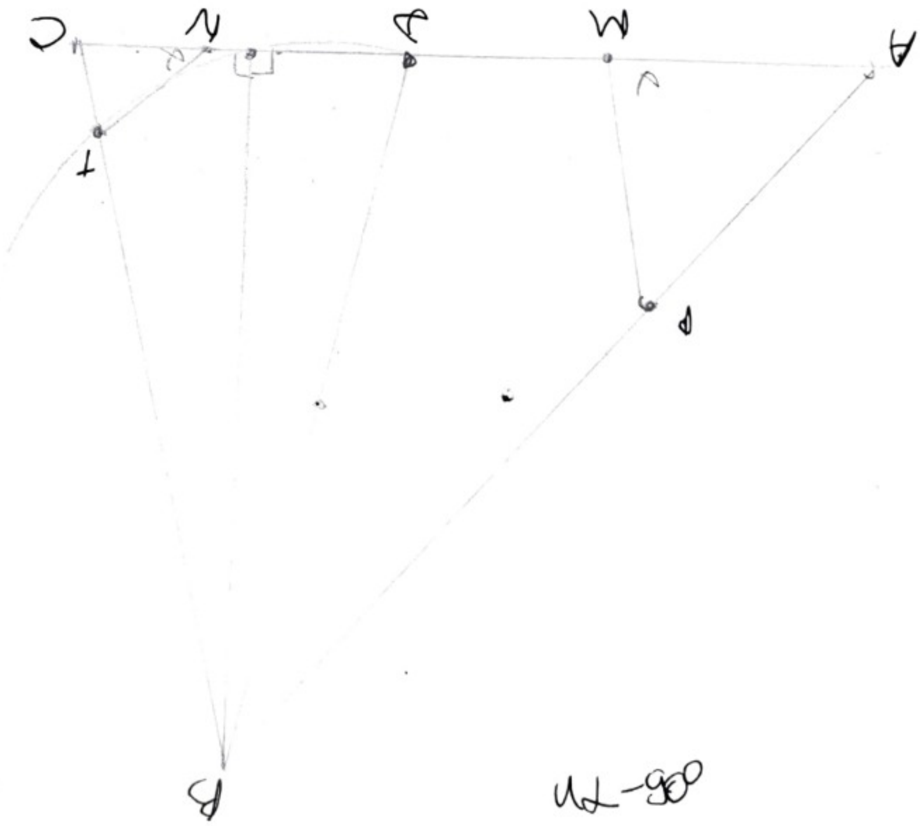
90

$180^\circ-\alpha-\beta+t.$

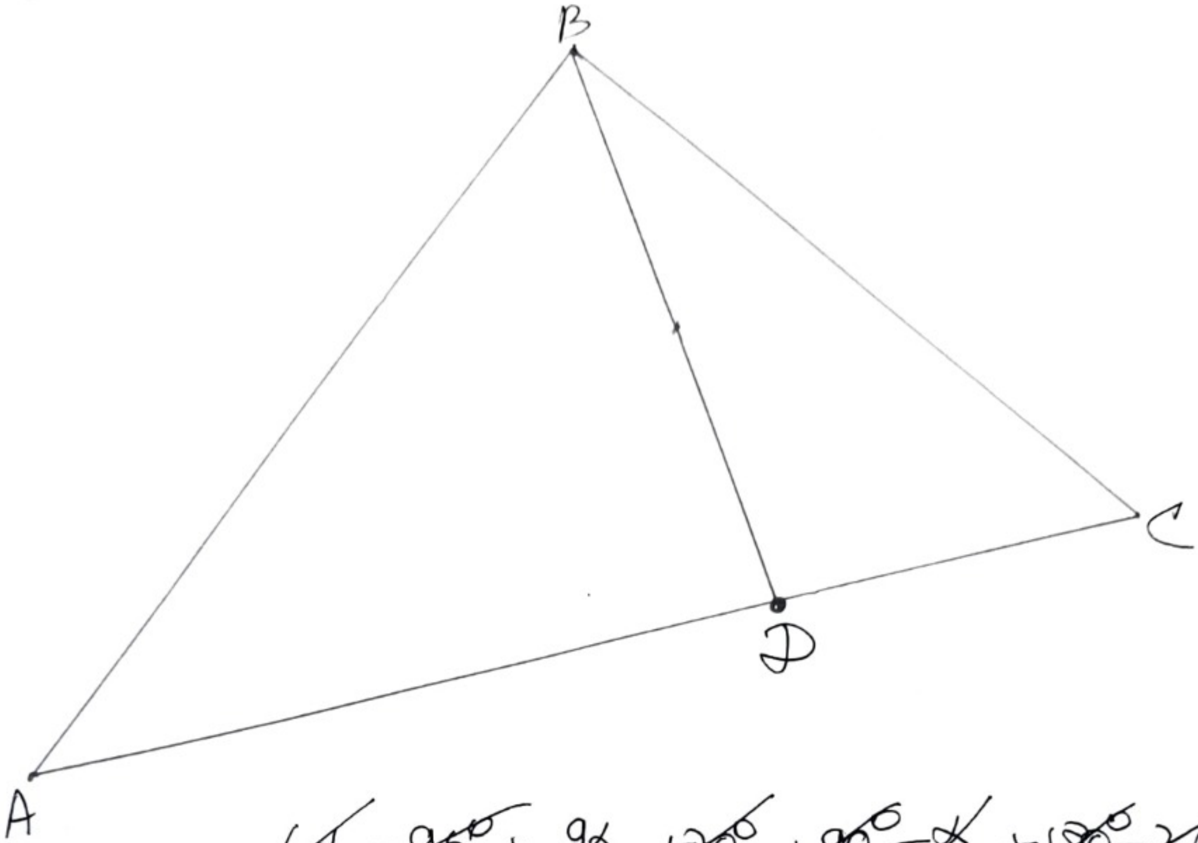
$\boxed{\alpha+\beta-t}.$

$\alpha+\beta-t-\alpha-\beta+90^\circ$

$4\alpha-90^\circ$



$4\alpha-90^\circ$



$$\cancel{6\alpha} - \cancel{90^\circ} + \frac{9\alpha}{2} - \cancel{180^\circ} \cancel{+90^\circ} - \cancel{\frac{\alpha}{2}} + \cancel{180^\circ} - \cancel{2}\alpha = 180$$

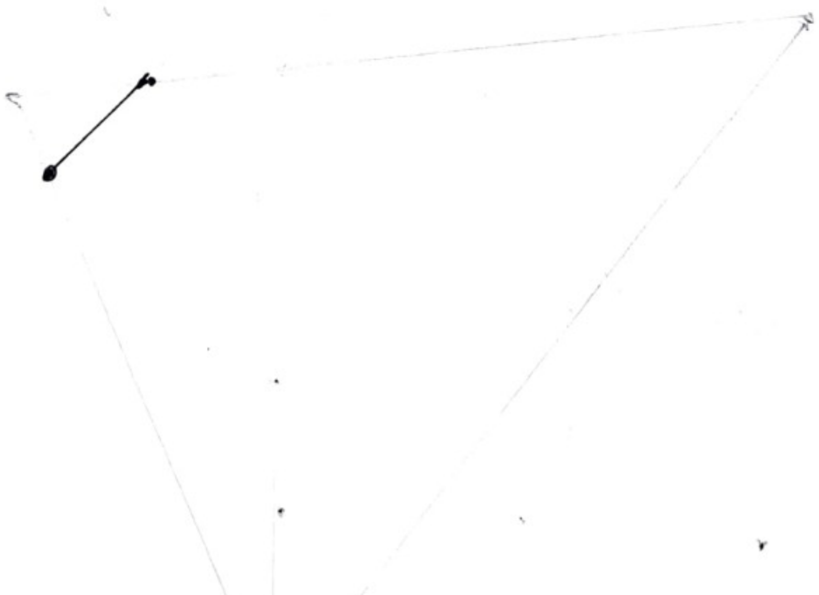
$$\frac{7}{2}\alpha + \frac{9\alpha}{2} = 180^\circ$$

$$\frac{16\alpha}{2} = 180^\circ$$

$$8\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{4 \cdot 2} =$$

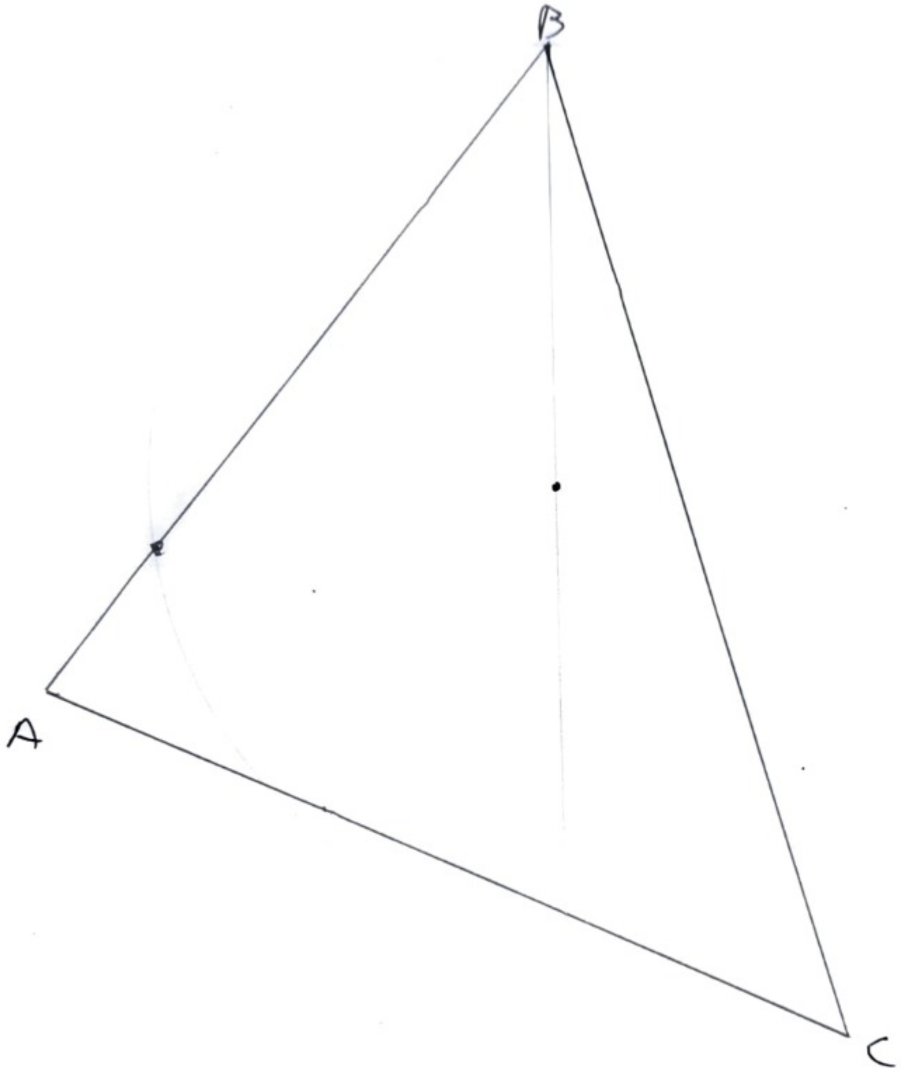
$$= \frac{45^\circ}{2}$$



64

Черновик.

$u\alpha^2$



Задача 3 Чистовик (Й)

Исследуем ур.(1) $5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2-(4a+4x)y+5a^2+12ax+8x^2=0$

$D=(4a+4x)^2-4(5a^2+12ax+8x^2)=-4(2x+a)^2$

$D\geq 0$; $-4(2x+a)^2\geq 0 \Rightarrow 2x=-a$ $\boxed{x=-\frac{a}{2}}$

С другой стороны ур (1):

$8x^2-(4y-12a)x-4ay+5a^2+y^2=0$

$D\geq 0 \Rightarrow \boxed{y=a}$

Получаем что ур (1) задает точку A с координатами

$x=-\frac{a}{2}$ $y=a$ | То есть она движется по прямой: точка A

$y=-2x$; $A(-\frac{a}{2};a)$

Исследуем ур (2) $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$ay=ax^2-2a^2x+a^3+3$

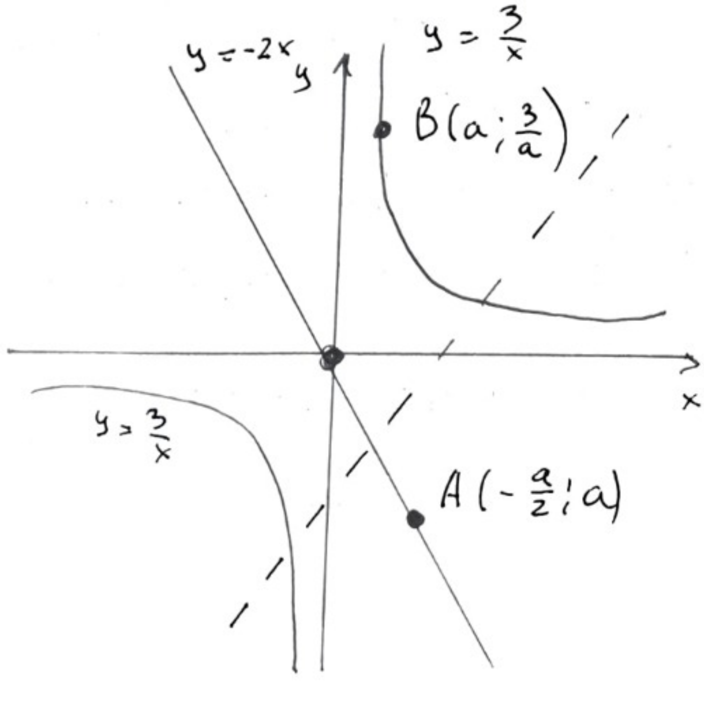
$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$, Точка B - вершина, найдем ее.

$x_{вер}=\frac{2a}{2}=a$

$y_{вер}=a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$

| Итого $B(a;\frac{3}{a})$ - значит точка B лежит на гиперболе $y=\frac{3}{x}$;

Прод. на перевороте.



211006810 (U380170 M1276468)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006810**

ID профиля: **380170**

Вариант 10

Чистовик.

№5

$$\sum_{y=x} = \frac{68\cdot(68^2-135)}{2} \quad \left(\tfrac{1}{2},\ \text{т.к}\right.$$

пару учли 2 раза).

Для $y=69-x$ аналогично:

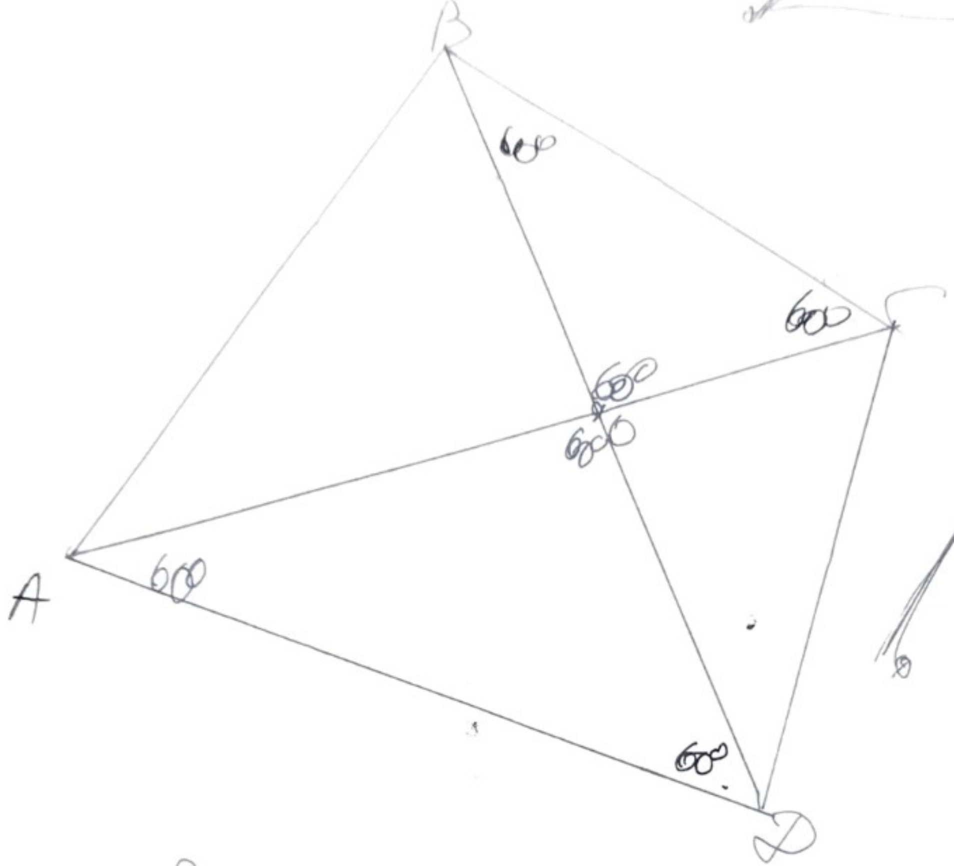
$$\sum_{y=69-x} = \frac{68\cdot(68^2-135)}{2}$$

$$\sum = 68(68^2-135) \text{ способов.}$$

Ответ: $68(68^2-135) = \underline{305252}$

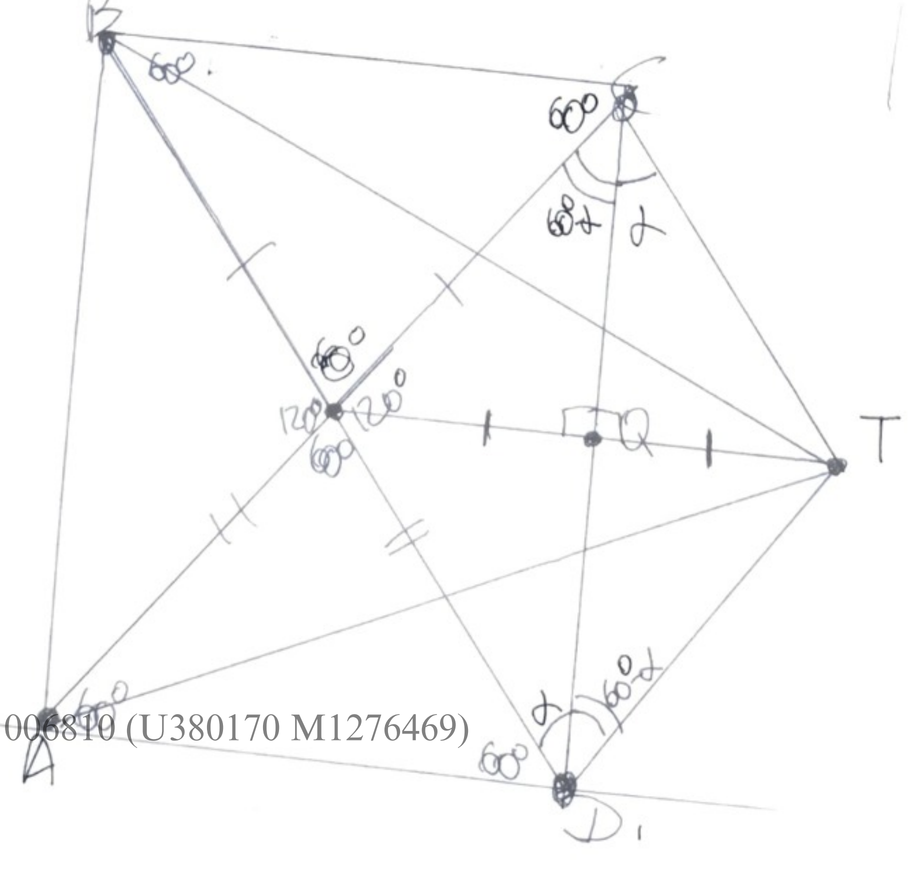
211006810 (U380170 M1276469)

№ 6.



Дано:
BOC – прав.
AOD – прав.

AB = CD
⇒ равнобок.
трапеция.



211006810 (U380170 M1276469)

$49+4+2\cdot 2\cdot 7\cdot \frac{1}{2}$

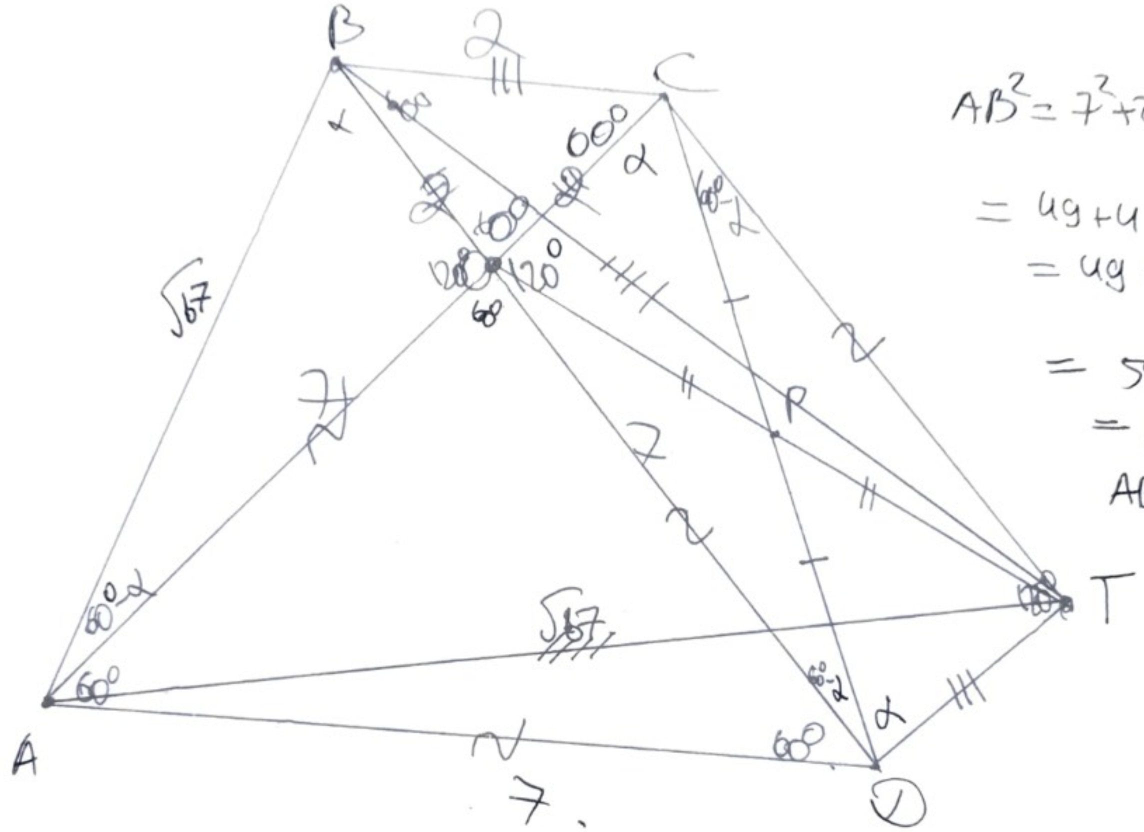
$53+14=$

$DC=DT$.

AT

$DC=DT$

$AB=AT$.



$AB^2=7^2+2^2+2\cdot 7\cdot 2\cdot \frac{1}{2}=$

$=49+4+14=$

$=49+18=$

$=59+8=$

$=\boxed{67}$

$AB=\sqrt{67}$.

AT = BT т.к △ATD = △BCT.
(по двум. ст. и углу).

△ABO = △ATD (AD = AO ; BO=DT
∠ 120°).

2 . Т . У.

211006810 (U380170 M1276469)

$AB=AT=BT$.

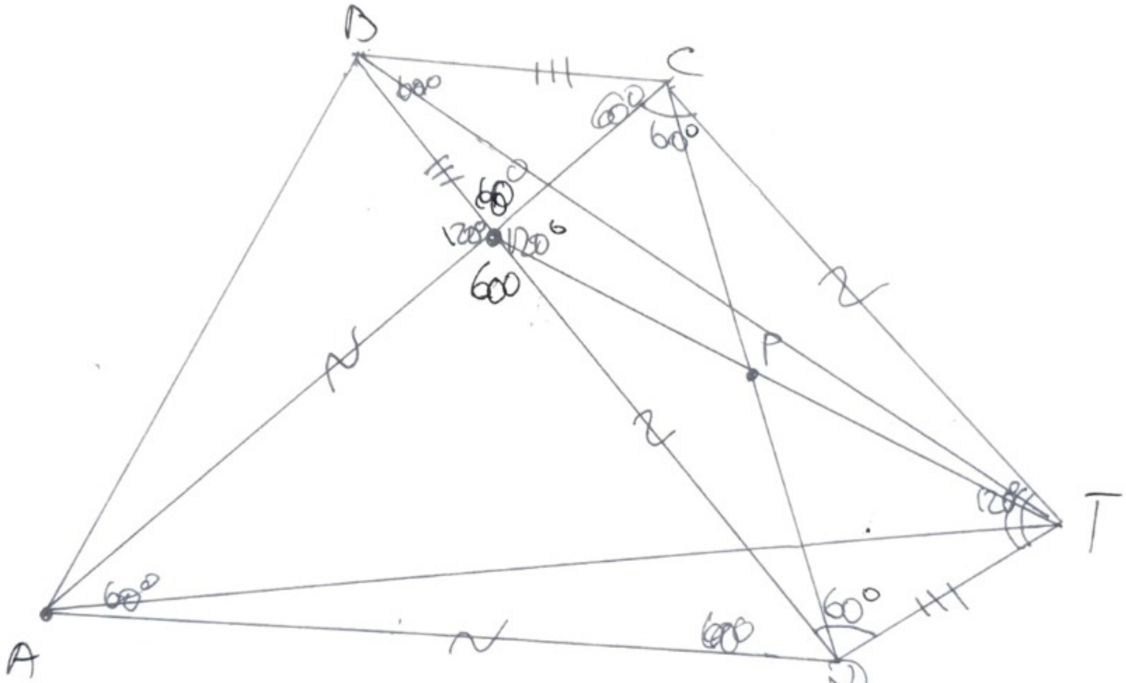
Ответ: $\frac{67}{81}$ - пункт б. №6.

Чистовик.

Чистовик.

№ 6.

Дано:
△ BOC – прав.
△ AOD – прав
OP = PT
CP = PD.



Решение: а) Заметим, что ABCD – хотя бы равнобокая трапеция, т.к
BO = OC; AO = OD, ∠ BOA = ∠ COD, т.к вертик.
⇒ AB = CD, а ∠ OBC = ∠ ADO = 60° ⇒ BC ∥ AD.
Заметим, что OCTD – парал-м, т.к
CP = PD, OP = PT, тогда угол ODT = 60°, ∠ DTC = 120°
DT = BC, т.к DT = OC (пар-м).
OD = CT = AD, ∠ ADT = ∠ BCT = 120°.
1) AD = CT
2) BC = DT ⇒ △ ADT = △ BCT по двум ст. и углу между ними.
3) ∠ ADT = ∠ BCT

AT = BT.

211006810 (U380170 M1276469)

Задача (4) Чистовик. (1)

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \quad (1) \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \\ \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = \frac{81-(x^2+y^2)^2}{5} \\ \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{x^2+y^2} + \frac{81-(x^2+y^2)^2}{5} = 10$$

$x^2+y^2 = t;\ t \geq 0;\quad \frac{6}{t} + \frac{81-t^2}{5} = 10 \Rightarrow \frac{30+31t-t^3}{5t} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 30+31t-t^3 = 0 \Rightarrow -(t+1)(t^2-t-30) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -(t+1)(t+5)(t-6) = 0;\quad \left[\begin{array}{l} t = -5 \text{ - не подх т.к. } t > 0. \\ t = -1 \text{ - } \\ t = 6 \text{ - подходит.} \end{array}\right.$

$t = 6 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 6$, подставляя в (1) ур-ие:

$1 + x^2y^2 = 10 \Leftrightarrow x^2y^2 = 9;\ |xy| = 3;$

Получаем ~~систему~~ сов-ность:

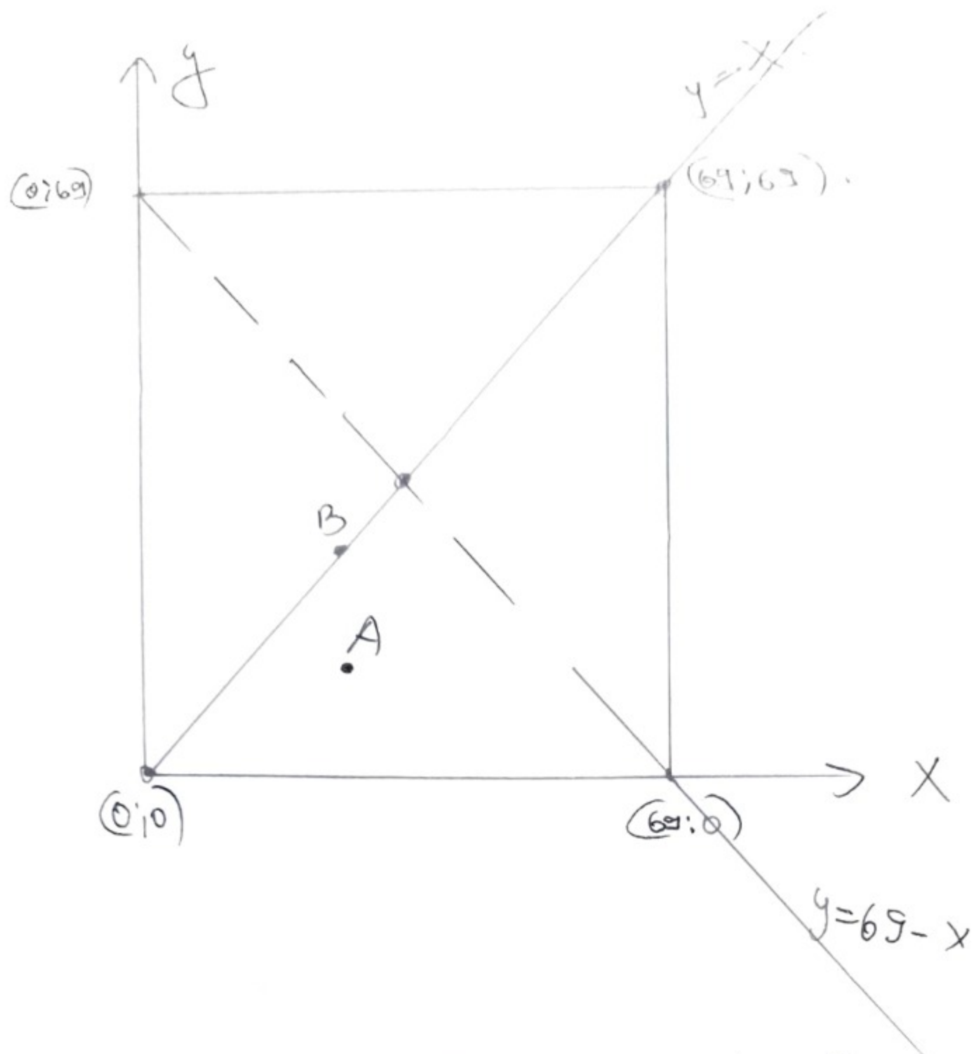
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = 3 \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = -3 \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\sqrt{3} & y = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} & y = \sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} & y = -\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} & y = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ответ: ~~ки~~

$(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (\sqrt{3}; \sqrt{3}); (\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Чистовик.

№5



Заметим, что на $y=x$ — 68 целых точек, а на $y=69-x$ — 68 тоже (целых $= y;x\in Z$).

Для $\forall$ точки на $y=x$ подходят все целочисленные точки, кроме тех точек, которые лежат на прямых $\parallel$ осям. На 1 такой $\parallel$ прямой всего 68 точек, 1-наша, на 2-ой также — 67, т.е $2\cdot 67$ точек не подходит.

Всего целых точек внутри квадрата: $68\cdot 68$. Нам не подходит $2\cdot 67$ точек на $\parallel$ осях и наша точка.

211006810 (U380170 M1276469)

$68\cdot 68-2\cdot 67-1$ — подходящих. Для $\forall$ точки $\in y=x$ 68^2-135 способов взять 2-ую

Чистовик

№6

Аналогично $\triangle ABO = \triangle AT\mathcal{D}$, т.к

1) $AO = A\mathcal{D}$

2) $\mathcal{D}T = BO$ $\Rightarrow \triangle ABO = \triangle AT\mathcal{D}$

3) $\angle AOB = \angle A\mathcal{D}T = 120^\circ$.

$AB = AT$, но $AT = BT \Rightarrow \underline{AB = AT = BT}$

$\triangle ABT$ - прав. Ч.Т.Д.

б) $BC = 2$; $A\mathcal{D} = 7$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABC\mathcal{D}}} - ?$

$BO = 2$; $AO = 7$, т.к $\triangle AO\mathcal{D}$ и $\triangle BOC$ - прав.

по Т. cos:

$AB^2 = 2^2 + 7^2 + 2\cdot 2\cdot 7\cdot \frac{1}{2} = 67 \Rightarrow AB = \sqrt{67} \Rightarrow$

$AB = BT = AT = \sqrt{67}$.

$\angle BAT = 60^\circ$

$S_{\triangle BAT} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{67}\cdot\sqrt{67}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{67\cdot\sqrt{3}}{4}$

Посчитаем $S_{ABC\mathcal{D}}$: $S_{ABC\mathcal{D}} = 2S_{ABO} + S_{BOC} + S_{AO\mathcal{D}} =$

$\Rightarrow$. $S_{ABO} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 7\cdot\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2S_{ABO} = 7\sqrt{3}$.

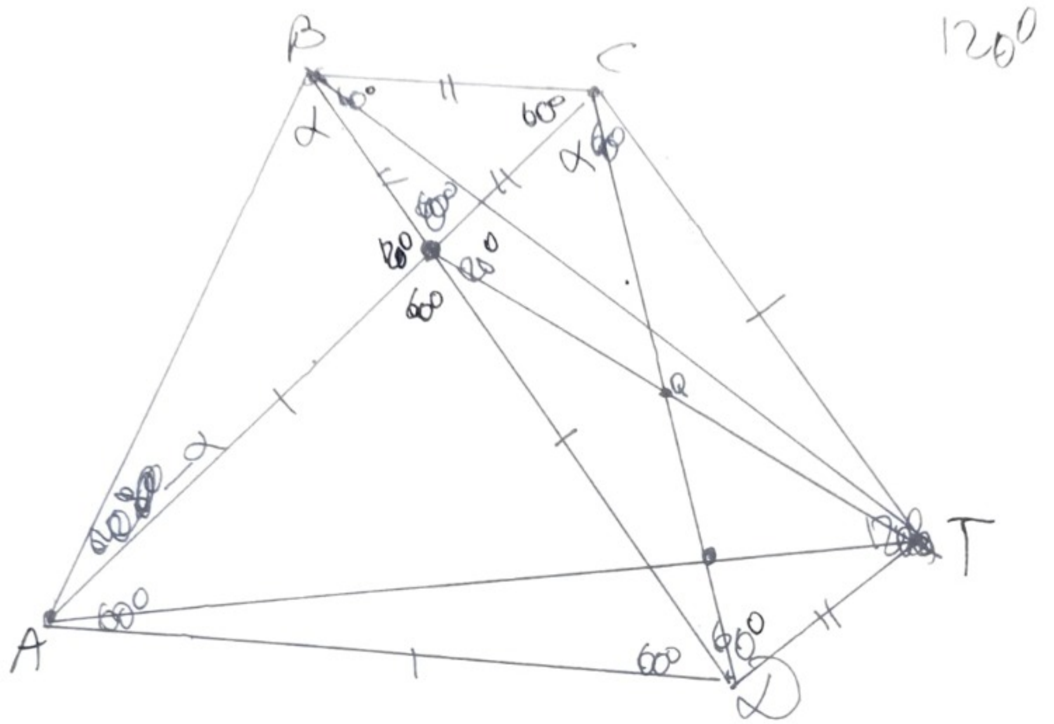
$S_{BOC} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$

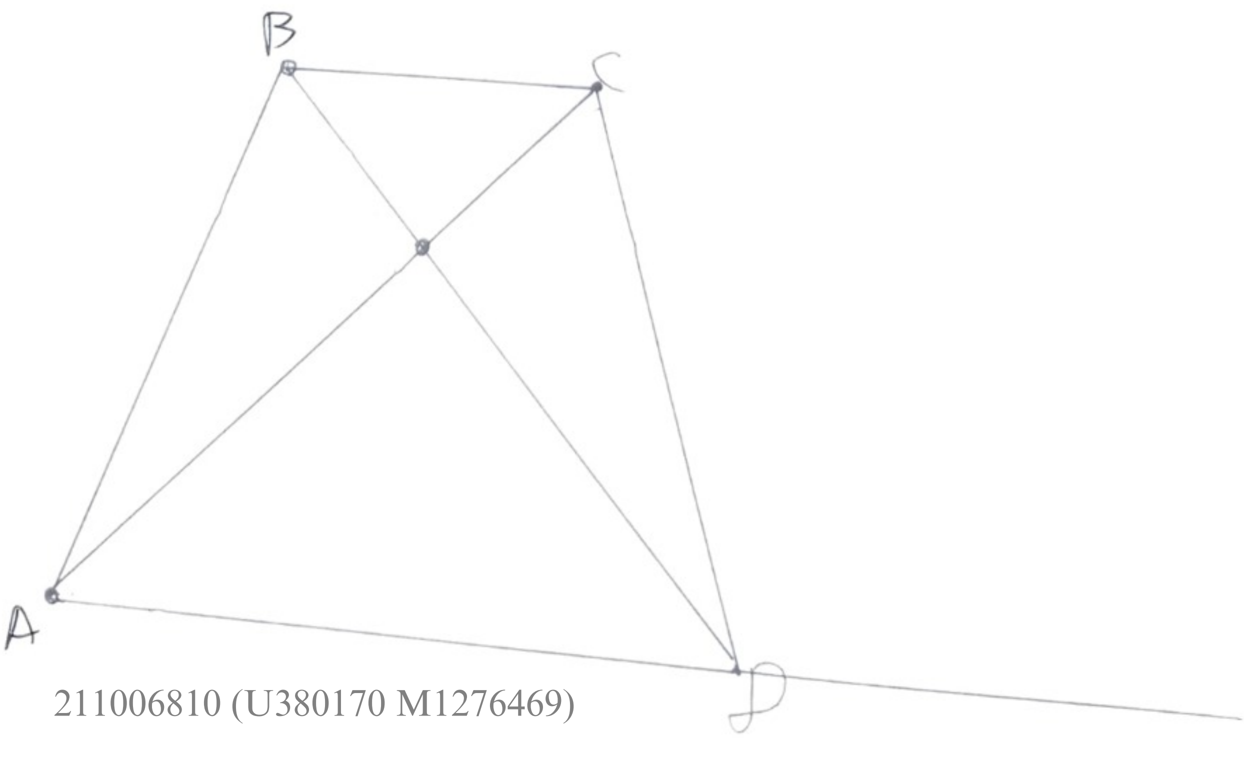
$S_{AO\mathcal{D}} = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABC\mathcal{D}} = \frac{7\sqrt{3}}{1}^{\backslash 4} + \frac{\sqrt{3}}{4}^{\backslash 4} + \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{28\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 49\sqrt{3}}{4} = \frac{32\sqrt{3} + 49\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABC\mathcal{D}}} = \frac{67\sqrt{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{81\sqrt{3}} = \boxed{\frac{67}{81}}$





211006810 (U380170 M1276469)