Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006787**

ID профиля: **54435**

Вариант 10

Чистовик.

№2.

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 7-x\geq 0 \\ 21+4x-x^2\geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x\leq 7 \\ (x+3)(7-x)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-3;7]$

$D=16+84=100 \to x=\dfrac{-4\pm 10}{-2}=\left[\begin{array}{l} 7 \\ -3 \end{array}\right.$

$-\quad +\quad -$; $-3\quad 7\quad x$

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2\sqrt{(x+3)(7-x)}-4$$

Возведём обе части в квадрат: $x+3+7-x-2\sqrt{(x+3)(7-x)}=4(x+3)(7-x)-16\sqrt{(x+3)(7-x)}+16$

$$4(x+3)(7-x)-14\sqrt{(x+3)(7-x)}+6=0$$

Произведём замену переменных: $t=\sqrt{(x+3)(7-x)}$, $t\geq 0$

$4t^2-14t+6=0$

$2t^2-7t+3=0$

$D=49-24=25 \to t=\dfrac{7\pm 5}{4}=\left[\begin{array}{l} 3 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{(x+3)(7-x)}=3 \\ \sqrt{(x+3)(7-x)}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 21+4x-x^2=9 \\ 21+4x-x^2=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-12=0 \\ 4x^2-16x-83=0 \end{array}\right.$

1. $x^2-4x-12=0$

$D=16+48=64 \to x=\dfrac{4\pm 8}{2}=\left[\begin{array}{l} 6 \\ -2 \end{array}\right.$

По ОДЗ: $x\in[-3;7] \Rightarrow$ оба корня подходят под ОДЗ. Подставим их в начальное уравнение и проверим:

$x=6$: $\sqrt{6+3}-\sqrt{7-6}+4=2\sqrt{21+24-36}$

$3-1+4=2\cdot 3$ — верно $\Rightarrow x=6$ подходит

$x=-2$: $\sqrt{-2+3}-\sqrt{7-(-2)}+4=2\sqrt{21-8-(-2)^2}$

$1-3+4=2\cdot 3$ — неверно $\Rightarrow x=-2$ не подходит.

2. $4x^2-16x-83=0$

$D=256+1328=1584=40^2-4^2=36\cdot 44=6^2\cdot 2^2\cdot 11 \to x=\dfrac{16\pm 12\sqrt{11}}{8}=\dfrac{4\pm 3\sqrt{11}}{2}$

Проверим, подходят ли они под ОДЗ:

$\dfrac{4-3\sqrt{11}}{2} \vee -3 \to 4-3\sqrt{11} \vee -6 \to -3\sqrt{11} \vee -10 \to \sqrt{11} \vee \dfrac{10}{3} \to 11 \vee \dfrac{100}{9} \to 99 \vee 100 \Rightarrow$

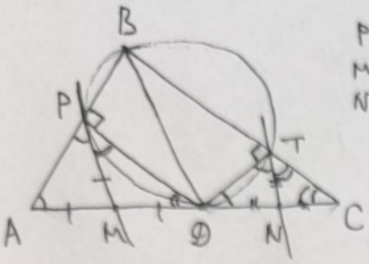
$\Rightarrow \dfrac{4-3\sqrt{11}}{2}<-3 \Rightarrow$ не подходит под ОДЗ.

$\dfrac{4+3\sqrt{11}}{2} \vee 7 \to 4+3\sqrt{11} \vee 14 \to 3\sqrt{11} \vee 10 \to \sqrt{11} \vee \dfrac{10}{3} \to 11 \vee \dfrac{100}{9} \to 99 \vee 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{4+3\sqrt{11}}{2}<7 \Rightarrow$ подходит под ОДЗ.

Ответ: $6;\ \dfrac{4+3\sqrt{11}}{2}$.

Черновик.



$PM \parallel TN$

M – середина AD

N – середина CD

$MP = 1$

$NT = \frac{3}{2}$

$BD = \sqrt{5}$

S_{ABC} - ?

$\angle ABC = 180° - \angle PDT = \nu + \xi$

$180° - 2\xi + 180° - 2\nu = 180°$

$180° = 2(\xi + \nu)$

$\xi + \nu = 90° \Rightarrow \angle ABC = 90°$

PBTD – прямоугольник $\Rightarrow PB = DT$

$PD = BT$

$\frac{BT}{TC} = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$

$AC = 2PM + 2NT = 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 5$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$ $\quad AD = 2$ $\quad DC = 3$

$25x^2 + 25y^2 = 25$

$x^2 + y^2 = 1$

$4x^2 + 9y^2 = 5$

$x^2 = \frac{5 - 9y^2}{4}$

$\frac{5-9y^2}{4} + y^2 = 1$

$\frac{5 - 5y^2}{4} = 1$

$5 - 5y^2 = 4 \to 5y^2 = 1 \to y^2 = \frac{1}{5} \to x^2 = \frac{4}{5}$

$AB = 5y = 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{5}$

$BC = 5x = 5 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} = 2\sqrt{5}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 5$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21 + 4x - x^2}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = -(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 + (\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{7-x})^2$

$x + 3 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} + 7 - x = 4(x+3)(7-x) - 16\sqrt{(x+3)(7-x)} + 16$

$4(x+3)(7-x) - 14\sqrt{(x+3)(7-x)} + 6 = 0$

$\sqrt{(x+3)(7-x)} = t,\ t \geq 0:\ 2t^2 - 7t + 3 = 0$

$D = 49 - 24 = 25 \to t = \frac{7 \pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} -x^2 + 4x + 21 = 9 \\ -x^2 + 4x + 21 = \frac{1}{4} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x - 12 = 0 \\ 4x^2 - 16x - 83 = 0 \end{array}\right.$

$D = 16 + 48 = 64 \to x = \frac{4 \pm 8}{2} = \left[\begin{array}{l} 6 \\ -2 \end{array}\right. \to x = 6$

$D = 256 + 1328 = 1584 = 40^2 - 4^2 = 36 \cdot 44 = 6^2 \cdot 2^2 \cdot 11 \to$

$\to x = \frac{16 \pm 12\sqrt{11}}{8} = \frac{4 \pm 3\sqrt{11}}{2}$ $\quad \frac{4 - 3\sqrt{11}}{2} < 0$; $\frac{4 + 3\sqrt{11}}{2} \vee 7$

$4 + 3\sqrt{11} \vee 14$

$3\sqrt{11} \vee 10$

$\sqrt{11} \vee \frac{10}{3}$

$11 \vee \frac{100}{9}$

$99 \vee 100$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \\ 21 + 4x - x^2 \geq 0 \to x \in [-3; 7] \end{cases}$

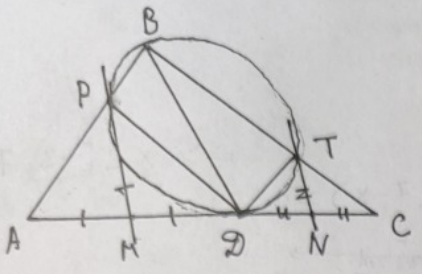
$D = 16 + 84 = 100 \to x = \frac{-4 \pm 10}{-2} = \left[\begin{array}{l} 7 \\ -3 \end{array}\right.$

$\frac{38^2}{304}$

211006787 (U54435 M1277242)

Чистовик.

№1.



Дано: BD — диаметр окр. ($D \in AC$);
окр. пересекает AB в точке P, BC — в точке T;
M — середина AD, N — середина CD;
$PM \parallel TN$.

а) Найти $\angle ABC$

б) Найти S_{ABC}, если $MP = 1$, $NT = \frac{3}{2}$, $BD = \sqrt{5}$

Решение.

а) 1. $\angle BPD = \angle BTD = 90°$ (вписанные углы, опирающиеся на диаметр) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APD = \angle CTD = 90°$

2. $PM = \frac{AD}{2}$ (медиана, проведённая из прямого угла в прямоугольном тр-ке)

Аналогично $TN = \frac{CD}{2}$

3. $\triangle PMD$ — р/б ($PM = DM$) $\Rightarrow \angle MPD = \angle MDP = \alpha$

$\triangle TND$ — р/б ($TN = DN$) $\Rightarrow \angle NTD = \angle NDT = \beta$

4. $\angle PMN + \angle TNM = 180°$ (т.к. $PM \parallel TN$)

$\angle PMN = 180° - 2\alpha$ (из $\triangle PMD$)

$\angle TNM = 180° - 2\beta$ (из $\triangle TND$) $\Rightarrow 180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°$

$2(\alpha + \beta) = 180° \rightarrow (\alpha + \beta = 90°)$

5. $\angle PBT + \angle PDT = 180°$ (т.к. PBTD — вписанный четырёхугольник)

$\angle PDT + (\angle PDM + \angle TDN) = 180° \rightarrow \angle PDT + (\alpha + \beta) = 180° \Rightarrow \angle PDT = 90°$

$\angle PBT = 180° - \angle PDT = 180° - 90° = 90°$

Ответ: $\angle ABC = 90°$.

б) 1. Т.к. $\angle PBT = \angle PDT = \angle BPD = \angle BTD = 90° \Rightarrow$ PBTD — прямоугольник $\Rightarrow PD = BT$, $PD \parallel BT$

$PB = DT$, $PB \parallel DT$

2. $DT \parallel PB \Rightarrow \frac{BT}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{2PM}{2PM + 2TN} = \frac{2}{5}$; $PD \parallel BT \Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{2TN}{2PM + 2TN} = \frac{3}{5}$

Пусть $AB = 5y$, $BC = 5x$. Тогда $BT = 2x$, $BP = 3y$

3. $\triangle ABC$: $\angle ABC = 90° \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2 \rightarrow (5y)^2 + (5x)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 = 1 - y^2$

$\triangle PBT$: $\angle PBT = 90° \Rightarrow PB^2 + BT^2 = PT^2 = BD^2$ ($PT = BD$, т.к. PBTD — прямоугольник)

$(3y)^2 + (2x)^2 = (\sqrt{5})^2$

$9y^2 + 4x^2 = 5$

$9y^2 + 4 - 4y^2 = 5$

$5y^2 = 1 \rightarrow y^2 = \frac{1}{5} \rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

4. $\triangle ABC$, $\angle ABC = 90° \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5y \cdot 5x = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$

Ответ: $S_{ABC} = 5$.

1

211006787 (U54435 M1277242)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006787**

ID профиля: **54435**

Вариант 10

Чистовик.

№4.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases} \qquad ОДЗ: \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^4+2x^2y^2+y^4)+5x^2y^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 10 - \frac{6}{x^2+y^2} \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 10 - \frac{6}{x^2+y^2} \\ (x^2+y^2)^2 + 50 - \frac{30}{x^2+y^2} = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2 = 10 - \frac{6}{x^2+y^2} \\ (x^2+y^2)^3 - 31(x^2+y^2) - 30 = 0 \end{cases}$$

1. $(x^2+y^2)^3 - 31(x^2+y^2) - 30 = 0$

Произведём замену переменных: $x^2+y^2 = t$, $t > 0$

$t^3 - 31t - 30 = 0$

$t = -1$ является корнем $\Rightarrow$ $t^3 - 31t - 30 = (t+1)(t^2-t-30) = 0$

Решим ур-е $t^2 - t - 30 = 0$

$D = 1 + 120 = 121 \rightarrow t = \frac{1 \pm 11}{2} = \left[\begin{matrix} 6 \\ -5 \end{matrix}\right.$

$t^3 - 31t - 30 = (t+1)(t+5)(t-6) = 0 \Rightarrow t = \left[\begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 6 \end{matrix}\right.$ Т.к. $t = x^2+y^2 > 0$, то $t = 6$

2. $x^2y^2 = 10 - \frac{6}{x^2+y^2} = 10 - \frac{6}{6} = 9$

3. $\begin{cases} x^2+y^2 = 6 \rightarrow x^2 = 6 - y^2 \\ x^2y^2 = 9 \end{cases}$ $\Rightarrow (6-y^2)y^2 = 9$

$6y^2 - y^4 = 9$

$y^4 - 6y^2 + 9 = 0$

$(y^2-3)^2 = 0 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

$x^2 = 6 - y^2 = 6 - 3 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

1

Чистовик.

№5.

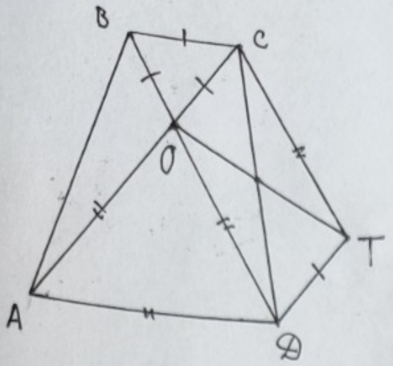
1. Прямые $y=x$ и $y=69-x$ — это диагонали квадрата.
2. Посчитаем, сколько всего узлов сетки внутри квадрата: $(69-2+1)^2=68^2$. Из них на диагоналях лежит $68\cdot 2=136$ (при этом заметим, что центр квадрата не лежит в узле сетки, т.к. 69 — нечётное число).
3. Будем брать сначала один узел, потом другой (в конце разделим полученный результат на 2, т.к. порядок не важен):
   1) Пусть первый узел лежит на одной из диагоналей квадрата. Тогда второй узел можно выбрать $68^2-(68+68-1)$, т.к. он не должен лежать на одной прямой с первым, параллельной одной из осей координат (вычитаем 1, т.к. посчитали первый узел дважды). Всего способов $136\cdot(68^2-135)$
   2) Пусть первый узел не лежит ни на одной из диагоналей. Тогда второй узел можно выбрать $136-4=132$ способами (вычитаем 4, т.к. ~~каждая~~ прямые, параллельные одной из осей координат, пересекают каждую диагональ в одной точке). Всего способов $(68^2-136)\cdot 132$
4. Всего способов: $\dfrac{136\cdot(68^2-135)+132\cdot(68^2-136)}{2}=68\cdot(68^2-135)+66\cdot(68^2-136)$

Ответ: $68\cdot(68^2-135)+66\cdot(68^2-136)$.

2

Чистовик.

№6.



Дано: $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник;
O — точка пересечения AC и BD;
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ правильные;
T симметрична O относительно середины CD.

а) Доказать $\triangle ABT$ — правильный

б) Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$, если $BC=2$, $AD=7$

Решение.

а) 1. $OCTD$ — параллелограмм, т.к. в четырёхугольнике $OCTD$ диагонали делятся точкой пересечения пополам ($\Rightarrow CO=TD$, $CO \parallel TD$, $OD=CT$, $OD \parallel CT$)

2. $\angle COD = 180° - \angle BOC = 180° - 60° = 120° \Rightarrow \angle COD = \angle CTD = 120°$
$\angle OCT = \angle ODT = 180° - 120° = 60°$ (т.к. $OCTD$ — параллелограмм)

3. $\triangle BCT = \triangle ADT$ по двум сторонам и углу между ними:
$BC = TD$ (т.к. $BC = CO$, а $CO = DT$)
$CT = AD$ (т.к. $CT = OD$, а $OD = AD$)
$\angle BCT = \angle ADT$ ($\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60° + \angle ODT = \angle ADO + \angle ODT = \angle ADT = 120°$)
$\Rightarrow BT = AT$

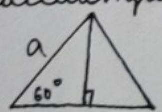
4. $\triangle ADT = \triangle CDT$ по двум сторонам и углу между ними:
$AD = CT$
DT — общая
$\angle ADT = \angle CTD = 120°$
$\Rightarrow AT = CD$

5. $\triangle AOB = \triangle COD$ по двум сторонам и углу между ними:
$BO = CO$
$AO = DO$
$\angle AOB = \angle COD$ (вертикальные)
$\Rightarrow AB = CD \Rightarrow AB = AT$

Получаем: $AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ — правильный.

б) 1. $\triangle ADT$: по теореме косинусов: $AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2AD \cdot DT \cdot \cos\angle ADT$
$AT^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cos 120° = 49 + 4 - 2 \cdot 14 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 53 + 14 = 67 \Rightarrow AT = \sqrt{67}$

2. Рассмотрим правильный треугольник со стороной a:



Высота этого треугольника равна: $a \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

Высота $\triangle BOC$: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$

Высота $\triangle AOD$: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

Высота $\triangle ABT$: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{67}$

3. $ABCD$ — трапеция, т.к. $\angle BCO = \angle DAO = 60°$ — накрест-лежащие при BC и AD и секущей $AC \Rightarrow BC \parallel AD$.

Высота трапеции: $\sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AD \cdot BC}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$
(т.к. высоты $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ составляют одну прямую, т.к. $BC \parallel AD$)

$S_{ABT} = \frac{1}{2} \sqrt{67} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{67} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$

3

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ Черновик.

$(x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81$

$(x^2+y^2)^2 + 50 - \dfrac{30}{x^2+y^2} = 81$

$(x^2+y^2)^3 - 31(x^2+y^2) - 30 = 0$

$x^2+y^2 = t$: $t^3 - 31t - 30 = 0$

$t=-1$ - корень $(t+1)(t^2 - t - 30) = 0$

$D = 1+120 = 121 \to t = \dfrac{1 \pm 11}{2} = \left[\begin{matrix} 6 \\ -5 \end{matrix}\right.$

$(t+1)(t+5)(t-6) = 0$ $t \geq 0 \Rightarrow t = 6$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 6 \\ x^2y^2 = 9 \end{cases} \to x^2 = 6 - y^2$

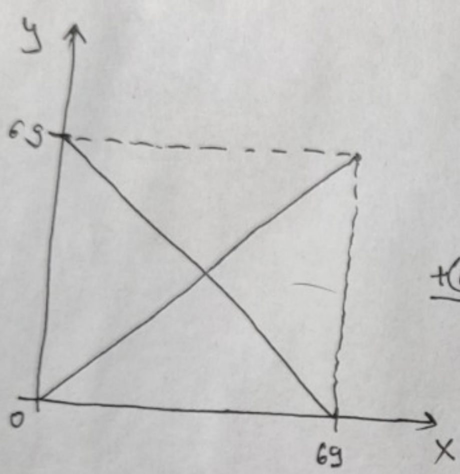
$(6-y^2)y^2 = 9$

$6y^2 - y^4 - 9 = 0$

$y^4 - 6y^2 + 9 = 0$

$(y^2-3)^2 = 0$

$y^2 = 3 \to y = \pm\sqrt{3} \to x = \pm\sqrt{3} \to$ ~~$\begin{cases} x = \sqrt{3}, y = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}, y = -\sqrt{3} \end{cases}$~~

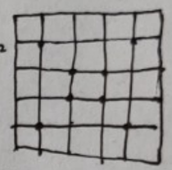


Всего узлов: 68^2

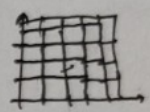
Всего узлов на границе: $68 \cdot 2 = 136$

$$\frac{136 \cdot (68^2 - 68 - 67) + (68 \cdot 2 - 4) \cdot (68^2 - 136)}{2}$$

$9+9+9+9+4 \cdot 8 + 9 \cdot 4 = 9 \cdot 8 + 4 \cdot 8$

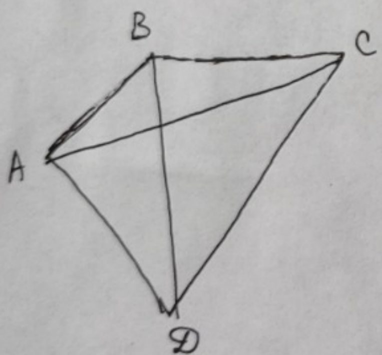


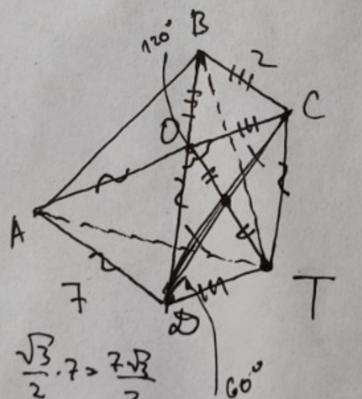
$8 \cdot (16 - 4 - 3) = 72$



$1+1+1+1 = 4$

$4 \cdot (4 - 2 - 1) = 4$





$\triangle BCT = \triangle ADT \to BT = AT$

$\triangle AOB = \triangle DOC \to AB = CD$

$\triangle BDT = DBC \to BT = DC \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный

$\triangle ADT$: $AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2AD \cdot DT \cdot \cos 120°$

$AT^2 = 49 + 4 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 53 + 28 = 81 \to AT = 9$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$\frac{9\sqrt{3}}{2}$ $S_{ABCD} = \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{67}$ $S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{67} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{67} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$

211006787 (U54435 M1277243)