Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

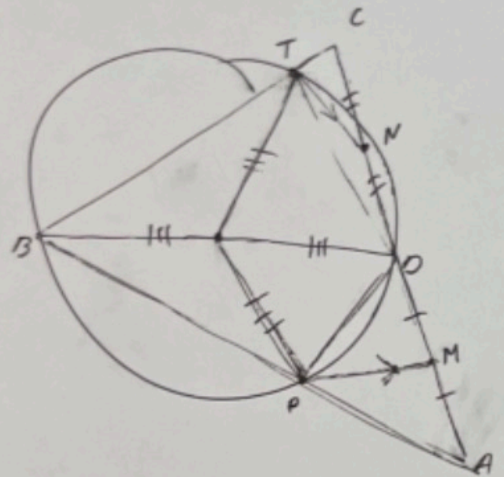
Шифр: **211006711**

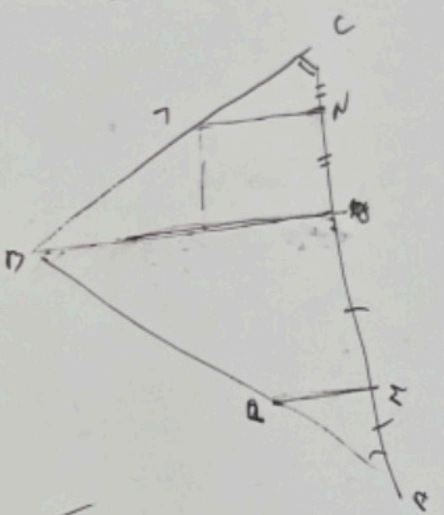
ID профиля: **878289**

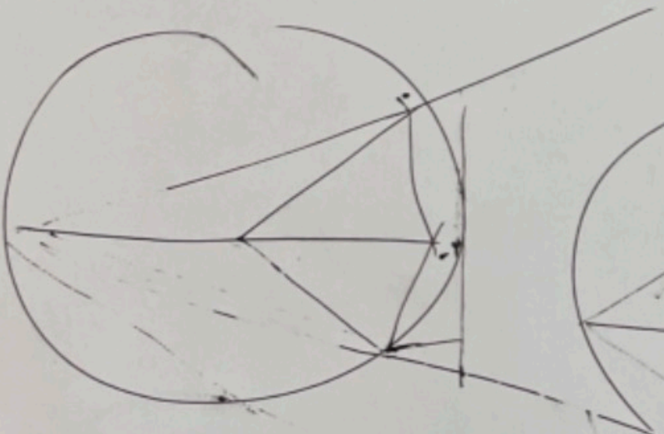
Вариант 10

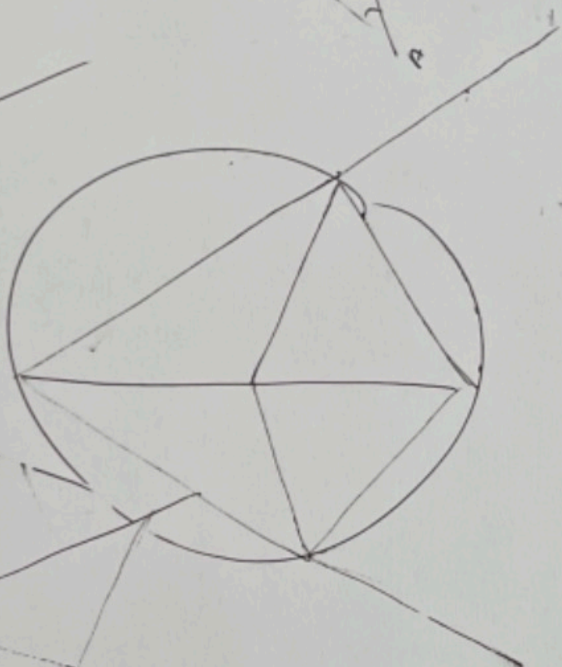
Черновик Часть I

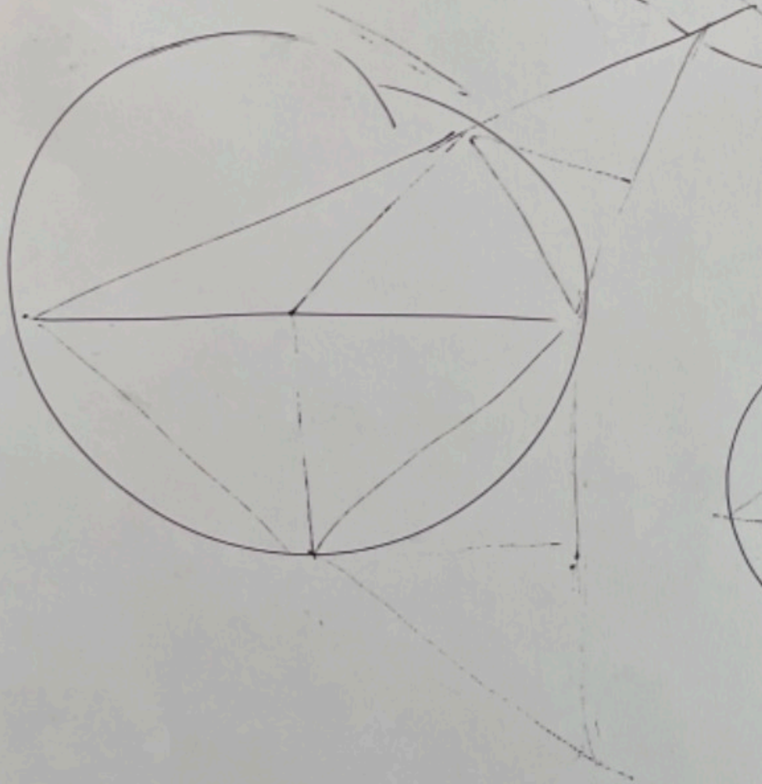
1)

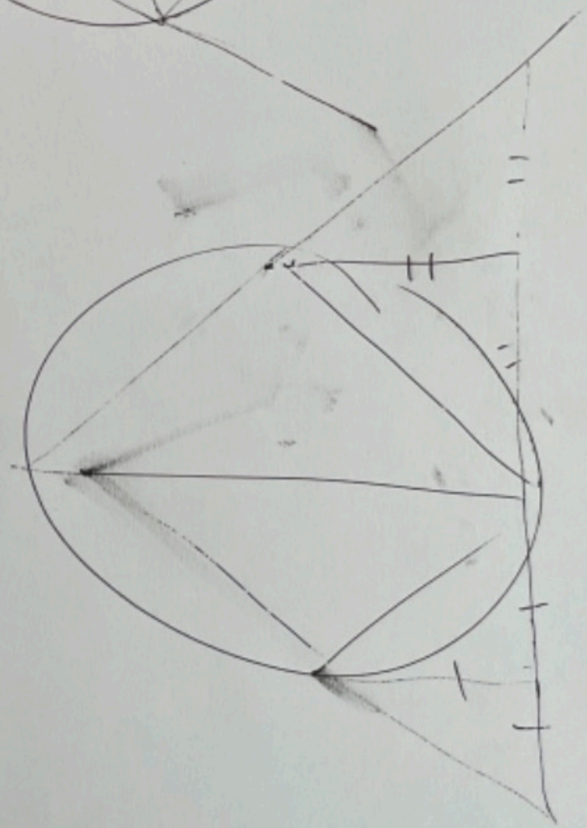






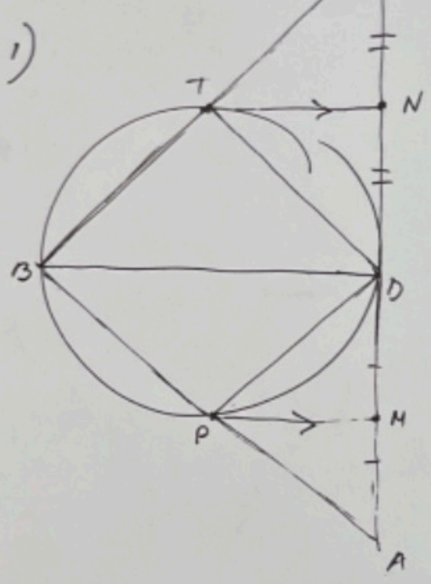






Чистовик Часть I Вариант X

1)



а) Найти $\angle ABC$

$\triangle$ $\angle BTD = \angle BPD = 90°$ (опир. на ~~[illegible]~~ диаметр)

$\angle CTD = \angle APD = 90°$ (смежные к $\angle BTD$ и $\angle BPD$)

$PM \parallel TN$ только в том случае, когда $PM \parallel TN \parallel BD \perp AC$

$TN = CD/2$ (медиана прямоуг. тр-ка)

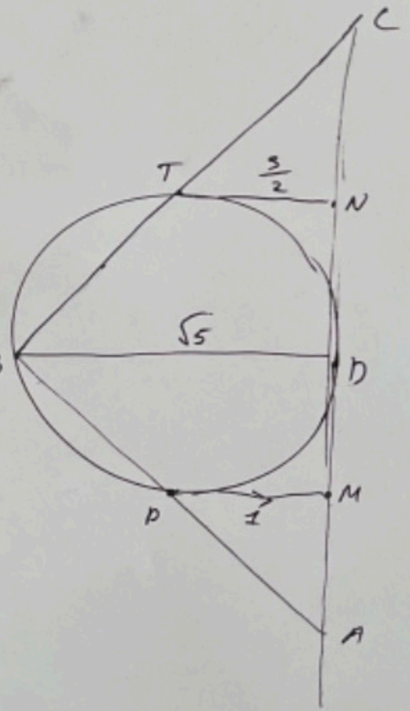
$PM = AD/2$ (медиана прямоуг. тр-ка)

$BD = 2PM = AD$ ($\triangle ABD \sim \triangle APM$)

$BD = 2TN = CD$ ($\triangle CBD \sim \triangle CTN$)

$CD = AD = BD \Rightarrow \angle ABC = 90°$ ▲

Ответ: $\angle ABC = 90°$,



б) $\triangle$ $AD = 2PM = 2$

$CD = 2TN = 3$

$AC = AD + CD = 5$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ ▲

Ответ: $S_{\triangle ABC} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

211006711 (U878289 M1277018)

Черновик Часть I Вариант X

2) $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$(x+3)(7-x) = 7x+21-x^2-3x = 21+4x-x^2$

Пусть $x+3 = y$

$7-x = z$

$\sqrt{y} - \sqrt{z} + 4 = 2\sqrt{y \cdot z}$

$10-(x+3) = -x+7$

$\sqrt{y} - \sqrt{z} + 4 = 2\sqrt{y}\sqrt{z}$

$\sqrt{y} - \sqrt{z} = 2(\sqrt{y}\sqrt{z} - 2)$

$16 \cdot 16 = 256$

$y - 2\sqrt{y}\sqrt{z} + z = 4(yz - 4\sqrt{y}\sqrt{z} + 4)$

$y + z - 4yz - 16 = -16\sqrt{y}\sqrt{z} + 2\sqrt{y}\sqrt{z}$

$14 : 4 = 3,5$

$y + z - 4yz - 16 = -14\sqrt{y}\sqrt{z}$

$(2\sqrt{y}\sqrt{z} - 3,5)^2 = 4yz - 14\sqrt{y}\sqrt{z} + 12,25$

$(y+z-4yz-16)(y+z-4yz-16) =$

$y + z - 3,75 = (2\sqrt{y}\sqrt{z} - 3,5)^2$

$= y^2 + yz - 4y^2z - 16y + yz + z^2 - 4yz^2 - 16z - 4y^2z -$

$- 4yz^2 + 16y^2z^2 + 64yz - 16y - 16z + 64yz + 256$

$\sqrt{y} - \sqrt{10-y} + 4 = 2\sqrt{y(10-y)}$

$y^2 + 66yz$

$20,75 \cdot 4 = 83,00$

$16 + 83 = 99$

$x + 3 + 7 - x + 4(x+3)(7-x) - 16 = -14\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$\sqrt{99} = \sqrt{9 \cdot 11} = 3\sqrt{11}$

$-6 - 4(x+3)(7-x) = -14\sqrt{(x+3)(7-x)}$

Пусть $\sqrt{(x+3)(7-x)} = w \geq 0$

$-4w^2 + 14w - 6 = 0$

$14 \cdot 16 = 56$, 14, 196

$24 \cdot 4 = 96$

$w = \dfrac{-14 \pm \sqrt{100}}{-8} = \dfrac{-14 \pm 10}{-8}$

$w_1 = \frac{1}{2}$ $w_2 = +3$

$-x^2 + 4x + 12 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{-2} = \dfrac{-4 \pm 8}{-2}$

$\sqrt{(x+3)(7-x)} = \frac{1}{2}$ $(x+3)(7-x) = \frac{1}{4}$ $21 + 4x - x^2 = \frac{1}{4}$

$-x^2 + 4x - 20,75 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - \ldots}}{-2}$ иное

Чистовик Часть I Вариант X

2) $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$ $\qquad \sqcup \; x+3 = y$

$7-x = z$

$\sqrt{y} - \sqrt{z} + 4 = 2\sqrt{y \cdot z}$

$\sqrt{y} - \sqrt{z} = 2(\sqrt{y \cdot z} - 2) \qquad |\,\hat{}\,2$

$y - 2\sqrt{y \cdot z} + z = 4(yz - 4\sqrt{y \cdot z} + 4)$

$y + z - 4yz - 16 = -16\sqrt{y \cdot z} + 2\sqrt{y \cdot z}$

$y + z - 4yz - 16 = -14\sqrt{y \cdot z}$

$(x+3) + (7-x) - 4(x+3)(7-x) - 16 = -14\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$-4(x+3)(7-x) - 6 = -14\sqrt{(x+3)(7-x)}$ $\qquad \sqcup \; \sqrt{(x+3)(7-x)} = w \geq 0$

$-4w^2 + 14w - 6 = 0$

$w = \dfrac{-14 \pm \sqrt{196-96}}{-8}$

$w_1 = \dfrac{1}{2}$

$w_2 = 3$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{21+4x-x^2} = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{21+4x-x^2} = 3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} -x^2+4x+20{,}75 = 0 \\ -x^2+4x+12 = 0 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{99}}{-2} \\ x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{-2} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-4 \pm 3\sqrt{11}}{-2} \\ x = \dfrac{-4 \pm 8}{-2} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \pm \dfrac{3\sqrt{11}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ \cancel{x = -2} \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ответ: $x = \cancel{-2};\ 6;\ 2 \pm \dfrac{3\sqrt{11}}{2}$

Черновик Часть I Вариант X

7

3) $y=2x-5$

x

$B=y=\frac{ax^2-2a^2x+a^3+3}{a}$

$y^2-4y(x+a)$

$y^2+4xy-4ay=-5a^2-8x^2-12ax$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

$x_0=\frac{2a}{2}=a$

$y(y-4x-4a)$

$2x$

$y_0=a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$

$(2x-y)^2+5a^2-4ay+4x^2+12ax=0$

$y^2=x^2$

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$xy=3-y^2$

$4y(a+x)-y^2=12ax+8x^2+5a^2$

$y^2+xy=3$

$y=\frac{3-y^2}{x}$

$y(4(a+x)-y)$

$y^2+xy-3=0$

$y(y+x)-3=0$

$(x+y)^2=0$

$4x^2-4xy+y^2+4x^2$

$4x(2x-y)+y(y-4a)+a(5a+12x$

$9a^2-4a^2$

$-4a^2-4ay+4x^2-4xy+y^2$

$4x^2+12ax+9a^2=(2x+3a)^2+$

$4x^2$

21006711 (U878289 M1277018)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006711**

ID профиля: **878289**

Вариант 10

Черновик Часть II Вариант X

4) $\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$

$x^2 = a$

$y^2 = b$

$x^2 \neq -y^2$

$x^2+y^2 \neq 0$

$\begin{cases} \dfrac{6}{a+b} + ab = 10 \quad \cdot 7 \\ a^2+b^2+7ab = 81 \end{cases}$ $-$

$ab = \dfrac{10}{} - \dfrac{6}{a+b}$

a^2+b^2

$a^2+b^2 - \dfrac{42}{a+b} = 11$

$a^2+b^2 = \dfrac{11(a+b)+42}{a+b}$

$\dfrac{6}{a+b} = 10 - ab$

$6 + ab(a+b) = 10(a+b)$

$a+b = \dfrac{6}{10-ab}$

$6 = (a+b)(10-ab)$

1,2

$\dfrac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{-2}$

$ab = 10 - \dfrac{6}{a+b}$

$a^2+2ab+b^2+5ab = 81$ $\quad \dfrac{-6}{-2} = 3$

$(a+b)^2 = 81 - 5ab$

$(a+b)^2 = 81 - 50 + \dfrac{30}{a+b}$

$\dfrac{36}{100-20ab+a^2b^2} = 81 - 5ab$

$(a+b)^2 = 31 + \dfrac{30}{a+b}$ $\quad a+b = t$

$t^2 = 31 + \dfrac{30}{t}$ $\quad t(t^2-31) = 30$

$t^3 = 31t + 30$

$t^3 - 31t + 30 = 0$

$t(t^2-31) = -30$

$\begin{array}{l|l} t^3-31t-30 & t+1 \\ \underline{t^3+t^2} & t^2-t-30 \\ -t^2-31t & \\ \underline{-t^2-t} & \\ -30t-30 & \\ -30t-30 & \end{array}$

$t^2-t-30=0$

$a = 1-b$ $\quad \dfrac{1 \pm 11}{2}$

$1; -5; 6$

$b - b^2 - 4 = 0$ $\quad -b^2+b-4$

$-1 \pm$

$a = 5-b$

$-b^2+5b-8{,}8 = 0$

$\begin{array}{l|l} t^3-0t^2-31t+30 & t-1 \\ \underline{t^3-t^2} & t^2+t-30 \\ t^2-31t & \\ \underline{t^2-t} & \\ -30t+30 & \end{array}$

$\begin{array}{l|l} t^3-31t+30 & t-1 \\ \underline{t^3-t^2} & t^2+t \\ t^2 & \end{array}$

$t^2+t-30=0$

$\dfrac{-1 \pm \cancel{\sqrt{\ }}\ 11}{2}$

$(t-1)(t^2+t-30) = 0$ $\quad 1; -6; 5$

$\begin{cases} a+b=1 \\ ab=4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a+b=5 \\ ab=8{,}8 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b=-6 \\ ab=11 \end{cases}$ − искл

Чистовик Часть II Вариант X

4) $$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$ и $x^2 = a \geq 0$, $y^2 = b \geq 0$ $\quad a+b \neq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a+b} + ab = 10 \\ a^2+7ab+b^2 = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 10 - \dfrac{6}{a+b} \\ (a+b)^2 = 81 - 5\left(10 - \dfrac{6}{a+b}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 10 - \dfrac{6}{a+b} \\ (a+b)^2 = 31 + \dfrac{30}{a+b} \end{cases}$$ и $a+b = t > 0$

$$\begin{cases} ab = 10 - \dfrac{6}{a+b} \\ t^2 = 31 + \dfrac{30}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 10 - \dfrac{6}{t} \\ t^3 - 31t - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 10 - \dfrac{6}{t} \\ (t+1)(t+5)(t-6) \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ искл} \\ t=-5 \text{ искл} \\ t=6 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a+b = 6 \\ ab = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 6-b \\ -b^2+6b-9=0 \end{cases}$$

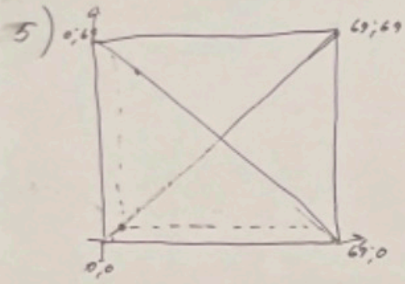
$$\begin{cases} a = 6-b \\ b = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 3 \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3});(\sqrt{3};-\sqrt{3});(-\sqrt{3};\sqrt{3});(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

Черновик Часть II Вариант X

5) 

Внутри 68×68 узлов

$x = 69 - x$

$2x = 69$

$x =$

$2 \times 68 \times (68 \times 68 - 68 - 67 \cdot 2) + 2 \times \binom{68}{2}$

$68 \cdot 67 - 67 \cdot 2$

$2 \times 68 \cdot 67 \cdot 66 + 2 \times \frac{68!}{66! \cdot 2!} = \frac{67 \cdot 68}{2}$

$66 \times 2 = 132 + 1 = 133$

68×67: 476, 408, 4556

4556×133: 13668, 13668, 4556, 605948

$605948 - 4488 = 601460$

68×66: 408, 408, 4488

$- 2 \times 68 \times \binom{68}{2}$

$67 \cdot 67 \cdot$

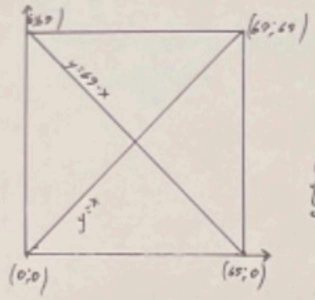
$\binom{68^2}{2} = \frac{(68^2)!}{\cancel{68^2}}$

$\frac{68^2 \cdot (68^2 - 1)}{2}$

68×68: 544, 408, 4624

Чистовик Часть II Вариант X

5)



Кол-во узлов внутри – 68×68

$$\begin{cases} y=x \\ y=69-x \end{cases} \qquad x=69-x \qquad 2x=69 \qquad x=\frac{69}{2}$$

Т.к. диагонали пересекаются не в узле, то мы не посчитаем никакую пару точек дважды

Возьмем точку (1;1), и начнем подбирать к ней пару. Не будем пока выбирать точки с этой же диагонали. Их посчитаем позже. К точке (1;1) можно выбрать все точки внутри квадрата (68×68), отнять точки на $y=x$ (–68), отнять точки на векторе (0;68) и векторе (68;0), значит еще то для каждой из 68-ми точек на $y=x$ –2×67. Для $y=69-x$ все будет аналогично, поэтому удвоим результат. Теперь выбираем случайные две точки на $y=x$. Это будет $\binom{68}{2}=\frac{68!}{66!\times2!}$. Столько же вариантов и для выбора двух точек на $y=69-x$.

Конечная формула:

$$2\times68\times(68\times68-68-2\times67)+2\binom{68}{2}=$$

$$=2\times68\times(68\times67-67\times2)+2\times\frac{68!}{66!\times2!}=2\times68\times(67\times66)+\cancel{2}\times\frac{67\times68}{\cancel{2}}=$$

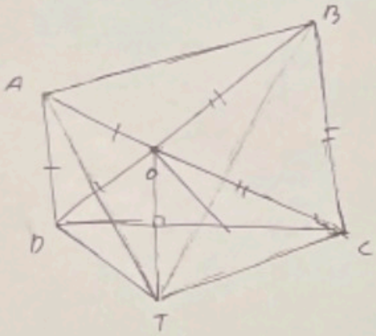
$$=67\times68\times(66\times2+1)=4556\times133=605.948$$. Но мы ведь посчитали пары точек, где каждая находится на разных диагоналях дважды. Поэтому -68×66. В итоге получаем

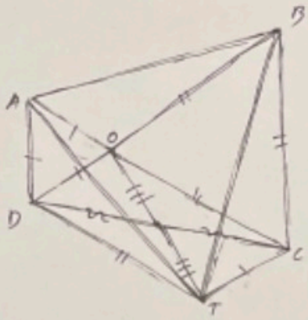
601.460

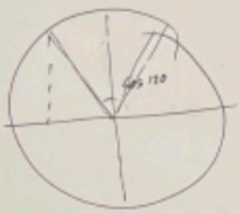
Ответ: 601.460

Черновик   Часть II   Вариант X

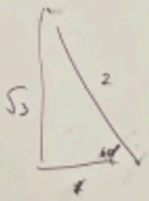
б)





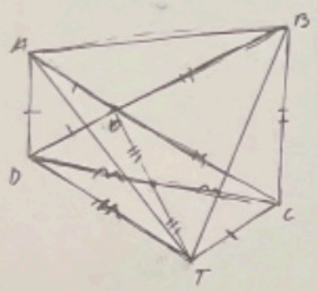


$$\begin{array}{r} 49 \\ +\,18 \\ \hline 67 \end{array}$$



Чистовик Часть II Вариант X

6)



а) □ $\triangle ABT$ – правильный

Достроим пар-ам $DOCT$. Он пар-ам т.к. диагонали OT и DC пересекаются и делятся пополам (по условию)

$\angle AOD = \angle ADO = \angle DAO = \angle BOC = \angle OBC = \angle BCO$ (по условию)

$\angle DOC = 120^\circ$ (смежный к $\angle AOD$)

$\angle ODT = \angle OCT = 60^\circ$ (свойство пар-ма)

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120^\circ$

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120^\circ$

$\angle AOB = 120^\circ$ (смежн к $\angle AOD$)

$DT = OC = OB$ (свойство пар-ма и прав. тр-ка)

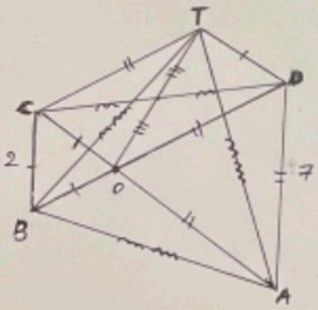
$OD = CT = AO$ (свойство пар-ма и прав. тр-ка)

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos 120$

$AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2 \cdot AD \cdot DT \cdot \cos 120$

$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2 \cdot BC \cdot CT \cdot \cos 120$

т.к. $AO = AD = CT$ и $OB = DT = BC \Rightarrow AB = BT = AT$ ■



б) $\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{\square ABCD}} = ?$

Из доказательства, $AB^2 = BC^2 + AD^2 - 2 \cdot BC \cdot AD \cdot \cos\angle AOB$

$AB^2 = 4 + 49 - 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \cos 120 = 4 + 49 - 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot -\frac{1}{2} = 4 + 49 + 14 = 67$

$S_{\triangle ABT} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ (свойство прав тр-ка)

$S_{\triangle ABT} = \dfrac{67\sqrt{3}}{4}$

$DB = AC = 2 + 7 = 9 = d$

$S_{\square ABCD} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot d \cdot \sin BOC$

$S_{\square ABCD} = \dfrac{81 \cdot \sin 60}{2} = \dfrac{81\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{\square ABCD}} = \frac{\frac{67\sqrt{3}}{4}}{\frac{81\sqrt{3}}{4}} = \frac{67\cancel{\sqrt{3}} \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times 81\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{67}{81}$$

Ответ: $\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{\square ABCD}} = \dfrac{67}{81}$