Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006654**

ID профиля: **175827**

Вариант 10

Черновик

$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + 12ax + y^2 = 0$

$(2\sqrt{2}x)^2 + y^2 -$

$(2x)^2 + y^2 \cancel{+} - 4xy$

$(k_1 x + k_2 y)^2 + (k_3 x + k_4 a)^2 + (k_5 y + k_6 a)^2 = 0$

$x = \frac{-k_4 a}{k_3}$ $\quad k_4^2 + k_6^2 = 5.$

$y = \frac{-k_6 a}{k_5.}$

$2,5 = 6,25$

$3,5 = 12,25$

$1,5 = 2,25.$

$\frac{-k_1 k_4}{k_3} +$

$\frac{4x^2 - 4xy + y^2}{4}$

$(2x-y)^2$

$x_B = a$

$y_B = -2a^3 + a^2 + a + \frac{3}{a}$

$2x - y - 5 = 0$

$2a + 2a^3 - a^2 - a - \frac{3}{a} - 5 =$

$(2a^3 - a^2 + a - \frac{3}{a} - 5 -)$

Черновик

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}$.

$\sqrt{x+3} = a$

$\sqrt{7-x} = b$ $a, b > 0$

$a^2+b^2 = x+3+7-x = \boxed{10}$

$a - b + 4 = 2ab$

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 14 + a - b.$

$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab = 10 - a + b - 4 = 6 - \underbrace{(a-b)}_{=k}$

$k^2 + k - 6 = 0$

$(\cancel{k\ \ })$

$(k+3)(k-2) = 0$

$a - b = k = -3; 2$ $a, b > 0$

$\cancel{a = b - 3}$ $b = a + 3;$ $b = a - 2$

$2ab = a - b + 4$

$2a(a+3) = a - (a+3) + 4 = 1$

$2a^2 + 6a - 1 = 0$

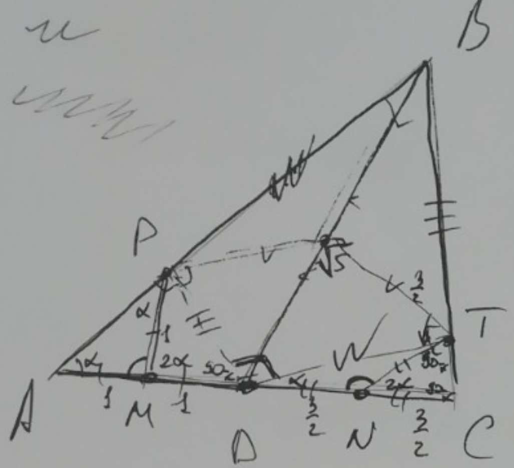
$D = 36$

211006654 (U175827 M1274108)

Черновик

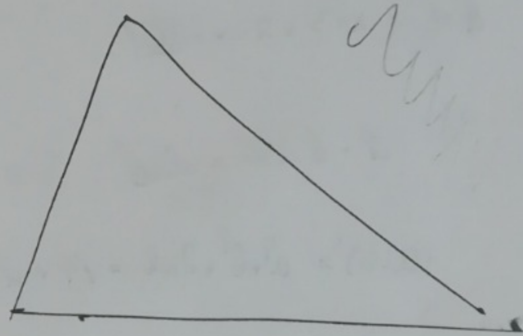
1) $\angle ABC$ - ?

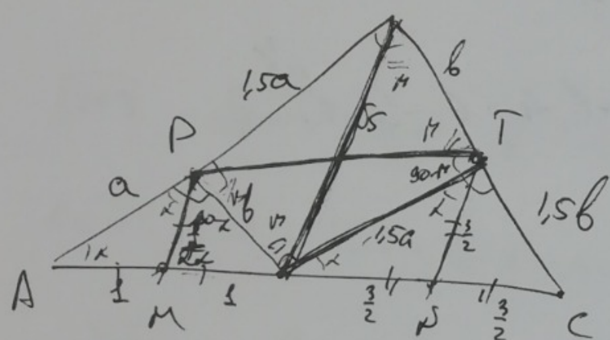
2) $MP = 1$, $NT = \frac{3}{2}$, $BD = \sqrt{5}$. S_{ABC} - ?



$\frac{3}{2}$

$\underbrace{\frac{11}{4} + \frac{9}{4}}_{5} - 1{,}5\sqrt{11}$





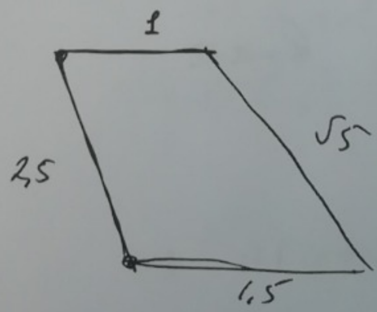
$\frac{2}{3} = \frac{a}{b}$

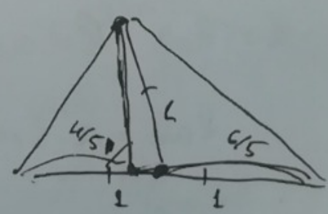
$b = \frac{3}{2}a$

$2/3$

$\sqrt{5} + \frac{5}{2}$

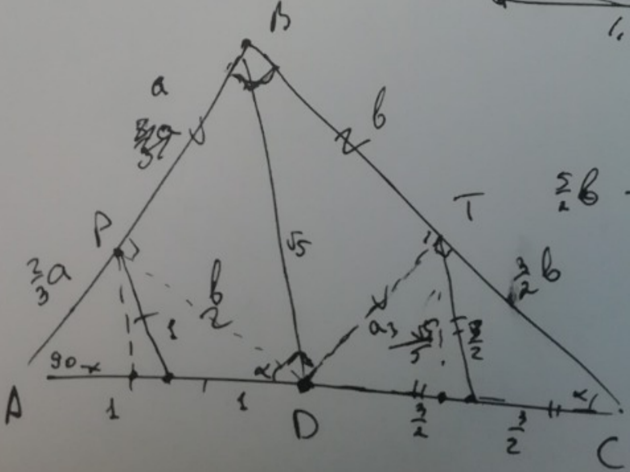
~~1,8~~ 2,5·2,5ab. 25





$-2 \cdot 5 \cos\beta$.

$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$



$\frac{5}{2}b - b$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$

3

$\frac{2}{3}$

211006654 (U175827 M1274108)

Черновик.

$a = \sqrt{x+3}$

$b = \sqrt{7-x}$

$a - b + 4 = 2ab.$

$x \in (-3; 7)$

$-7; 3$

$\frac{-6}{2} = -3$

$\frac{4}{2} = 2$

$7 - x \in \sqrt{0;10}$

$\frac{-1 \pm 5}{2}$

$1 + 24 = 25$

$(x+3) + (7-x) + 16 + 8a - 8b + 2ab = 4(ab)^2$

$(a-b)$

26

$(a-b)^2 + (a-b) = 6$

$b \quad -(a-b)$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2} = 2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}$

$2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} + \sqrt{7-x} - 4 = 0$

$(a-b)^2 = 10 - 2a + b - 4$

$(a-b)^2 = 6 - a + b$

$a^2 + b^2 = 10$

$2ab - a + b - 4 = 0$

$2ab - 2a + a + b - 4 = 2a(b-1) + a + b - 4$

$= (a+b)^2 = 10 + \sqrt{x+3} + \sqrt{7-x} + 4$

$=(2a+1)(b-1)$

$(a+b)^2 = 14 + \sqrt{x+3} + \sqrt{7-x}$

$2ab + 2b - a - b - 4$

$(a+b)^2 = 14 + a + b.$

$a(2b-1) + b - 4$

$\cancel{2}\sqrt{x+3}$

$\sqrt{x+3}(2\sqrt{7-x}$

-98

$(Ka-1)(lb+4)$

$(\sqrt{x+3} - \frac{1}{2})(2\sqrt{7-x} + 1) = 3,5$

$Kl = 2$

$(a+b)^2 = 14 + 2 = 14$

$4K = -1$

$14 - 3 = 11$

$-l = 1$

$l = 1$

$\pm\sqrt{14}$

$\pm\sqrt{11}$

211006654 (U175827 M1274108)

Черновик

$$\frac{\left(\frac{5}{3}a \cdot \frac{5}{2}b\right)}{2} - ?$$

$$\frac{\frac{25}{6}ab - ?}{2}$$

$S = \frac{25}{12}ab - ?$

$\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + b^2 = \frac{4}{9}a^2 + b^2 = 4$

$a^2 + b^2 = 5$

$1 = \frac{5}{9}a^2$

$\frac{9}{5} = a^2 \quad a = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$25 - 9 = 16$

$b = \sqrt{5 - a^2} = \sqrt{5 - \frac{9}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\frac{25}{12}ab = \frac{\cancel{25}}{\cancel{12}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{\cancel{5}} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{\cancel{5}} = 5 = S_{abc}$

$\cancel{\sqrt{x+3}} - \cancel{7x}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21 + 4x - x^2} = 2\sqrt{x+3}\sqrt{(x-7)} = 2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}$

$\begin{cases} x+3 > 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 7 \end{cases} \quad x \in (-3; 7)$

$21 + 4x - x^2 > 0$

$x^2 - 4x - 21 < 0$

$D = 16 + 84 = 100$

$(x+3)(x-7)$

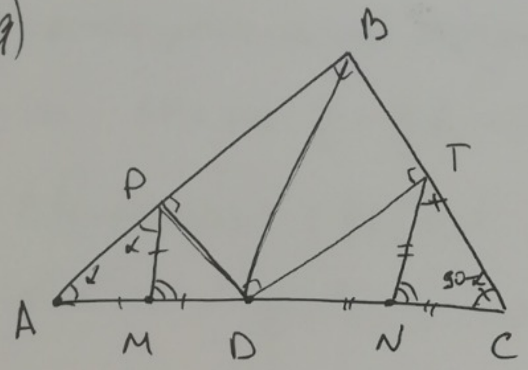
$x_1 = \frac{4-10}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

$x_2 = \frac{4+10}{2} = 7$

211006654 (U175827 M1274108)

№1

а)



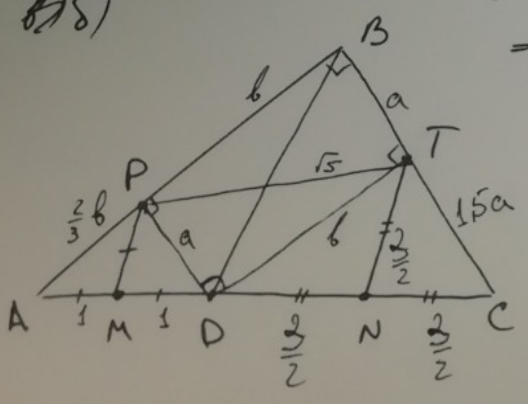
Т.к. P и T лежат на окружности с диаметром BD => $\angle DPB = \angle DTB = 90^\circ$, т.к. это вписанные углы, опирающиеся на диаметр => => PD и DT – перпендикуляры из D на AB и BC соответственно. Пусть $\angle BAD = \alpha$. =>

=> т.к. $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ у нас прямоугольные ($PD \perp AB$ и $DT \perp BC$) => => т.к. ещё и PM и TN – медианы => $PM = AM = MD$ и $TN = DN = NC$ по св-ву медианы из прямого угла! =>

=> $\triangle AMP$ р/б => $\angle APM = \angle PAM = \alpha$ => $\angle PMD = 2\alpha$ (внешний в $\triangle AMP$). т.к. $PM \parallel TN$ по условию => => $\angle TNC = \angle PMD = 2\alpha$, как соответственные, при $PM \parallel TN$ и секущей MN. Аналогично $\triangle AMD$ => ~~$\triangle DTC$ р/б~~ $\triangle TNC$ р/б, т.к. $TN = NC$ => по сумме углов треугольника: $\angle NTC = \angle NCT = 90^\circ - \alpha$. Рассмотрим $\triangle ABC$. $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^\circ - \alpha$ => => по сумме углов треугольника: $\angle B = 90^\circ$.

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

б)



в 4-хугольнике PBTD: $\angle B = \angle P = \angle T = 90^\circ$ => => по сумме углов 4-хугольника $\angle D = 90^\circ$ => PBTD – прямоугольник => => $PD = BT = a$, $PB = DT = b$. и диагонали в нём равны: $PT = BD = \sqrt{5}$. Т. Пифагора для $\triangle PBT$ ($\angle B = 90^\circ$): $a^2 + b^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$.

Заметим, что $DP \perp AB$ и $CB \perp AB \Rightarrow PD \parallel BC \Rightarrow$ по теореме о пропорциональных отрезках: $\frac{AP}{AD} = \frac{PB}{DC}$; $AD = 2MP = 2$; $DC = 2TN = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = PB \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}b$. Рассмотрим $\triangle APD$ ($\angle P = 90°$):

Т. Пифагора: $\left(\frac{2}{3}b\right)^2 + a^2 = \frac{4}{9}b^2 + a^2 = AD^2 = 2^2 = 4$. Мы знаем, что $a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow \frac{5}{9}b^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow a^2 = 5 - b^2 = 5 - \frac{3^2 \cdot 5}{25} = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. Аналогично рассуждая с прямыми AB и DT и отрезком TC. По теореме о пропорциональных отрезках:

$TC = BT \cdot \frac{DC}{AD} = a \cdot \frac{3}{2} = 1{,}5a$.

$S_{ABC} = AB \cdot BC / 2 = \frac{(AP+PB)(BT+TC)}{2} = \frac{\frac{5}{3}b \cdot 2{,}5a}{2} = \frac{25}{12}ab = \frac{25}{12} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} =$

$= 5$.

Ответ: $S_{ABC} = 5$.

Чистовик

№2

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2} = 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}$.

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3;7]$.

Пусть $a = \sqrt{x+3}$; $b = \sqrt{7-x} \Rightarrow a, b \geq 0$.

$\Downarrow$

$a - b + 4 = 2ab$.

1) $a^2 + b^2 = \underset{\geq 0}{(x+3)} + \underset{\geq 0}{(7-x)} = 10$.

2) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 10 + a - b + 4 = 14 + (a-b)$

3) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 10 - a + b - 4 = 6 - (a-b)$. Пусть $k = a - b \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 + k - 6 = 0$

$(k+3)(k-2) = 0$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} k+3=0 \\ k-2=0 \end{array}\right. \Rightarrow k = 2; -3$.

1. $k = 2$

$\Downarrow$

$(a+b)^2 = 14 + k = 16. \Rightarrow a + b = 4$, т.к. $a, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$.

$\Downarrow$

$\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow a = 3; b = 1. \Rightarrow \begin{cases} x+3 = a^2 = 9 \\ 7-x = b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 6 \end{cases}$ Сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = 6$ — решение! и $6 \in [-3;7]$.

2. $k = -3$

$\Downarrow$

$(a+b)^2 = 14 + k = 11 \Rightarrow$ т.к. $(a+b) \geq 0 \Rightarrow a + b = \sqrt{11}$.

$\Downarrow$

Чистовик

$$\begin{cases} a+b=\sqrt{11} \\ a-b=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{\sqrt{11}}{2}-1,5>0 \\ b=\frac{\sqrt{11}}{2}+1,5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3=a^2=\left(\frac{\sqrt{11}}{2}-1,5\right)^2 \\ \cancel{8+x}\ 7-x=b=\left(\frac{\sqrt{11}}{2}+1,5\right)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=5-1,5\sqrt{11} \\ 7-x=5+1,5\sqrt{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-1,5\sqrt{11} \\ x=2-1,5\sqrt{11} \end{cases}$$ сходится. Проверим на ОДЗ:

1) $2-1,5\sqrt{11} \vee -3$

$\Updownarrow$

$5 \vee 1,5\sqrt{11}$

$25 \vee \frac{9}{4}\cdot 11=\frac{99}{4}$

$\frac{100}{4}=25>\frac{99}{4} \Rightarrow 2-1,5\sqrt{11}>-3.$

2) $2-1,5\sqrt{11}<2<7 \Rightarrow$ $x=2-1,5\sqrt{11}$ подходит под ОДЗ

Ответ: $x=6;\ 2-1,5\sqrt{11}$.

211006654 (U175827 M1274108)

Чистовик

№3

Найдём координаты $(x_a; y_a)$ и $(x_B; y_B)$:

B: $ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$

$ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3$ / видно что $a \neq 0$ =>

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$

$x_B = \frac{-(-2a)}{2} = a$ => $y_B = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$ =>

=> $x_B = a$; $y_B = \frac{3}{a}$.

чтобы B и A лежали по одну сторону от прямой $2x - y = 5$, то должно выполнятся следующее условие:

$(2x_a - y_a - 5)(2x_B - y_B - 5) > 0$.

A: $5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$.

$4x^2 + 4xy + y = $ ...

Черновик

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$ay=ax^2-2a^2x+(a^3+3)$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

$x_в=\frac{2a}{2}=a$

$y_в=\cancel{a^2}-\cancel{2a^2}+\cancel{a^2}+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}=y_в.$

$2x-y+5=\left(2a-\frac{3}{a}+5\right)$

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$2\cdot\frac{1}{2}$ $2\cdot 1$ $6=1.6$ $2\cdot 3$

$\sqrt{2}/\frac{1}{\sqrt{2}}$ $2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

2 8, 1

$2:xy$

$ax:6$

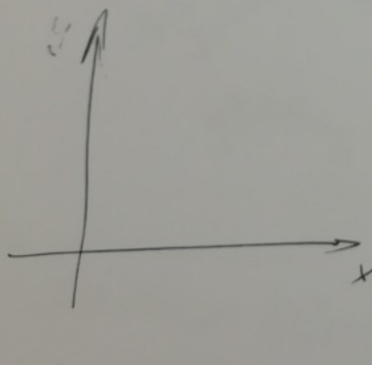
$ay:2$

робот

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

xy	ax	ay
2	6	2

$-4ay+5a^2+y^2=0$



y^2+5a^2-4ay

$2\sqrt{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$16a^2-20a^2$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ <1 <1 $\frac{4}{3}$

$8x^2+12ax+5a^2=0$

$2\sqrt{3}$

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ $>2.$ $<2\sqrt{2}$

$144-20\cdot 8$ 160

y

$\frac{9\cdot 2}{4}=\frac{9}{2}=4.5.$ 3,5 $\frac{7}{2}$ $\frac{\sqrt{18}}{2}$ $\leq 5\sqrt{3}$ $\leq 5\sqrt{2}$ $\frac{8}{9}$

$2\sqrt{3}$ $\frac{3\sqrt{8}}{2}$ $\frac{4}{3\sqrt{2}}>\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$2\sqrt{2}.$

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$8x^2+12ax$

$4x^2+4xy+y^2=(x-y)$

$\frac{1}{3}$ $\sqrt{3}$ $\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

211006654 (U175827 M1274108)

Черновик

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$ – A

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$ B-вершина.

A и B по одну сторону

$\boxed{2x-y=5}$

$-2a^2x-ay+a^3+3+ax^2=0$

$ax^2-2a^2x+a^2+3=ay$ $a\neq 0$

$x^2-2ax+\frac{a^2+3}{a}=y$

$\frac{-(-2a)}{2}=a=x_B$

$y_B=x_B^2-2ax_B+\frac{a^2+3}{a}=a^2-2a^3+\frac{a^2+3}{a}=\boxed{-2a^3+a^2+a+\frac{3}{a}}$

$8x^2+y^2+5a^2-4xy+12ax-4ay=0$ (2·2, 6·2, 2·2)

$\cancel{(4x^2+y^2-4xy)}+4x^2$

$\cancel{(2x-y)^2}$

2·3

2 2 6 $2\sqrt{2}$ · $\sqrt{5}$

K_x K_y K_a

$K_xK_y=-2$

$K_yK_a=-2$

$K_xK_a=6$

$K_x^2=\frac{-12}{-2}=6$

$K_x=\sqrt{6}=K_a$

$K_y=\frac{-2}{\sqrt{6}}=\frac{-2\sqrt{6}}{6}=\frac{-\sqrt{6}}{3}$

$K_a=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006654**

ID профиля: **175827**

Вариант 10

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Пусть $x^2=a; y^2=b \Rightarrow a,b \geq 0.$

$\Downarrow$

ОДЗ: $a+b = x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{6}{a+b} + ab = 10 \quad (1) \\ a^2+b^2+7ab = 81 \quad (2) \end{cases}$$

1) $\frac{6}{a+b} + ab = 10 \quad / \times (a+b) \neq 0$

$6 + ab(a+b) = 10(a+b).$

Пусть $k = a+b$, $t = ab$. т.к. $a,b \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$ и $t \geq 0$, но $k > 0$, т.к. $a+b \neq 0$ из ОДЗ $\Rightarrow$

$6 + kt = 10k$

$t = \frac{10k-6}{k} \quad / k \neq 0.$

2) $a^2+b^2+7ab = 81$

$\Updownarrow$

$(a+b)^2 + 5ab = 81$

$\Updownarrow$

$k^2 + 5t = 81$

$k^2+5t = k^2 + 5 \cdot \frac{10k-6}{k} = k^2 + \frac{50k-30}{k} = 81 \quad / \times k \neq 0$:

$k^3 + 50k - 30 = 81k$

$\Updownarrow$

$k^3 - 31k - 30 = 0$

$k^3 - 31k - 30 = k^3 - 6k^2 + 6k^2 - 36k + 5k - 30 = (k-6)(k^2+6k+5) =$

211006654 (U175827 M1274109)

$$= (k-6)(k+5)(k+1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} k-6=0 \\ k+5=0 \\ k+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=6 \\ k=-5 \\ k=-1 \end{array}\right. \text{ но } k>0 \Rightarrow k=6 \Rightarrow t=\frac{10k-6}{k}=$$

$$=\frac{10\cdot6-6}{6}=10-1=9.$$

$$\begin{cases} a+b=6 \\ ab=9 \end{cases} \Rightarrow b=6-a \Rightarrow ab=a(6-a)=6a-a^2=9$$

$$(a-3)^2=0 \Leftrightarrow a=3 \Rightarrow b=6-3=3.$$

$a=b=3$

$$\begin{array}{l} x^2=a=3 \\ y^2=b=3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\sqrt{3} \end{array} \quad (x;y)=(-\sqrt{3};-\sqrt{3});(-\sqrt{3};\sqrt{3});(\sqrt{3};-\sqrt{3});(\sqrt{3};\sqrt{3})$$

Проверка:

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{6}{3+3}+3\cdot3=10 \quad (+) \\ x^4+y^4+7x^2y^2=3^2+3^2+7\cdot3\cdot3=9+9+63=81 \quad (+) \end{cases}$$

Ответ: $(x;y)=(-\sqrt{3};-\sqrt{3}),(-\sqrt{3};\sqrt{3}),(\sqrt{3};-\sqrt{3}),(\sqrt{3};\sqrt{3})$.

~~№5~~

~~Рассмотрим внутренний квадрат 67×67, координаты узлов ~~которого~~ которого от 1 до 68 по каждой из осей. Мы можем выбирать любой узел из этого квадрата, любую пару узлов, подходящих под условие. т.к. сторона квадрата ⋮2 ⇒ главные диагонали не имеют целочисленной точки пересечения, т.к. диагонали задаются уравнениями $y=x$ и $y=69-x$,~~

~~а $\begin{cases} y=x \\ y=69-x \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{69}{2}=34{,}5 \notin \mathbb{Z}$.~~

№5

Рассмотрим внутренний квадрат 67×67, координаты по осям которого меняются от 1 до 68. Мы можем выбрать любой узел этого квадрата (не на границе изначального и внутри него), любую пару узлов подходящих под условие можно выбрать.

Т.к. сторона квадрата $67 ⋮̸ 2 \Rightarrow$ ~~за~~ главные диагонали не имеют целочисленную точку пересечения, т.к. диагонали задаются ~~прямыми~~ уравнениями $y = x$ и $y = 69 - x$, а

$$\begin{cases} y = x \\ y = 69 - x \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = y = \frac{69}{2} = 34{,}5 \notin \mathbb{Z}. \text{ - не узел.}$$

Главные диагонали задаются прямыми $y = x$ и $y = 69 - x$, потому что узлы $(1;1), (68;68) \in y = x$ и $(1;68), (68;1) \in y = 69 - x$, принадлежат этим прямым. Тогда всего на диагоналях $68 \cdot 2 = 136$ узлов. Посчитаем кол-во способов выбрать подходящую пару.

Занумеруем узлы пары 1 и 2. Первый узел всегда будет лежать на диагоналях - гарантирует выполнение условия, а второй узел мы должны выбрать так, чтобы он не лежал с первым в одной ~~д~~ вертикали или горизонтали.

Первый узел можно выбрать 136 способами. А второй:

Осталось $(68^2 - 1)$ узлов, из них $(68-1) \cdot 2$ - запретных, по $68 - 1 = 67$ в вертикали и горизонтали $\Rightarrow 68^2 - 1 - 2 \cdot (68 - 1) = 68 \cdot 66 + 1$ способов.

Итого: $136 \cdot (68 \cdot 66 + 1)$ способов. Но замечаем, что способы, когда оба узла лежат ~~в~~ на диагоналях, но не в одной вертикали или горизонтали мы посчитали дважды. Таких способов:

136 - кол-во способов выбрать 1 узел. $136 - 1 - 2 = 133$ способов выбрать второй (-1) - первый узел (-2) - два узла, по 1 в вертикали

и горизонтами => вычесть $\frac{136\cdot 133}{2}$, т.к. каждый способ считаем 2 раза.

Итого способов: $136\cdot(68\cdot 66+1)-136\cdot 133=$

$=136\cdot(68\cdot 66-132)=592416$

1) $\begin{array}{r} 68\\ \times\ 66\\ \hline 408\\ 408\ \\ \hline 4488 \end{array}$

2) $4488-132=4356$

3) $\begin{array}{r} 4356\\ \times\ 136\\ \hline 26136\\ +\ 13068\ \\ 4356\ \ \\ \hline 592416 \end{array}$

Ответ: 592416 способов.

Итого способов: $136\cdot(68\cdot 66+1)-\frac{136\cdot 133}{2}=$

$=68\cdot((68\cdot 66+1)\cdot 2-133)=601460$

1) $\begin{array}{r} 68\\ \times\ 66\\ \hline 408\\ 408\ \\ \hline 4488 \end{array}$

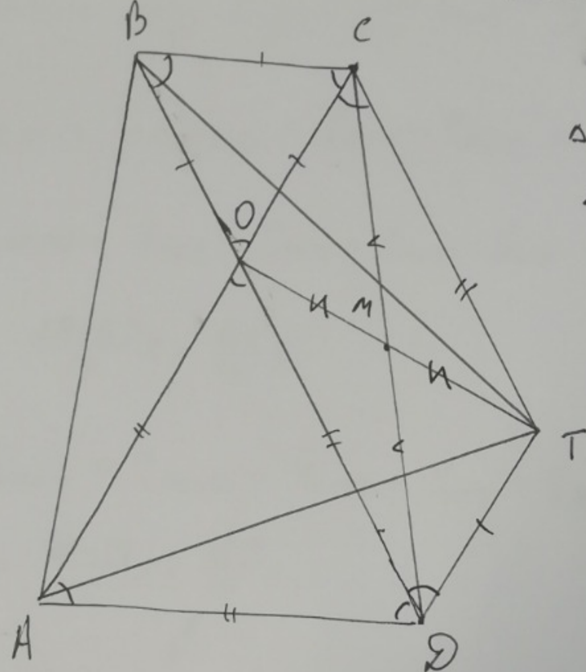
2) $4488+1=4489$

3) $4489\cdot 2=4490\cdot 2-2=4500\cdot 2-22=9000-22=8978$

4) $8978-133=8845$

5) $\begin{array}{r} 8845\\ \times\ 68\\ \hline +\ 70760\\ 53070\ \\ \hline 601460 \end{array}$

Ответ: 601460 способов.

а) 

M - середина CD.

$\triangle BOC$ - правильный $\Rightarrow \angle BOC = 60°$.

$\angle COD = 120°$ (смежный с $\angle BOC$).

T - симметрична O относительно M,

C - симметрична D относительно M,

т.к. M - середина $CD \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по свойству симметрии:

$CT = OD$, $OC = TD$ и $\angle CTD =$

$= \angle COD = 120°$ и $CT \parallel OD$ и $OC \parallel TD \Rightarrow$

$\Rightarrow OCTD$ - параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCT = 180° - \angle DOC = 60°$ (как внутр. односторонние, при $CT \parallel OD$ и секущей OC), аналогично $\angle ODT = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120° = \angle ODA + \angle ODT = \angle ADT$.

Тогда, заметим, что $\angle BOA = 120°$ (вертикальный $\angle COD$) и $TD = BC = CO = BO$, $OD = AD = AO = CT$. $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle BCT = \triangle ADT$ по 1 признаку равенства треугольников. Соответственные элементы равны в равных треугольниках $\Rightarrow AB = BT = TA \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный

Ч.Т.Д.

б) Мы доказали, что $\triangle BOA = \triangle BCT = \triangle ATD$. Пусть их площади равны S. $S_{CTD} = S$. Заметим, что $\triangle COD = \triangle CTD$ по 3 сторонам ($OC = TD$, $CT = OD$, CD - общая) $\Rightarrow S_{CTD} = S_{COD} = S$.

Рассмотрим $\triangle BOC$ и $\triangle COD$. C - общая вершина и основания BO и OD - лежат на одной прямой $\Rightarrow \frac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BOC} = \frac{2}{7} S_{COD} = \frac{2}{7} S$. Аналогично рассуждая с $\triangle AOD$ и $\triangle COD$:

$$S_{AOD} = \frac{AO}{OC} S_{COD} = \frac{AD}{BC} S_{COD} = \frac{7}{2} S.$$

$$S_{BAT} = S_{ABCTD} - S_{BCT} - S_{ADT} = S_{ABCD} + S_{CTD} - S_{BCT} - S_{ADT}.$$

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOD} + S_{COD} = S + \frac{2}{7}S + \frac{7}{2}S + S = 2S + \frac{4+49}{14}S = 2S + \frac{53}{14}S =$$

$$= \frac{28+53}{14}S = \frac{81}{14}S$$

$$S_{BAT} = S_{ABCD} + S_{CTD} - S_{BCT} - S_{ADT} = \frac{81}{14}S + S - S - S = \frac{81}{14}S - S =$$

$$= \frac{81-14}{14}S = \frac{67}{14}S$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{S_{BAT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{67}{14}S}{\frac{81}{14}S} = \frac{67}{81}.$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$.

Черновик

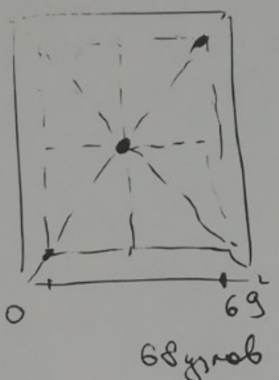
Главные диагонали задаются прямыми $y=x$ и $y=69-x$, потому что узлы $(1;1),(68;68) \in (y=x)$; $(1;68), (68;1) \in (y=69-x)$ принадлежат этим прямым. Тогда всего на диагоналях $68 \cdot 2 = 136$ узлов. Посчитаем кол-во способов выбрать подходящую пару. Занумеруем наши узлы (2шт) 1 и 2. Первый узел пусть всегда лежит на диагоналях — гарантирует выполнение условия, а второй мы должны выбрать такой, чтобы он не лежал с нашим в одной вертикали или горизонтали.

Первый узел можно выбрать 136 способами. А второй:

Осталось ~~68~~ ~~уз~~ (68^2-1) узлов, из них $(68-1)\cdot 2$ - запретных, по $(68-1=67)$ в вертикали и горизонтали первого узла =>

$$\Rightarrow 68^2-1 - 2\cdot(68-1) = 68^2 - 2\cdot 68+1 = 68\cdot 66+1 \text{ способов.}$$

Черновик



$(68-1)\cdot 2 = 67\cdot 2 = 120+14 = 134$

Способов: ~~134~~ (68^2-134)

$(68-1)\cdot 2 = 134 \cdot (68^2-134)$

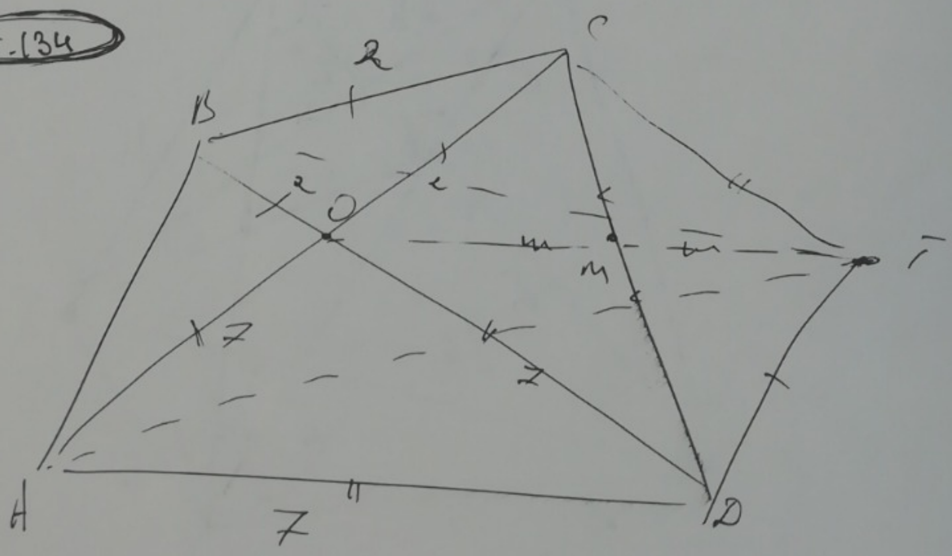
$135\cdot(68^2-134)$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 68 \\ \hline 544 \\ 408 \\ \hline 4624 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4624 \\ -\ 134 \\ \hline 4490 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4490 \\ \times 135 \\ \hline \end{array}$$

$$135 \qquad \begin{array}{r} 4490 \\ \times 135 \\ \hline 2245 \\ 1347 \\ 449 \\ \hline 606150 \end{array}$$

$\boxed{606150}$ -

135 · 134

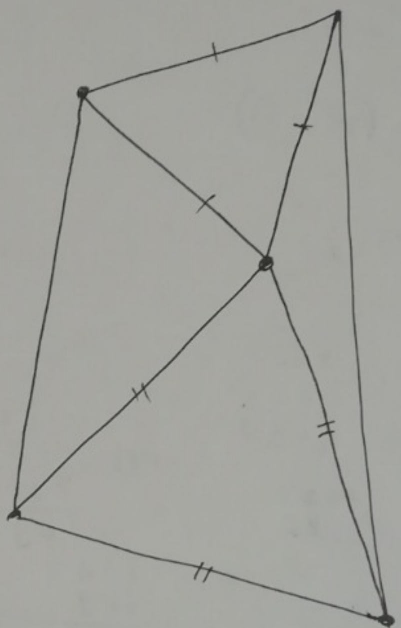


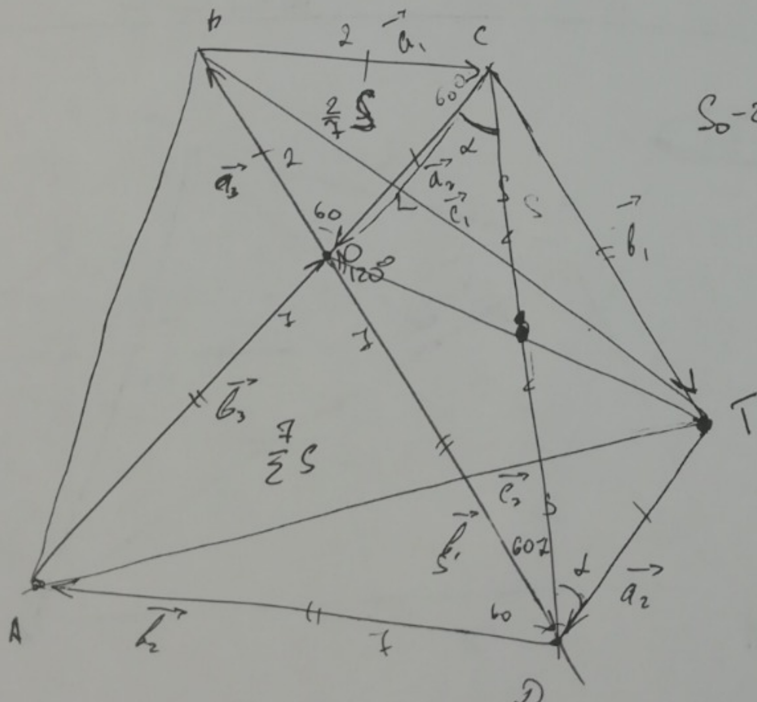
Черновик

$\vec{c_1} = \vec{a_1} + \vec{b_1}$

$\vec{c_2} = \vec{a_2} + \vec{b_2}$

$\vec{c_3} = \vec{a_3} + \vec{b_3}$





$S_0 - 2S = S_{ABCD}$

$\frac{2}{7}S + \frac{7}{2}S + 2S =$

$= \frac{4+49}{14}S = \frac{53}{14}S + 2S$

$\frac{\frac{53}{14}}{\frac{53+28}{14}} = \frac{53}{53+28} =$

$= \frac{53}{91}$

$51 = 70 - 21 = 7 \cdot 13$

40

211006654 (U175827 M1274109)

Черновик

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

$a=x^2 \geq 0$

$b=y^2 \geq 0$ ✓

$$\begin{cases} \frac{6}{a+b}+ab=10 \\ a^2+b^2+7ab=81 \end{cases}$$

$$6+ab(a+b)=10(a+b)$$

$$(a+b)^2+5ab=81$$

$k=a+b$
$t=ab$

$$\begin{cases} 6+kt=10k \\ k^2+5t=81 \end{cases}$$

$1 \Rightarrow 6=k(10-t)$ $\quad 10-t\neq 0 \Rightarrow k=\frac{6}{10-t}$

$$\frac{6^2}{(10-t)^2}+5t=81 \geq 2\sqrt{\frac{6^2}{(10-t)^2}\cdot 5t}$$

$t=7$: $\frac{6^2}{3^2}=4+35$

$t=8$: $40+\frac{36}{4}=49$

$$36+5t(10-t)^2=81(10-t)^2$$

$81 \cdot 20 = 1620$

$$36+5t(t^2-20t+100)=81(t^2-20t+100)$$

$2\cdot\frac{6}{10-t}$

$$5t^3-100t^2+500t+36=81t^2-2620t+8100$$

$\frac{12}{10-t}\cdot\sqrt{5t}\leq 81$

$$5t^3-181t^2+2120t-8064=0$$

$$t=\frac{10k-6}{k}$$

$216-41\cdot6-30=216-246-30$

$6^3=36\cdot6=180+36=216$

$$k^2+\frac{50k-30}{k}=81$$

~~125-30=12~~

$$k^3+50k-30=81k$$

$k=$

$$k^3-41k-30=0$$

211006654 (U175827 M1274109)

Черновик:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

$x^2=a\geq0$

$y^2=b\geq0$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a+b}+ab=10 \\ a^2+b^2+7ab=(a+b)^2+5ab=81 \end{cases}$$

$6+ab(a+b)=10(a+b)$

$a+b=k\geq0$

$ab=t\geq0$

$(a+b)^2+5ab=81$

$6+kt=10k \quad | \quad t=\dfrac{10k-6}{k}$

$k^2+5t=81$

$k^2+\dfrac{50k-30}{k}=81$

$k^3+50k-30=81k$

$k^3-31k-30=0$

$k=5:$

$k=6$

$125-155-30<0$

$216-186-30=0$

$k^3-6k^2+6k^2-36k+5k-30=$

$=(k-6)(k^2+6k+5)=(k-6)(k+5)(k+1)=0$

$k>0$

$\left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=-5 \\ k=6 \end{array}\right. \Rightarrow a+b=k=6 \Rightarrow t=\dfrac{10k-6}{k}=\dfrac{10\cdot6-6}{6}=\underline{\underline{9.}}$ $=(x;y)=\sqrt{3},\sqrt{3}$

$a+b=6$

$ab=9$

$a=6-b$

$6b-b^2=9 \quad b^2-6b+9=0$

$(b-3)^2=0 \quad b=3 \Rightarrow a=3$

$a=b=3$

$x^2=3$

$y^2=3$

211006654 (U175827 M1274109)