Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

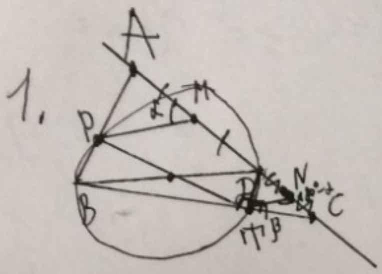
Шифр: **211006572**

ID профиля: **339804**

Вариант 10

Вариант 10 Математика 10 кл.

~~Черновик~~ Чистовик

1. 

$AM=MD$, $DN=NC$

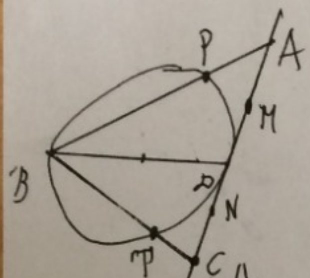
$PM \parallel TN$

а) $\angle ABC$ – ?

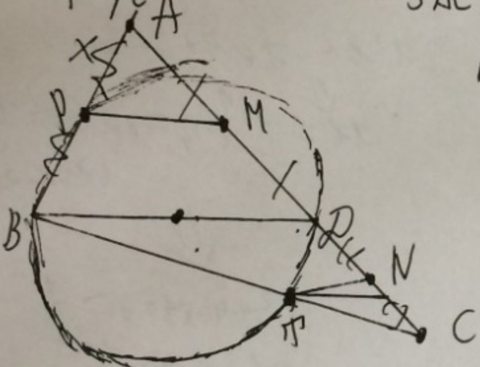
б) $MD=1$, $NT=\frac{3}{2}$

$BD=\sqrt{5}$

$S_{\triangle}ABC$ – ?



$\frac{S\triangle CTN}{S\triangle CBD} =$



т. к. $AM=MD$ и $AP=PB$

$\frac{k}{k} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

а) $\angle ABC=90°$ т. к. PT – диам, а $\angle PBT = \angle ABC$ опирается на него $\Rightarrow \angle ABC=90°$.

б) $\triangle CTN \sim \triangle CBD$, $\triangle APM \sim \triangle ABD$. Из подобия находим стороны AB и BC и затем $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$

1

Ответ: $\angle ABC=90°$

Чистовик

$2.\ \sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

ОДЗ:
$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 7-x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-3;7]$

Замена.

$\sqrt{x+3}=a$

$\sqrt{7-x}=b$

$a-b+4=2ab$

$a-b=2ab-4$

1°) случай: $\begin{cases} a\geq b \\ ab\geq 2 \end{cases}$

Возводим в квадрат:

$a^2-2ab+b^2=4a^2b^2-16ab+16$

$a^2+b^2=4a^2b^2-14ab+16$

$\cancel{x}+3+7-\cancel{x}=4a^2b^2-14ab+16$

$4a^2b^2-14ab+6=0$

$2a^2b^2-7ab+3=0$

Замена: $ab=t \quad t\geq 2$

$2t^2-7t+3=0$

$\Downarrow \quad t\geq 2$

$D=49-24=25$

$t=3;\frac{1}{2}\Rightarrow t=3\Rightarrow ab=3$

$\Downarrow$

$\sqrt{-x^2+4x+21}=3$

$x^2-4x-12=0$

$x=6;-2$

Подставим x: 1) $\left[\begin{matrix} a=3 \\ b=1 \end{matrix}\right.$ 2) $\left[\begin{matrix} a=1 \\ b=3 \end{matrix}\right. \Rightarrow x=6$ - корень $(a\geq b)$

2°) случай: $\begin{cases} a<b \\ ab<2 \end{cases}$

Аналогично возводим в квадрат, получаем в итоге:

$-x^2+4x+21=\frac{1}{4}$

$x^2-4x-\frac{83}{4}=0$

$D_1=4+\frac{83}{4}=\frac{99}{4}$

$x=\frac{2\pm\sqrt{\frac{99}{4}}}{1}=$

$=2\pm\frac{3}{2}\sqrt{11} \quad \left(\sqrt{\frac{99}{4}}\approx 5\right)$

Подставим x: 1) $\left[\begin{matrix} a\approx\sqrt{10} \\ b=0 \end{matrix}\right.$ 2) $\left[\begin{matrix} a=0 \\ b=\sqrt{10} \end{matrix}\right.$

$\Downarrow$

$x=2-\sqrt{\frac{99}{4}}$ - корень

2

Ответ: $6;\ 2-\frac{3}{2}\sqrt{11}$

~~Черновик~~ Чистовик

3. $A = 5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$

$\cancel{y}\ ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$

$ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3 = ay$

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a} \quad a \neq 0$

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2a}{2} = a \Rightarrow y_0 = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a} \Rightarrow B\left(a; \frac{3}{a}\right)$

$2x - y = 5$

$y = 2x - 5$

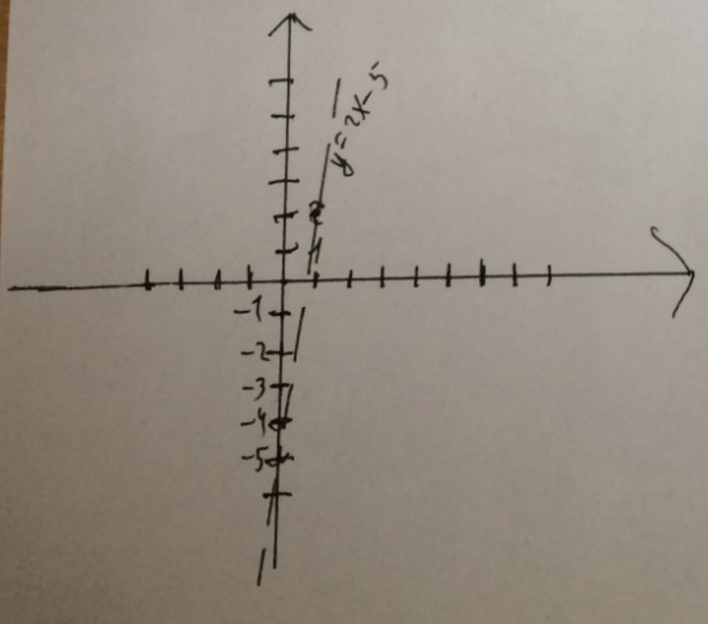
$y(y - 4a - 4x) = -8x^2 - 12ax - 5a^2$

$y =$

$8x^2 + 12ax + 5a^2 + y^2 - 4ay - 4xy$

$(3x - 2a)^2 - x^2 + (2y - a)^2 - 3y^2 + (x - 2y)^2 - x^2 - 4y^2 = 0$

$$\begin{cases} \frac{-8x^2 - 12ax - 5a^2}{y - 4a - 4x} < 2x - 5 \\ x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a} < 2x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3 - 2ax + 5a < 0 \\ \end{cases}$$



3

Черновик

2. $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

ОДЗ
$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 7-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x\leq 7 \end{cases}$
$\Downarrow$
$x\in[-3;7]$

$\sqrt{x+3}=a$
$\sqrt{7-x}=b$

$a-b+4=2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$a-b+4=2ab$

$\cancel{b(2a+1)=a+4}$
$\cancel{b=\frac{a+4}{2a+1}}$

1°) $a-b=2ab-4$ $\quad a\geq b$
$ab\geq 2$

$a^2-2ab+b^2=4a^2b^2-16ab+16$

$a^2+b^2=4a^2b^2-14ab+16$

$\cancel{x}+3+7-\cancel{x}=4(x+3)(7-x)+16-14ab$

$-3=2(x+3)(7-x)-7ab$

$2a^2b^2-7ab+3=0$

$ab=t \qquad t\geq 2$

$D=49-24=25$

$t=\frac{7\pm 5}{4}=3;\frac{1}{2}\Rightarrow t=3\Rightarrow ab=3$

$\Downarrow$

$\sqrt{-x^2+4x+21}=3$

$-x^2+4x+21=9$

$x^2-4x-12=0$

$x=6;-2$

Подставим x: 1) $\left[\begin{array}{l} a=3 \\ b=1 \end{array}\right.$ 2) $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow x=6$ (по усл. $a\geq b$)

2°) $a-b=2ab-4$ $\quad a\leq b$
$ab<2$

$2a^2b^2-7ab+3=0$
$\Downarrow$
$ab=3;\frac{1}{2};\Rightarrow ab=\frac{1}{2}$
$(ab<2)$

$\Downarrow$

$-x^2+4x+21=\frac{1}{4}$

$x^2-4x+\frac{1}{4}-21=0$

$x^2-4x-\frac{83}{4}=0$

$D_1=4+\frac{83}{4}=\frac{99}{4}$

$x=\frac{\cancel{4}^{2}\pm\sqrt{\frac{99}{4}}}{1}=$

$=2\pm\sqrt{\frac{99}{4}}=2\pm\frac{3}{2}\sqrt{11}$

$\left(\sqrt{\frac{99}{4}}\approx 5\right)$ $\quad\Downarrow$

Подставим x: 1) $\left[\begin{array}{l} a\approx\sqrt{10} \\ b\approx 0 \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b\approx\sqrt{10} \end{array}\right.$

$\Downarrow$

$x=2-\frac{3}{2}\sqrt{11}$

Ответ: $x=6;2-\frac{3}{2}\sqrt{11}$

Черновик:

3. $5a^2-4a(2x-5)+8x^2-4x(2x-5)+(2x-5)^2+12ax=0$

$5a^2-8ax+20a+\cancel{8x^2}-\cancel{8x^2}+\cancel{20x}+4x^2-\cancel{20x}+25+12ax=0$

$5a^2+4ax+20a+4x^2+25=0$

$5a(a+4)+4x(a+x)+25=0$

$4x^2+4ax$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006572**

ID профиля: **339804**

Вариант 10

Вариант 10

Чистовик

4. $\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$

Замена: $x^2+y^2 = a,\ a \neq 0$

$x^2y^2 = b,\ b \geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{a} + b = 10 \\ (x^2+y^2)^2 = 81 - 5x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{a} + b = 10 \\ a^2+5b = 81 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 5b = 81 \\ \dfrac{6}{a} + b = 10 \ |\cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} a^2+5b = 81 \\ \dfrac{30}{a} + 5b = 50 \end{cases}$

$a^2 - \dfrac{30}{a} = 31 \ |\cdot a,\ a \neq 0$

$a^3 - 31a - 30 = 0$

Исп-ем схему Горнера

a	1	0	−31	−30
−1	1	−1	−30	0

$\Rightarrow a = -1$ – корень $\Rightarrow a^2 - a - 30 = 0$

$\Downarrow$

$a = 6;\ -5$ (по т. Виета)

$\Downarrow$

$a = 6\ (a > 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{6}{6} + b = 10 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 6 \\ x^2y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{y^2} + y^2 = 6 \\ x^2 = \dfrac{9}{y^2} \end{cases} \Rightarrow y^4 - 6y^2 + 9 = 0\ (y \neq 0)$

$\Downarrow$

$(y^2-3)^2 = 0$

$\Downarrow$

$y^2 = 3$

$\Downarrow$

$y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{9}{3} = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Ответ: $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$ $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ или

или $(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3})$

1

Чистовик

5. Заметим, что прямые $y = x$ и $y = -x + 69$ — диагонали данного квадрата т. к. сторона квадрата равна 69 ($a = 69$), то кол-во точек, которое мы можем использовать, равно: $68 \cdot 68 = 4624$ — общее кол-во точек.

На одной диагонали помещается 68 точек $(69 - 1)$ и на второй тоже, т. к $a = 69$ — нечетное число (точка пересечения диагоналей будет в центре квадрата) $\Rightarrow$ для первой точки у нас: $68 + 68 = 136$ вариантов расположения.

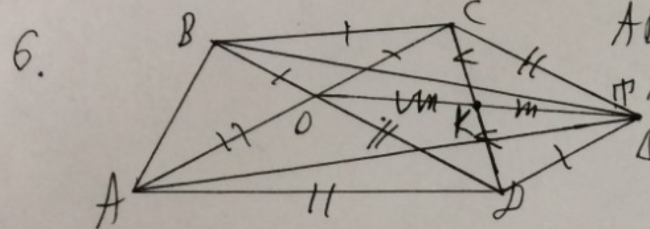
Когда мы поставим первую(ый) точку (узел), у нас останется: $4624 - (68 + 68 - 1) = 4624 - 135 = 4489$ вариантов для второй точки $\Rightarrow$ кол-во способов $= 136 \cdot 4489 = 610504$ способов(а)

2

Ответ: 610504

Чистовик

6.



$ABCD$ — выпуклый чет-ик

$AC \cap BD = O$

ΔBOC и ΔAOD — пр-ые

$OK = KT$

$CK = KD$

Д-ать:

ΔABT — правильный

б) $BC = 2$; $AD = 7$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ — ?

1) $OCTD$ — пар-мм т.к. $CK = KD$, $OK = KT$ (по усл) $\Rightarrow \angle COD = 180° - \angle BOC =$
$= 120° \Rightarrow \angle OCT = 60°$ Пусть $BC = x$, а

т.к $OCTD$ — пар-мм, значит $OC = DT$ и $OD = CT$

$AD = y$, тогда $BO = OC = BC = DT = x$, $AO = OD = AD = CT = y \Rightarrow$

$\angle COD$ (верт) $= 120° \Rightarrow AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot$

$\Rightarrow$ 2) ∡ ΔABO $\angle AOB =$

$\cdot \cos 120°$

по т. косинусов $x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 120° = BT^2$ ($\angle BCO = 60°$,

3) ∡ ΔBCT:

$, \angle OCT = 60°$)

$x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 120° = AT^2$ ($\angle ADO = 60°$, $\angle ODT = 60°$) $\Rightarrow$

по т. косинусов

4) ∡ ΔADT:

$AB^2 = BT^2 = AT^2 \Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \Delta ABT$ — правильный

$\Rightarrow$ 5) $AB^2 = BT^2 = 4 + 49 + 2 \cdot 7 = 53 + 14 = 67 \Rightarrow S_{ABT} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

б) $S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $a^2 = BT^2$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$, $d_1 = d_2 = d = 2 + 7 = 9 \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{81}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3}}{4} : \frac{81\sqrt{3}}{4} = \frac{67\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{81\sqrt{3}} = \frac{67}{81}$

3

Ответ: $\frac{67}{81}$

211006572 (U339804 M1275211)

Черновик

4. $\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \end{cases}$

Замена:

$x^2 + y^2 = a$, $a \geq 0$

$x^2y^2 = b$ $\quad b \geq 0$

$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \\ (x^2+y^2)^2 = 81 - 5x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \\ a^2 + 5b = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 5b = 81 \\ \frac{6}{a} + b = 10 \quad |\cdot 5 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 + 5b = 81 \\ \frac{30}{a} + 5b = 50 \end{cases} -$

$a^2 - \frac{30}{a} = 31 \quad |\cdot a \quad a \neq 0$

$a^3 - 31a - 30 = 0$

$6 + ab = 10a$

$a(b-10) = -6$

$a = -\frac{6}{b-10}$

Исп. схему Горнера

	1	0	-31	-30
-1	1	-1	-30	0

$\Rightarrow a = -1$ - корень

$\Downarrow$

$a^2 - a - 30 = 0$

$\Downarrow$

$a = 6; -5$ (по т. Виета)

$\Downarrow$

$a = 6; \cancel{b} -5; -1 \Rightarrow a = 6$ (по ~~от~~ условию $a > 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6}{6} + b = 10 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ x^2y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9}{y^2} \\ \frac{9}{y^2} + y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow y^4 - 6y^2 + 9 = 0 \Rightarrow (y^2-3)^2 = 0$

$\cancel{y^2 = 6\pm}$

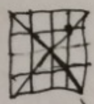
$\Downarrow$

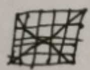
$y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Ответ: $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$ $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

5. Заметим, что прямые $y = x$ и $y = -x+69$ — диагонали данного квадрата





т.к сторона квадрата − 69 ($a = 69$), то кол-во точек − 70 − на одной стороне. Общее кол-во точек, которое мы можем исп-ть − $68 \cdot 68 =$

$$
\begin{array}{r}
\times\ 68 \\
68 \\
\hline
544 \\
408\ \\
\hline
4624
\end{array}
$$

На одной диагонали помещается 68 точек (69−1) и на второй тоже, т.к $a = 69$ − нечетное число (точка пересечения будет в центре квадрата) $\Rightarrow$ для первой точки у нас: $68+68 = 136$ вариантов расположения

$$
\begin{array}{r}
-\ 4624 \\
135 \\
\hline
4489
\end{array}
$$

Когда мы поставим первую точку (узел), у нас останется: $4624-(68+68-1) = 4624 - 135 = 4489 \Rightarrow$

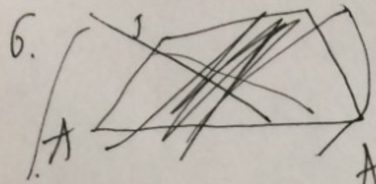
$$
\begin{array}{r}
\times\ 4489 \\
136 \\
\hline
26934 \\
+\ 13467\ \\
4489\ \ \\
\hline
610504
\end{array}
$$

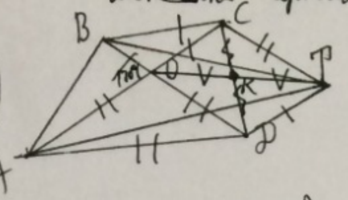
$\Rightarrow$ кол-во способов = варианты расп-ия 1 точки · варианты расп-ия 2 точки $= 4489 \cdot 136 = 610504$

Ответ: 610504

~~Чистовик~~ Черновик

6.





$ABCD$ — вып-ый чет-ик

$BD \cap AC = O$

ΔBOC и ΔAOD — прав-ые

$TK = KO$

$CK = KD$

Д-ть: ΔABT — правильный

б) $BC = 2$; $AD = 7$

$\frac{S_{\Delta ABT}}{S_{ABCD}}$ — ?

$\Delta AOB = \Delta COD$ по I пр $\Rightarrow AB = CD$

$CODT$ — ~~пар-мм~~ р-ик т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow CD \perp OT$

$\parallel$

$BD \perp AC$

б) $S_{\Delta ABT} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

т.к. ΔABT — правильный $\Rightarrow AB = BT = a$

по т. косинусов $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos 150^\circ = BC^2 + CT^2 + \sqrt{3} \cdot BC \cdot CT$

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow$

$CT = OD = AO = AD = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow BT^2 = 4 + 49 + \sqrt{3} \cdot 2 \cdot 7 = 53 + 14\sqrt{3} = a^2 \Rightarrow S_{ABT} = \frac{(53 + 14\sqrt{3})\sqrt{3}}{4} = \frac{53\sqrt{3} + 42}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$ ($d_1 \perp d_2 \Rightarrow \sin 90^\circ = 1$)

$BD = AC = d_1 = d_2 = d \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot d^2$ $d = BO + OD = 2 + 7 = 9 \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{81}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{53\sqrt{3} + 42}{4} : \frac{81}{2} = \frac{53\sqrt{3} + 42}{4_2} \cdot \frac{2}{81} = \frac{53\sqrt{3} + 42}{162}$

Ответ: б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{53\sqrt{3} + 42}{162}$