Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006556**

ID профиля: **161269**

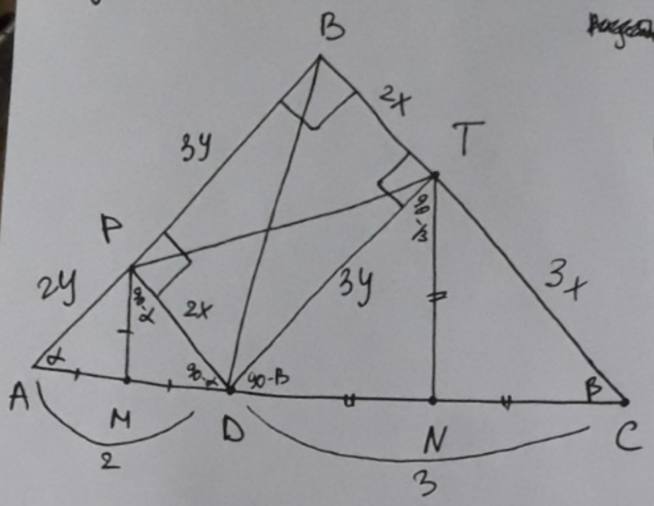
Вариант 10

Чистовик.

Задача №1.

~~Ответ~~ Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$

б) $S_{ABC} = 5$.



Решение:

PBTD - вписанный четырехуг. и BD - диаметр $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$

Пусть $\angle BAC = \alpha$ и $\angle BCA = \beta$.

$\Downarrow$

$\angle PDA = 180 - \angle APD - \angle PAD = 90 - \alpha$

и

$\angle TDC = 180 - \angle DTC - \angle TCD = 90 - \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PDT = 180 - \angle PDA - \angle TDC = \alpha + \beta. \Rightarrow \angle DPT + \angle PTD = 180 - \angle PDT = 180 - \alpha - \beta$

$\triangle APD$ - прямоугольный $\angle APD = 90^\circ$ и PM - медиана $\Rightarrow PM = \frac{1}{2}AD = AM = MD$.

Аналогично для $\triangle DTC \Rightarrow TN = \frac{1}{2}DC = DN = NC$

$MP = MD \Rightarrow \angle MPD = \angle MDP = 90 - \alpha$ и $TN = DN \Rightarrow \angle DTN = \angle TDN = 90 - \beta$

$PM \parallel TN$ по условию $\Rightarrow \angle MPT + \angle MNT = 180^\circ$

$\Updownarrow$

$\angle MPD + (\angle DPT + \angle PTD) + \angle DTN = (90-\alpha) + (180 - \alpha - \beta) + 90 - \beta = 180$

$\Updownarrow$

$2(180 - \alpha - \beta) = 180$

$\Updownarrow$

$\alpha + \beta = 90 \Rightarrow \angle ABC = 180 - \angle A - \angle C =$

$= 180 - \alpha - \beta = 90^\circ$.

Доказано, что $\angle ABC = 90^\circ$. (Пункт а)

Пункт б. $MP = 1$ $NT = 3/2$ $BD = \sqrt{5}$.

$MP = 1 \Rightarrow AD = 2MP = 2$ и $NT = \frac{3}{2} \Rightarrow DC = 2TN = 3. \Rightarrow AC = 5$.

$\angle APD = 90^\circ$ и $\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow PD \parallel BC$ получается $\triangle ADD \sim \triangle ABC$ (по углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{PD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5}$. Пусть $PD = 2x \Rightarrow BC = 5x$, т.к. $\frac{PD}{BC} = \frac{2}{5}$.

Все углы четырехугольника PBTD равны $90^\circ \Rightarrow$ PBTD - прямоугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow BP = TD$ и $BT = PD$.

$PD = BT = 2x \Rightarrow TC = BC - BT = 5x - 2x = 3x$.

1

Чистовик.

3

Задача №2.

Ответ: $x_1 = 2+\sqrt{22}$ и $x_2 = 2-\frac{\sqrt{99}}{2}$.

Решение:

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$ $\quad$ $\sqrt{x+3} \Rightarrow x+3 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -3.}$

$\sqrt{7-x} \Rightarrow 7-x \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \leq 7}$

Заметим, что $21+4x-x^2 = (x+3)(7-x)$.

$\Downarrow$

дано $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$.

Пусть $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = a$.

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 = x+3+7-x-2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} \Rightarrow$

$2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 10 - (\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 = 10 - a^2$

Получается $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)} \Leftrightarrow a+4 = 10-a^2 \Rightarrow$

$a^2+a-6=0$. $D = 1+24 = 25$ $a_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ $a_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$.

1) Пусть $a=2$. $\Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2 \Rightarrow \sqrt{x+3} > \sqrt{7-x}$

$\Updownarrow$

$x+3 > 7-x$

$\Updownarrow$

$2x > 4$

$\Updownarrow$

$\boxed{x > 2}$

~~Возводим в квадрат~~

Мы знаем, что $2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 10-a^2$.

$\Downarrow$ $\underline{a=2.}$

$2\left(\sqrt{(x+3)(7-x)}\right) = 10-4 = 6. \Rightarrow \sqrt{(x+3)(7-x)} = 3 \underset{\text{т.к. } x+3>0 \text{ и } 7-x>0}{\Leftrightarrow} (x+3)(7-x) = 9. \Rightarrow$

$21+4x-x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2-4x-18=0$. $D = 16+18\cdot 4 = 16+72 = 88 = 4\cdot 22$.

$x_1 = \frac{4+2\sqrt{22}}{2} = 2+\sqrt{22}$ и $x_2 = \frac{4-2\sqrt{22}}{2} = 2-\sqrt{22}$. Но $x_2 < 2 \Rightarrow x_2$ - не подходит.

А $x_1 = 2+\sqrt{22}$ подходит, т.к. $x_1 > 2$, $\underset{\text{т.к. } \sqrt{22}<5}{x_1 \leq 7}$ и $\underset{\text{т.к. } x_1>0}{x_1 \geq -3}$.

2) Пусть $a=-3$. $\Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = -3 \Rightarrow \sqrt{x+3} < \sqrt{7-x} \Leftrightarrow x+3 < 7-x \Leftrightarrow$

$2x < 4 \Leftrightarrow$

Мы знаем, что $2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 10-a^2 \overset{a=-3}{\Rightarrow} 2\left(\sqrt{(x+3)(7-x)}\right) = 10-9 = 1$ $\quad \Leftrightarrow \boxed{x<2}$

Получается $\sqrt{(x+3)(7-x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+3)(7-x) = \frac{1}{4}$ (т.к. $x+3>0$ и $7-x>0$) $\Leftrightarrow$

$21+4x-x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 84+16x-4x^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2-16x-83=0$. $D = 16^2+83\cdot 16 = 16\cdot 99$

$x_3 = \frac{16+4\sqrt{99}}{8} = 2+\frac{\sqrt{99}}{2}$ и $x_4 = \frac{16-4\sqrt{99}}{8} = 2-\frac{\sqrt{99}}{2}$. Но x_3 не подходит, т.к. $x_3 > 2$,

а должно быть <2. А x_4 подходит, т.к. $x_4 = 2-\frac{\sqrt{99}}{2} < 2$ и $x_4 < 7$, а также

$x_4 = 2-\frac{\sqrt{99}}{2} > 2-\frac{\sqrt{100}}{2} = -3$. Что и нужно было. Значит всего 2 решения

этого уравнения $x_1 = 2+\sqrt{22}$ и $x_2 = 2-\frac{\sqrt{99}}{2}$.

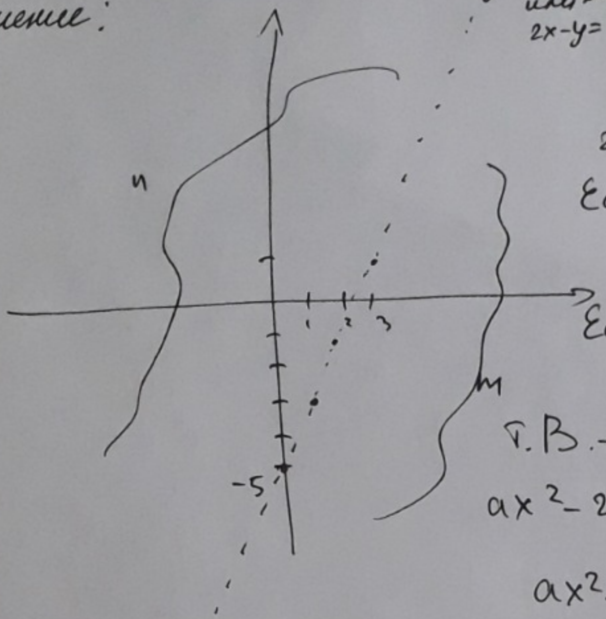
Чистовик.

4

Задача №3.

Ответ:

Решение:



Прямая $y = 2x - 5$ делит плоскость на 2 полуплоскости n и m.

Если т. A и т. B. в n, то $y > 2x - 5$ при $\forall x$.

Если т. A и т. B в m, то $y < 2x - 5$ при $\forall x$.

т. B. – вершина параболы.

$$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3 = ay \qquad \boxed{/a} \qquad \boxed{a \neq 0, \text{ т.к. иначе } 0+3=0 \text{ плохо}}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a} = y. \quad \text{т. B} - x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Тогда $x_0 = \frac{-(-2a)}{2} = a$ по условию ~~ход~~

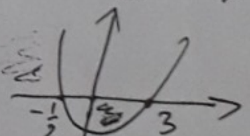
1) Пусть т. A и т. B в n. $\Rightarrow$ $y > 2x - 5$.

$\Rightarrow$ для т. B. $2x_0 - 5 < y_0 \Rightarrow x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + \frac{3}{a} > 2x_0 - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} > 2a - 5. \Leftrightarrow \frac{3}{a} > 2a - 5.$

① Пусть $a > 0$. $\Rightarrow \frac{3}{a} > 2a - 5 \Leftrightarrow 3 > 2a^2 - 5a \Leftrightarrow 2a^2 - 5a - 3 < 0.$

$D = 25 + 24 = 49 \quad a_1 = \frac{5+7}{4} = 3 \quad a_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}.$



$\Rightarrow a \in (0; 3)$ подходит.

② Пусть $a < 0 \Rightarrow \frac{3}{a} > 2a - 5 \Leftrightarrow 3 < 2a^2 - 5a \Leftrightarrow 2a^2 - 5a - 3 > 0.$

$D = 49 \quad a_1 = 3 \quad a_2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{1}{2})$ подходит.

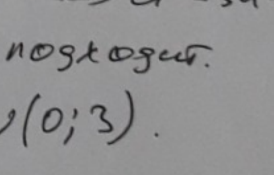
Получается если т. B в n, то $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; 3)$.

2) Пусть т. A и т. B в m. $\Rightarrow y < 2x - 5$.

$\Rightarrow$ для т. B $2x_0 - 5 > y_0 \Rightarrow x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + \frac{3}{a} < 2x_0 - 5 \Leftrightarrow \frac{3}{a} < 2a - 5.$

① Пусть $a > 0$. $\Rightarrow$ Аналогично как и для 1 случая.

$\underline{2a^2 - 5a - 3 > 0}$



$\Rightarrow a \in (3; +\infty)$.

② Пусть $a < 0 \Rightarrow$ как и для 1 сл.

$2a^2 - 5a - 3 < 0 \quad \Rightarrow a \in (-\frac{1}{2}; 0)$.

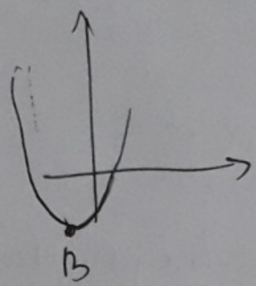
Значит если т. B в m, то $a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (3; +\infty)$.

Черновик

$\cancel{a x^2 - 2a^2 x - ac}$

$x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a} = y.$

$\frac{-b}{2a}.$



$x_0 = \frac{2a}{2} = \boxed{a.}$

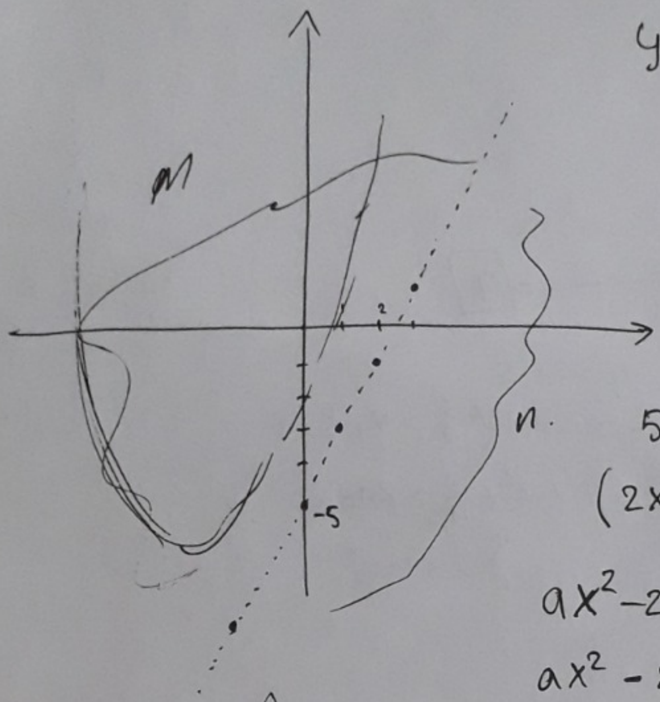
т.В в п => $y > 2x-5$

$x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + \frac{3}{a} > \cancel{a}\,2x_0 - 5.$

$\cancel{a^2} - \cancel{2a^2} + \cancel{a^2} + \frac{3}{a} > 2a-5$

$\frac{3}{a} > 2a-5.$

Черновик.



$y = 2x-5.$

$x < \frac{y+5}{2}.$

1). $y > 2x-5.$

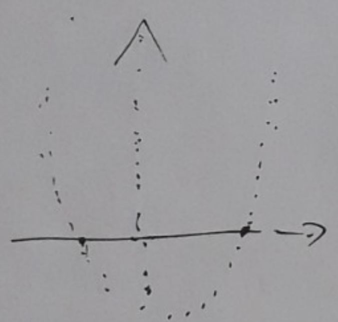
$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$(2x-\frac{y}{\sqrt{2}})^2 = 4x^2+\frac{y^2}{2}-2xy$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$ax^2-2a^2x+a^3+3=ay.$

$x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}=y>2x-5.$



$x^2-(2a+2)x+a^2+\frac{3}{a}+5>0.$ при $\forall x.$

$x=0.$ $a^2+\frac{3}{a}+5>0.$

$a^3+3+5a>0.$

$4a^2-4a-3>0$ $a<0.$

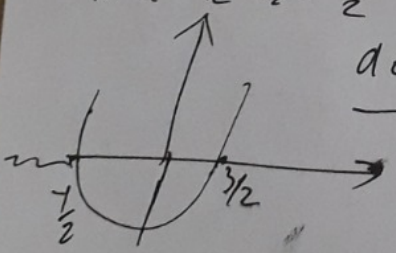
$a=\frac{3}{2}$ $a_2=-\frac{1}{2}$

$D=\cancel{4a^2}+8a+\cancel{4}-\cancel{4a^2}-\frac{12}{a}-\cancel{20}^{16}<0$

$4a-\frac{3}{a}-4<0$ $a\geq 0$

$4a^2-4a-3<0.$

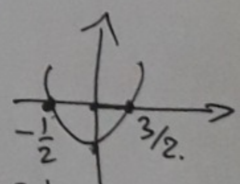
$a\in(-\infty;-\frac{1}{2})$



$D=16+4\cdot3\cdot4=16(1+3)=16\cdot4=64$

$a=\frac{4+8}{8}=\frac{3}{2}.$

$a=\frac{4-8}{8}=-\frac{1}{2}.$



$a\in[0;\frac{3}{2})$

$(y-2a)^2+(2x-y)^2+(2x-3a)^2$

$\parallel$

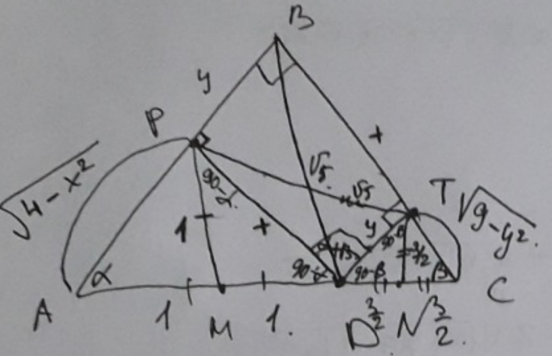
$y^2+4a^2-4ay+4x^2+y^2-4xy+4x^2-12ax+9a^2=y^2+8a^2=4a^2+4a^2$

$(y-2a-2a)y+(2x-y-y)2x+(2x-5a)(2x-a)=0.$

$(y-4a)y+4(x-y)x+(2x-5a)(2x-a)=0.$

211006556 (U161269 M1275526)

Черновик.



$\angle ABC - ?$

$(180-\alpha-\beta)\cdot 2 = 180$

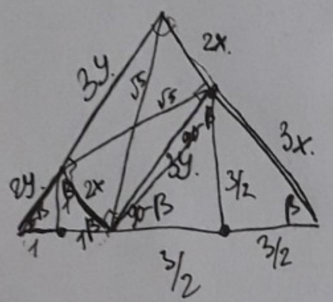
$\alpha+\beta = 90.$ $\angle ABC = 90°$

$AC = 5.$

$x^2+y^2=5.$ $y^2 = 5-x^2.$

$y = \sqrt{5-x^2}.$

$\cancel{\left(\sqrt{4-x^2}+y\right)\left(x+\sqrt{9-y^2}\right)}$



$\left(\sqrt{4-x^2}+y\right)\left(x+\sqrt{9-y^2}\right) = \sqrt{4-x^2}\cdot x$

$\left(\sqrt{4-x^2}+y\right)^2 + \left(x+\sqrt{9-y^2}\right)^2 = 25.$

$4-\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2y\sqrt{4-x^2}+\cancel{x^2}+9-\cancel{y^2}+2x\sqrt{9-y^2}=25.$

$2\left(y\sqrt{4-x^2}+x\sqrt{9-y^2}\right) = 25-13=12.$

$y\sqrt{4-x^2}+x\sqrt{9-y^2}=6.$

$x\sqrt{5-x^2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+\frac{\sqrt{9-5+x^2}\cdot\sqrt{5-x^2}}{2} =$

$= x\sqrt{5-x^2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+\frac{\sqrt{4+x^2}\cdot\sqrt{5-x^2}}{2}$

$4(y^2+x^2)=4$

$y^2+x^2=1$

$\frac{5y\cdot 5x}{2} - ? = 12,5xy$

$25(y^2+x^2)=25$ ✓.

$4x^2+9y^2=5.$ $y^2+x^2=1.$

$\underbrace{4(x^2+y^2)}_{4}+5y^2=5.$

$5y^2=1.$

$y^2=\frac{1}{5}$ $y=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1}{\sqrt5}$

$x^2 = 1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5} \Rightarrow$

$x=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt5}$

$\frac{25xy}{2} = \frac{25\cdot 1\cdot 2}{2\cdot 5} = 5$

211006556 (U161269 M1275526)

Черновик.

$$\underbrace{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}_{a}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}=2\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$(\cancel{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}})$$

$$(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})^2=\cancel{x}+3+7-\cancel{x}-2\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$=10-2\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$a+\cancel{4}=\cancel{10}\,6-a^2.$$

$$a^2+a-6=0 \qquad (a-2)(a+3)=0.$$

$$D=1+24=25 \qquad a=\frac{-1+5}{2}=2$$

$$a=\frac{-1-5}{2}=-3.$$

$$\underbrace{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}=2. \Rightarrow \sqrt{x+3}>\sqrt{7-x}$$

$$\cancel{10}\,6-2\sqrt{(x+3)(7-x)}=\cancel{4}$$

$x+3>7-x$

$2x>4$ $x>2$ 18

$$3=\sqrt{(x+3)(7-x)} \qquad \cancel{9}=(x+3)(7-x)=\cancel{21}+4x-x^2.$$

$$x^2-4x-18=0$$

$$D=16+4\cdot18=16+72=88=2\sqrt{22}.$$

$$x_1=\frac{4+\sqrt{88}}{2}=2+\sqrt{22}.$$

$$x_2=2-\sqrt{22}.\ X.$$

$$\cancel{10}\,1-2\sqrt{(x+3)(7-x)}=\cancel{9}.$$

$$\sqrt{(x+3)(7-x)}=\frac{1}{2}.$$

$$\Updownarrow$$

$$21+4x-x^2=\frac{1}{4}.$$

$$84+16x-4x^2=1.$$

$$4x^2-16x-83=0$$

$$D=16\cdot16+4\cdot83=4\cdot147.$$

$$x_3=\frac{16+2\sqrt{147}}{8}=2+\frac{\sqrt{147}}{4}\ X.$$

$$x_4=\frac{16-2\sqrt{147}}{8}=2-\frac{\sqrt{147}}{4}.$$

$\sqrt{x+3}<\sqrt{7-x}.$

$x+3<7-x.$

$2x<4$

$x<2.$

$x+3>0$

$\boxed{x>-3}$

$7-x>0$

$\boxed{x<7}$

-3 7

$4\cdot2^4=2^8=256.$

$4\cdot83=332.$

$588 : 4 = 147.$

-4, 18, -16, 28

$$16(16+83)=16\cdot99.=4^2\cdot99.$$

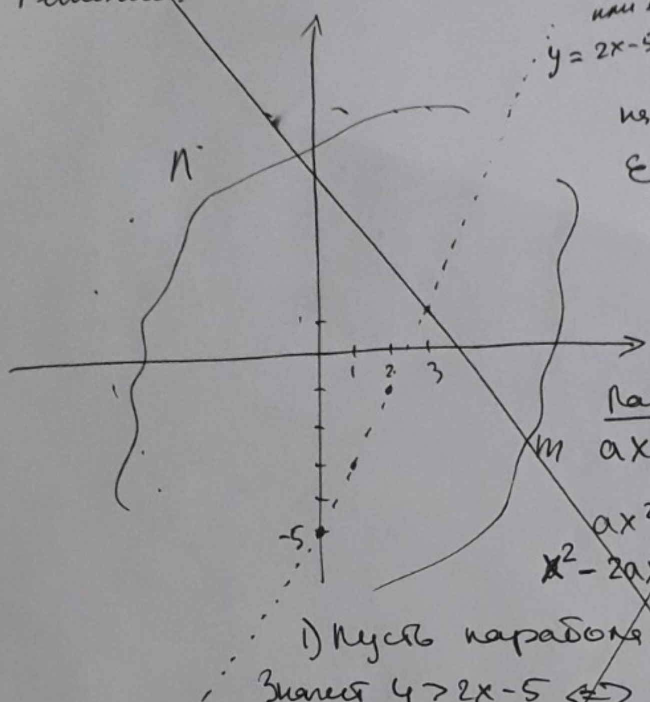
$$2-\frac{\sqrt{99}}{2}>-3.$$

~~Чистовик~~
Черновик.

Задача №3.

Ответ:

Решение:



Прямая $y=2x-5$ делит плоскость на 2 полуплоскости n и m.

Если т. A и парабола находятся в n, то $y > 2x-5$ при $\forall x$ и если в полуплоскости m, то $y < 2x-5$ при $\forall x$.

Парабола.

$$\underbrace{ax^2-2a^2x-ay+a^3+3}_{g(x)}=0$$

$$ax^2-2a^2x+a^3+3=ay \quad |/a$$

$\boxed{a\neq 0, \text{ т.к. иначе } 0+3=0 \text{ плохо}}$

$$x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}=y$$

1) Пусть парабола в полуплоскости n.

Значит $y>2x-5 \iff x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}>2x-5 \iff$

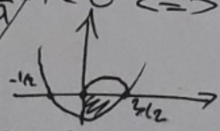
$\iff \underbrace{x^2-2(a+1)x+a^2+\frac{3}{a}+5}_{f(x)}>0$. Парабола $f(x)$ ветви вверх и при $\forall x$ должно быть $f(x)>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ — не имеет корней $\iff D<0 \Rightarrow D=4a^2+8a+4-4a^2-\frac{12}{a}-20<0 \quad |/4$

$$4a-\frac{3}{a}-4<0$$

① Пусть $a>0 \Rightarrow 4a-\frac{3}{a}-4<0 \iff 4a^2-4a-3<0$, $D=16+48=64$

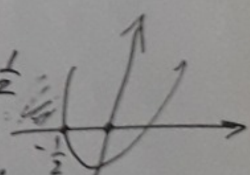
$a_1=\frac{4+8}{8}=\frac{3}{2}$ и $a_2=\frac{4-8}{8}=-\frac{1}{2} \Rightarrow$



$\Rightarrow a\in\left(0;\frac{3}{2}\right)$ подходит.

② Пусть $a<0 \Rightarrow 4a-\frac{3}{a}-4<0 \iff 4a^2-4a-3>0$ $D=64$ $a_1=\frac{3}{2}$ $a_2=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ подходит.



Получается, что если парабола $g(x)$ лежит в n, то $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

2) Пусть парабола в полуплоскости m. Значит $y<2x-5 \iff$

$\iff x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}<2x-5 \iff \underbrace{x^2-2(a+1)x+a^2+\frac{3}{a}+5}_{f(x)}<0$. Парабола $f(x)$ ветви вверх и при $\forall x$ должно быть $f(x)<0$ — это невозможно. Значит парабола обязательно лежит в полуплоскости n. Значит и т. A по условию должна лежать в полуплоскости

Чистовик.

Задача №1 продолжение.

$\angle CTD = 90^\circ$ и $\angle CBA = 90^\circ \Rightarrow TD \parallel AB$ получается $\triangle CTD \sim \triangle CBA \Rightarrow$ (по углам)

$\Rightarrow \frac{DT}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{3}{5}$. Пусть $DT = 3y \Rightarrow AB = 5y$, т.к. $\frac{DT}{AB} = \frac{3}{5}$.

$BP = \underline{DT = 3y}$ по раннее доказ. $\Rightarrow AP = AB - BP = AB - DT = 5y - 3y = 2y$.

По т. Пифагора $\overset{\text{т.к.} \angle ABC = 90^\circ}{AB^2 + BC^2 = AC^2} \Rightarrow (5y)^2 + (5x)^2 = 5^2 \Rightarrow y^2 + x^2 = 1$.

По усл. $BD = \sqrt{5}$ и $\angle BPD = 90^\circ$. Применим т. Пифагора к $\triangle BPD \Rightarrow$

$PB^2 + PD^2 = BD^2 \Rightarrow 9y^2 + 4x^2 = 5. \Rightarrow \underbrace{4(x^2+y^2)}_{4} + 5y^2 = 5 \quad (x^2+y^2=1) \Rightarrow$

$5y^2 = 1. \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5}$ и $y = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2}$ т.к. $\triangle ABC$-прямоугол. и $\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{5y \cdot 5x}{2} = \frac{5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{\cancel{5} \cdot 5 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{\sqrt{5}} \cdot \cancel{\sqrt{5}}} = 5$. Пункт б.

211006556 (U161269 M1275526)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006556**

ID профиля: **161269**

Вариант 10

Черновик.

$$\frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \qquad x^2=a \quad a,b\geq 0$$
$$x^4+y^4+7x^2y^2=81 \qquad y^2=b$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{6}{a+b}+ab=10\\ &a^2+b^2+7ab=81\end{aligned}}$$

$6+ab(a+b)=10(a+b)$

$6+a^2b+ab^2=10a+10b$

$$\frac{6+ab(a+b)}{a+b}=10$$

$ab=10-\frac{6}{a+b}$

$a^2+b^2+7\left(10-\frac{6}{a+b}\right)=11$

$a^2+b^2-\frac{42}{a+b}=11$

$$\boxed{a^2+b^2=11+\frac{42}{a+b}}$$

$a^2+b^2\geq 2ab$

$\Downarrow$

$9ab\leq 81 \Rightarrow ab\leq 9$

$\Downarrow$

$\frac{6}{a+b}+ab=10 \qquad \frac{6}{a+b}\geq 1 \Rightarrow a+b\leq 6$

$81\leq (a+b)^2+5ab=81$

$a^2+b^2=\frac{48}{a+b}+ab+1$

$\underset{\underset{a+b=6}{36}}{\wedge}$ $\underset{\underset{ab=9}{45}}{\wedge}$

$3\cdot 3 \qquad 3\cdot 3$

$x=\sqrt{3} \qquad y=\sqrt{3}$

$a=6-b$

$(6-b)b=9$

$b^2+9-6b=0$

$D=36-36=0$

$b=\frac{6}{2}=3$

$(68^4-68^2)-(68^4-2\cdot 68^3-68^2-2\cdot 68^3+4\cdot 68^2+2\cdot 68)$

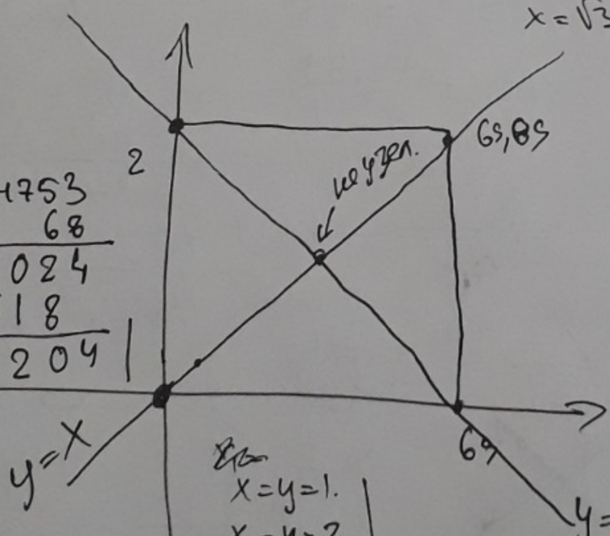
$$\frac{4\cdot 68^3+4\cdot 68^2+2\cdot 68}{2}=$$

$=68(2\cdot 68^2+2\cdot 68+1)+68(2+4\cdot 66)$

$68(2\cdot 68^2+2\cdot 68+4\cdot 66+3)$

```
  68
× 68
 544
+408
4624
+129
4753
```

```
  4753
×   68
 38024
+28518
323204
```



$y=x=69-x$

x=y=1.

x=y=2.

⋮

x=y=68. — 68 вар.

x=66 y=1

x=67 y=2

⋮

x=1 y=68 — 68 вар.

y=x

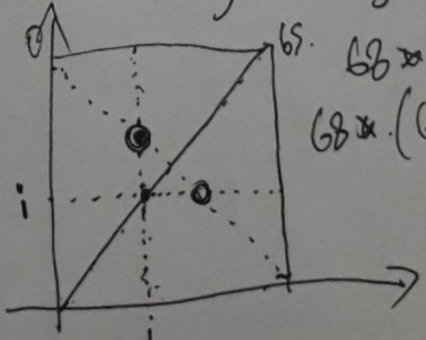
1) A и B на y=x.

$\frac{68\cdot 67}{2}$

2) A и B на y=69-x.

$\frac{68\cdot 67}{2}$

3) A на y=x. B не на

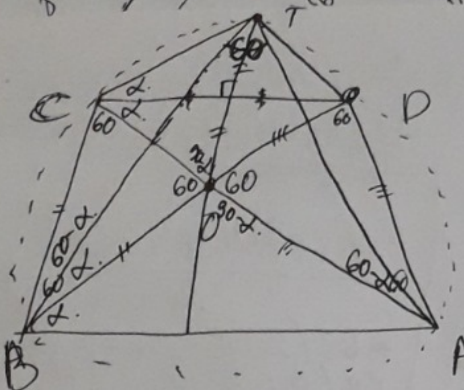


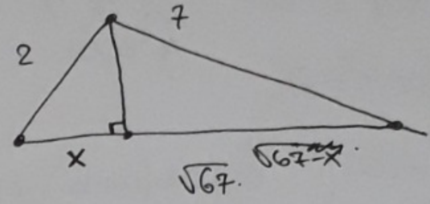
$68\cdot 68-$

$68\cdot(68^2-67-67-67)66$

211006556 (U161269 M1275527)

Черновик.



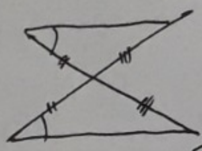


$4-\cancel{x^2}=49-67+2\sqrt{67}x-\cancel{x^2}$

$\underbrace{71-49}_{22}$

$\cancel{22}=\cancel{2}\sqrt{67}x$

$\boxed{x=\frac{11}{\sqrt{67}}}$



⑨

$h=\sqrt{4-x^2}=$

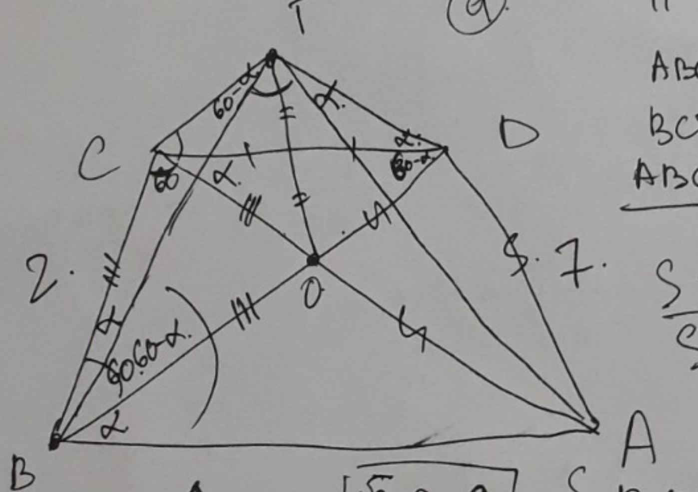
ABCD-вписан

BCTD-вписан $=\sqrt{4-\frac{121}{67}}$

ABCDT-

$67\cdot4=268-121=147$

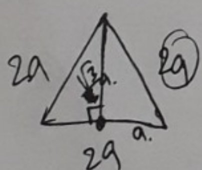
$\sqrt{\frac{147}{67}}$



$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

$\frac{\sqrt{\frac{147}{\cancel{67}}}\cdot\cancel{\sqrt{67}}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}$

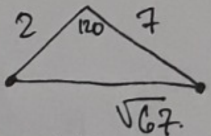
$\sqrt{147}$.



$\boxed{\sqrt{3}\cdot a\cdot a}$

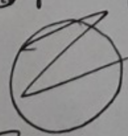
$S_{BOC}=\sqrt{3}$.

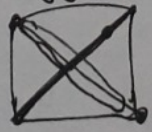
$S_{AOD}=\sqrt{3}\cdot\frac{49}{4}$.



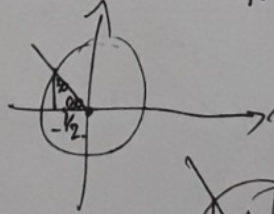
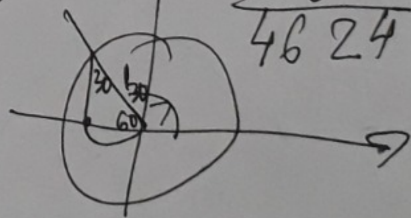
$c^2=a^2+b^2+2ab\cos120$

$c^2=4+49+14=67$ $\quad c=\sqrt{67}$





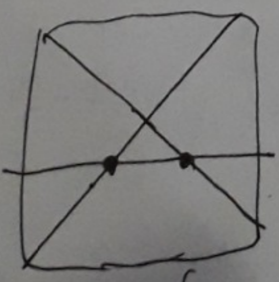
68
× 68
544
+ 408
4624

$\sqrt{3}\left(1+\frac{49}{4}\right)=\sqrt{3}\cdot\frac{53}{4}$

$\sqrt{3}\cdot\frac{53}{4}$

$-\frac{147}{12}\Big|\frac{3}{49}$
27



32
+49
81

$68(68^2-67-68\cdot66\cdot2$

$68\cdot(68^2-67-68\cdot66\cdot2)=7\sqrt{3}$.

$\frac{2+4\cdot66}{(1+2\cdot66)}$

$(1+66+66)\,68\cdot2$.

$2\cdot68=136$.

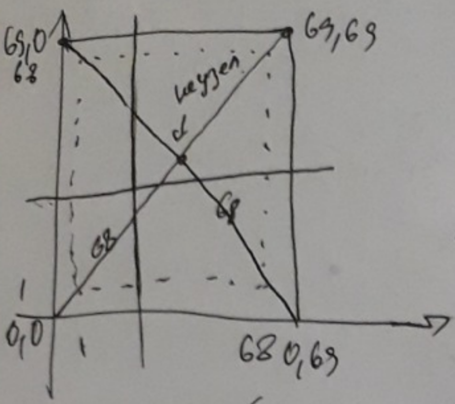
$4\cdot66=264$

264
− 136
128

129.

$68(68^2-67-68\cdot66\cdot2+68^2-67-68-66\cdot2$ +.

Черновик.



$$\frac{68^2\cdot(68^2-1)}{2}$$ всего.

плохие:

ни A ни B.

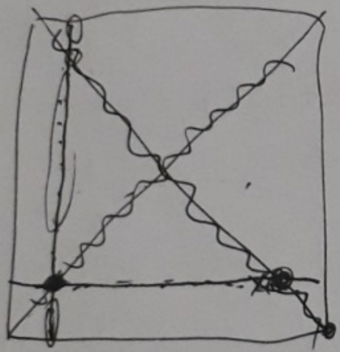
$$\frac{(68^2-2\cdot 68)(68^2-2\cdot 68-1)}{2}$$

$(1+2\cdot 66\cdot 68)\,2 = 2+4\cdot 66\cdot 68$

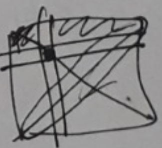
$68\left(68(68^2-1)-(68-2)(68^2-2\cdot 68-1)\right)$

$\cancel{68^3}-\cancel{68}-\cancel{68^3}+2\cdot 68^2+\cancel{68}+2\cdot 68^2-4\cdot 68-2$

$$\frac{68\left(4\cdot 68(68-1)-2\right)}{2}$$



$68\cdot 67+68\cdot 66+68^2\cdot(68^2-68-$
$-67-66-66)$

$68\cdot 67$ +  $68(68^3$

$68\cdot 66$

$68(68^2-2\cdot 66-68-67)\cdot 2$

$68\cdot(68^2-68\cdot 4+2+2)\cdot 2$

$68^2-2\cdot 68-4\cdot 66+2$

$68(68^2\cdot 2-8\cdot 68+8+66+67)$

$68^2-2\cdot 68\ \overset{+2}{\cancel{-1+2}}+4\cdot 66$

$68^2-6\cdot 68+6+67=3\cdot 66$

Чистовик.

1

Задача №4.

Ответ: 4 пары ответов $(x;y)$ — $(\sqrt{3};\sqrt{3}), (\sqrt{3};-\sqrt{3}), (-\sqrt{3};\sqrt{3}), (-\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81. \end{cases}$$

пусть $x^2=a$, $y^2=b \Rightarrow (a,b \geq 0)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{a+b}+ab=10 \\ a^2+b^2+7ab=81. \end{cases}$$

~~$a^2+b^2 \geq$~~ $a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$ Кер-во Коши для 2х чисел $a,b \geq 0$.

$81=a^2+b^2+7ab \geq 2ab+7ab \geq 9ab \Rightarrow \boxed{9 \geq ab}$ I

$\dfrac{6}{a+b}+ab=10 \Rightarrow \dfrac{6}{a+b}=10-ab \geq 10-9=1$. Получается $\dfrac{6}{a+b} \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{6 \geq a+b}$ II

пользуемся I и II

$81=a^2+b^2+7ab=(a+b)^2+5ab \leq 36+5\cdot 9=36+45=81$.

Получили, что $81 \leq 81$. Значит везде строгое равенство.

Значит $a+b=6$ и $ab=9$.

$$\begin{cases} a+b=6 \\ ab=9 \end{cases} \quad \Big| \; a=6-b. \quad \Rightarrow (6-b)b=9.$$

$$\Updownarrow$$

$$b^2-6b+9=0$$

$$\Updownarrow$$

$$(b-3)^2=0$$

$$\Updownarrow$$

$$b=3 \Rightarrow a=6-b=3.$$

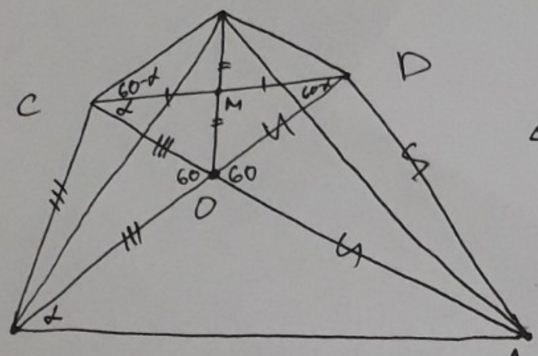
Значит $a=3$ и $b=3$. Тогда $x=\pm\sqrt{3}$ и $y=\pm\sqrt{3}$.

Значит всего 4 пары ответов: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

Чистовик.

Задача №6. Ответ: а) △ABT-правильный б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$. 2

Пункт а



M – середина CD
⇓
т.к. т.O отразили отн. т. M, то OM = MT,
△BOC и △AOD-правильные по условию
⇓
OB = OC = BC и OA = AD = OD и
∠OBC = ∠BCO = ∠COB = 60° и
∠OAD = ∠ODA = ∠DOA = 60°

Заметим, что △BOA = △COD, т.к. CO = BO, OD = OA и ∠COD = ∠BOA = 120°. (1 признак)

⇒ ∠DCO = ∠ABO = α ⇒ ABCD - вписан. I

т.к. т. O отразили отн. т. M (середина CD), то ∠COD = ∠CTD = 120°.

Тогда ∠CBD + ∠CTD = 60° + 120° = 180° ⇒ BCTD - вписан II

Из I и II получаем, что т. A, B, C, D, T лежат на 1 окружности. ⇒

⇒ ∠BCA = ∠BTA = 60°.

∠ODC = 180 − ∠COD − ∠DCO = 180 − 120 − α = 60 − α. ∠ODC = ∠DCT (т.к. отразили отн. т. M - т. O). ⇒ ∠DCT = 60 − α. (ну или же △CMT = △DMO по 1 призн ⇒ углы равны)

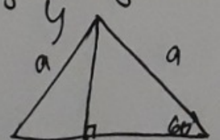
∠DCT = ∠DBT = 60 − α, т.к. BCTD - вписан.

⇒ ∠TBA = ∠TBD + ∠DBA = 60 − α + α = 60°.

Получаем в △BTA: ∠BTA = 60° и ∠TBA = 60° ⇒ ∠TAB = 60° ⇒

△TBA - правильный. Пункт а доказан.

~~Пункт~~ Пункт B. Пусть △XYZ - правильный и XY = a. Тогда S_{XYZ} - ?



Опустим перпендикуляр YH на XZ. HZ = XH = a/2.

⇒ по т. Пифагора $YH = \sqrt{a^2 - a^2/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Тогда $S_{XYZ} = \frac{YH \cdot XZ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. (*)

Тогда S_{BOC} при BC = 2 равна $S_{BOC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$.

Тогда S_{AOD} при AD = 7 равна $S_{AOD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 7^2 = \sqrt{3} \cdot \frac{49}{4}$.

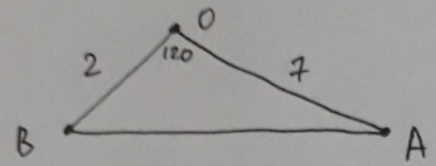
Пользуемся (*), т.к. △ правильные.

Задача №6 (продолжение).

$\triangle BOA = \triangle COD$ по ранее доказ.

$\Rightarrow S_{BOA} = S_{COD}$.

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + 2\cdot S_{BOA} = \sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot\frac{49}{4} + 2\cdot S_{BOA}$.



$BC = BO = 2$
$OA = AD = 7$. $\angle BOA = 120°$, т.к. $\angle COB = 60°$.

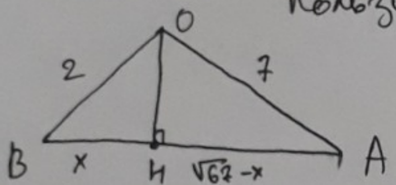
по т. косинусов $AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB\cdot OA\cdot\cos\angle BOA =$

$= 4 + 49 - 2\cdot 2\cdot 7\cdot\cos 120 = 4 + 49 + \frac{\cancel{2}\cdot 2\cdot 7}{\cancel{2}} = 4+49+14 = 67$.

$\Rightarrow BA = \sqrt{67}$.

Тогда S_{BTA} при $BA = \sqrt{67}$ равна $S_{BTA} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{67})^2 = \frac{\sqrt{3}\cdot 67}{4}$.

пользуемся (*6), т.к. $\triangle BTA$ по пункту а – правильный.



$OH \perp AB$. $OH = h$.

$S_{BOA} = \frac{OH\cdot AB}{2} = \frac{OH\cdot\sqrt{67}}{2} = \frac{h\sqrt{67}}{2}$

Пусть $BH = x \Rightarrow HA = \sqrt{67} - x$.

по т. Пифагора $OH^2 = OB^2 - BH^2 = OA^2 - HA^2 \Leftrightarrow h^2 = 4 - x^2 = 49 - (\sqrt{67} - x)^2 \Leftrightarrow$

$4 - \underline{x^2} = 49 - 67 - \underline{x^2} + 2\sqrt{67}x \Leftrightarrow 22 = 2\sqrt{67}x \Leftrightarrow x = \frac{11}{\sqrt{67}} \Rightarrow$

$h^2 = 4 - x^2 = 4 - \frac{121}{67} = \frac{67\cdot 4 - 121}{67} = \frac{268 - 121}{67} = \frac{147}{67} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{147}{67}}$.

Тогда $S_{BOA} = h\cdot\frac{\sqrt{67}}{2} = \frac{\sqrt{147}\cdot\sqrt{67}}{\sqrt{67}\cdot 2} = \frac{\sqrt{147}}{2}$.

Получается $S_{ABCD} = \sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot\frac{49}{4} + 2S_{BOA} = \sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot\frac{49}{4} + \sqrt{147} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{49}{4}\right) + 7\cdot\sqrt{3} =$

$= \sqrt{3}\left(1 + 7 + \frac{49}{4}\right) = \sqrt{3}\cdot\frac{(4+28+49)}{4} = \sqrt{3}\cdot\frac{81}{4}$.

Тогда $S_{ABT}/S_{ABCD} = \left(\sqrt{3}\cdot 67/4\right)/\left(\sqrt{3}\cdot\frac{81}{4}\right) = \frac{67}{81}$. Пункт б.

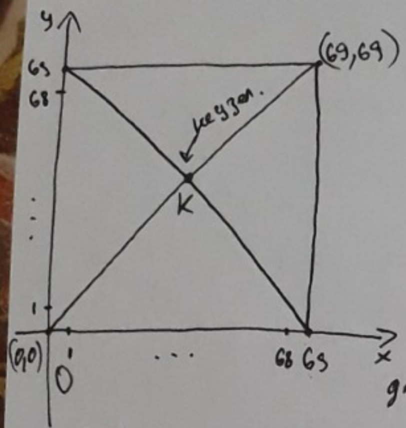
Чистовик.

4

Задача N5.

Ответ: $68(68^2+129) = 323204$

Решение: „плохая" конфигурация – при которой не выполнены условия из задачи.



прямая a – $y=x$.
прямая b – $y=69-x$.

Точка пересечения a и b $\Rightarrow y = x = 69-x \Rightarrow 2x = 69 \Rightarrow x=\frac{69}{2} \Rightarrow$ точка пересечения не в узле.

Всего узлов в квадрате (без границ) 68×68.

Тогда выбрать узел A и B, где конфигурации A,B и B,A – одинаковые можно $\frac{68\cdot68\cdot(68^2-1)}{2}$ способами.

для A – 68^2, для B все кроме A, т.е. 68^2-1. И делим на 2, т.к. A,B и B,A – одинаковые конфигурации.

Теперь посчитаем сколько лишних „плохих" конфигураций мы посчитали.

1) A и B не на прямых $y=x$ и $y=69-x$ 2) есть узел на $y=x$ или $y=69-x$, но прямая, проходящая через узлы параллельна Ox или Oy.

1) A и B не на не прямых $y=x$ и $y=69-x$.

~~Точек~~ узлов на $y=x$ в квадрате 68 $(x=1, \dots x=68)$.

Узлов на $y=69-x$ в квадрате 68 $(x=68, \dots x=1)$.

Пусть A не на a и не на b $\Rightarrow$ $68^2-2\cdot68$ вариантов выбрать узел. (Пользуемся, что $a\cap b=$ т. K – не узел.)

Тогда для B на 1 меньше те же, кроме A $\Rightarrow 68^2-2\cdot68-1$. Значит всего вариантов –

$\frac{(68^2-2\cdot68)(68^2-2\cdot68-1)}{2}$. Делим на 2, т.к. иначе каждую расстановку посчитаем дважды.

2) Пусть AB проходит через узел на $y=x$ или $y=69-x$ и ($AB\parallel Ox$ или $AB\parallel Oy$).

2.1. Пусть $AB\parallel OX$. Таких прямых проходящих через узлы 68 $(y=68, \dots y=1)$.

На каждой такой прямой 1 узел принадлежащий $y=x$ и 1 узел принадлежащий $y=69-x$.

(a) Пусть A или B на $y=x$, а другая на $y=69-x$ – это 1 конфигурация.

(b) Пусть A или B на $y=x$, а другая не на $y=69-x$ – это $68-1-1=66$ конфигураций. т.к. одна точка определена однозначно, а для другой любой узел не на $y=x$ и не на $y=69-x$ – это $68-1-1=66$.

(c) Пусть A или B на $y=69-x$, а другая не на $y=x$. Аналогично как и в b. – 66 конфигураций.

Тогда всего плохих конфигураций для $AB\parallel OX$:

$\underset{\text{кол-во вариантов для AB}}{68}\cdot(1+2\cdot66)$.

Чистовик.

Задача N5 (продолжение). 5

2.2. Пусть $AB \parallel OY$.

Тогда аналогично, как и в 2.1. — $68(1+2\cdot 66)$ „плохих" конфигураций.

Т.к. это квадрат.

Тогда всего „плохих" конфигураций:

$$\frac{(68^2-2\cdot 68)(68^2-2\cdot 68-1)}{2}+2\cdot 68\cdot(1+2\cdot 66).$$

все — „плохие" = „хорошие" — т.е. при которых условия задачи выполнены

$$\text{„хорошие"} = \frac{68^2(68^2-1)}{2}-\frac{(68^2-2\cdot 68)(68^2-2\cdot 68-1)}{2}-2\cdot 68(1+2\cdot 66)=$$

$$=\frac{(68^4-68^2)-(68^4-2\cdot 68^3-68^2-2\cdot 68^3+4\cdot 68^2+2\cdot 68)}{2}-2\cdot 68(1+2\cdot 66)=$$

$$=68^3-2\cdot 68^2-68+68(2+4\cdot 66)=68(68^2-2\cdot 68-1+2+4\cdot 66)=$$

$$=68(68^2+129)=323204.$$