Часть 1

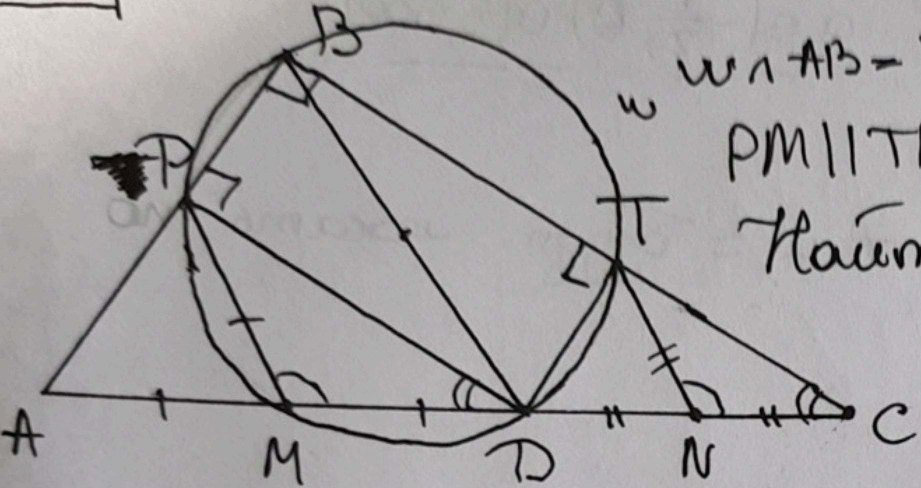
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006444**

ID профиля: **382572**

Вариант 10

№1



Дано: $\triangle ABC$: т. $D \in AC$, ω - ок-ть с диаметром BD: $\omega \cap AB = P$; $\omega \cap BC = T$; т. M и N - середины AD и CD; $PM \parallel TN$.

Найти: а) $\angle ABC$; б) S_{ABC}, если известно: $MD = 1$; $NT = \frac{3}{2}$; $BD = \sqrt{5}$.

Решение: а): 1) Проведём отрезки PD и DT, тогда углы $\angle BPD$ и $\angle BTD$ – вписанные и опираются на диаметр – $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$.

2) $\angle APD = \angle DTC = 90^\circ$ (смежные с $\angle BPD$ и $\angle BTD$).

3) $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD = \angle TNC$ (соответственные при $PM \parallel TN$ и секущей MN)

4) $PM = AM = MD$ и $DN = TN = NC$ (по св-ву медианы в прямоугольном Δ-ке) $\Rightarrow \angle PDA = \angle TCD$; $\angle PAD = 90^\circ - \angle PDA$ } $\Rightarrow$

$\angle PAD + \angle TCD = 90^\circ \Leftrightarrow \angle BAC + \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$.

211006444 (U382572 M12757179)

б): 1) $AD = 2PM = 2$; $DC = 2TN = 3$;

№2

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$.

• Рассмотрим $(x+3)(7-x)=7x-x^2+21-3x=21+4x-x^2$, т.е. ур-е равносильно:
$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{(x+3)(7-x)} \Leftrightarrow \sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}$ (Сужение ОДЗ не произошло, так как $x+3$ и $7-x$ уже были в ур-е под знаком корня).

• Пусть $\sqrt{x+3}=a\geq 0$; $\sqrt{7-x}=b\geq 0$; $a^2+b^2=x+3+7-x=10$, тогда

$$\begin{cases} a-b+4=2ab, \\ a^2+b^2=10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab=a-b+4, \\ (a-b)^2=10-2ab; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab=a-b+4, \\ (a-b)^2+(a-b)+4=10; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2ab=a-b+4, \\ (a-b)^2+(a-b)-6=0;^{(2)} \end{cases} (*)$$

• Рассмотрим ур-е (2) и заменим $a-b=t$, тогда
$t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-3. \end{array}\right.$ Вернёмся к „a" и „b" и системе (*):

• $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a-b=2, \\ a-b=-3; \end{array}\right. \\ 2ab=a-b+4 \end{cases}$

1) $\begin{cases} a=b+2, \\ 2(b+2)b=b+2-b+4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2, \\ 2b^2+4b=6; \;|:2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2, \\ b^2+2b-3=0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a=b+2, \\ \left[\begin{array}{l} b=1, \\ b=-3; \end{array}\right. \end{cases} \overset{b\geq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=3, \\ b=1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} a=b-3, \\ 2(b-3)b=b-3-b+4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b-3, \\ 2b^2-6b-1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b-3, \\ b=\frac{3\pm\sqrt{11}}{2}; \end{cases} \overset{b\geq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=b-3, \\ b=\frac{3+\sqrt{11}}{2}; \end{cases}$

$D_1=9+2=11$

$\begin{cases} a=\frac{\sqrt{11}-3}{2}, \\ b=\frac{3+\sqrt{11}}{2}. \end{cases}$ Вернёмся к „x":

• 1) $\begin{cases} \sqrt{x+3}=3, \\ \sqrt{7-x}=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=9, \\ 7-x=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ x=6; \end{cases} \Leftrightarrow x=6$

• 2) $\begin{cases} \sqrt{x+3}=\frac{\sqrt{11}-3}{2}, \\ \sqrt{7-x}=\frac{3+\sqrt{11}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=\frac{11+9-6\sqrt{11}}{4}, \\ 7-x=\frac{9+11+6\sqrt{11}}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{11+9-6\sqrt{11}-12}{4}, \\ x=\frac{28-9-11-6\sqrt{11}}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=\frac{8-6\sqrt{11}}{4}, \\ x=\frac{8-6\sqrt{11}}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4-3\sqrt{11}}{2}.$

211006444 (U382572_M+3/5779)

Ответ: $x=6$; $x=\frac{4-3\sqrt{11}}{2}$.

№3

1) Рассмотрим ур-е $5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0 \Leftrightarrow$
$y^2-4(x+a)y+8x^2+12ax+5a^2=0$ - квадратное ур-е относительно y при любых a и x.
$D_1=4(x+a)^2-8x^2-12ax-5a^2=4x^2+8ax+4a^2-8x^2-12ax-5a^2=-a^2-4ax-4x^2=$
$=-(a+2x)^2\le 0$. Если $D_1<0$, то ур-е задаёт пустое множество точек, что нам не подходит. Если $D_1=0 \Leftrightarrow 2x=-a \Leftrightarrow x=-\frac{a}{2}$, то $y=2(x+a) \Leftrightarrow y=2(-\frac{a}{2}+a)=-a+2a=a \Leftrightarrow y=a$
Т.е. мн-во $y=-2x$ — ГМТ „A".

2) Рассмотрим ур-е $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0 \Leftrightarrow$
$ay=ax^2-2a^2x+a^3+3$. Если $a=0$, то $0=3$ — ур-е задаёт пустое множество
Если $a\neq0$, то $y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$; $x_B=-\frac{b}{2a_1}=\frac{2a}{2}=a$; $y_B=$
$=a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a} \Leftrightarrow y_B=\frac{3}{a}$.
Т.е. мн-во $y=\frac{3}{x}$ — ГМТ „B"; $x=a\neq0$

3) Нарисуем графики $y=-2x$; $y=\frac{3}{x}$ и $2x-y=5$ $(y=2x-5)$
• $y=-2x$ линейная ф-ия, проходящая через начало координат

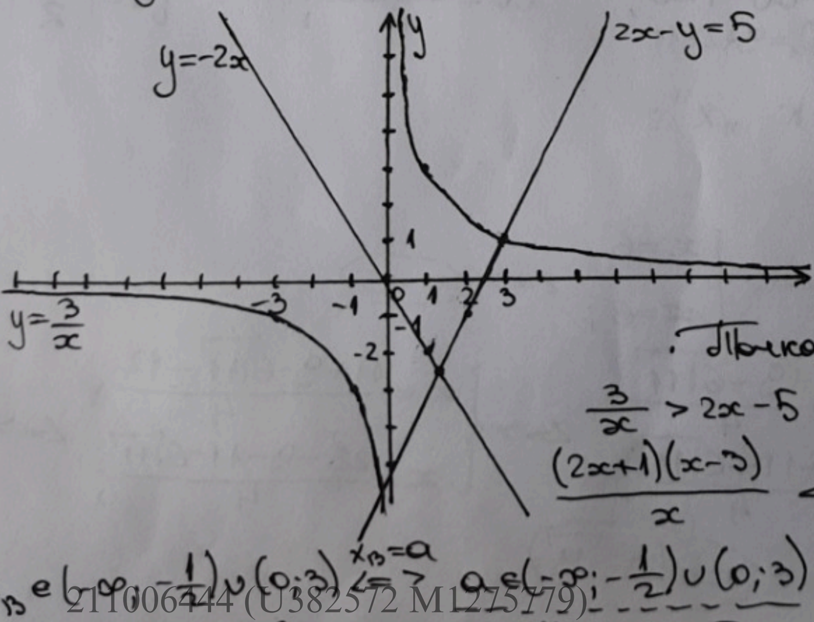
x	0	1
y	0	-2

• $y=\frac{3}{x}$ — гипербола; $D(y)$: $x\neq0$;

x	1	-1	3	-3
y	3	-3	1	-1

• $2x-y=5 \Leftrightarrow y=2x-5$ — линейная ф-ия

x	2	3
y	-1	1



1) Обе точки „выше" прямой $2x-y=5$:
· Точка A выше прямой:
$-2x>2x-5 \Leftrightarrow 5>4x \Leftrightarrow$
$x_A<\frac{5}{4} \overset{x_A=-\frac{a}{2}}{\Leftrightarrow} -\frac{a}{2}<\frac{5}{4} \Leftrightarrow$
$a>-\frac{5}{2}$

· Точка B выше прямой:
$\frac{3}{x}>2x-5 \Leftrightarrow \frac{3-2x^2+5x}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-5x-3}{x}<0$
$\frac{(2x+1)(x-3)}{x}<0$ $-$, $-\frac{1}{2}$, $+$, 0, $-$, 3, $+$, x

$x_B\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(0;3) \Leftrightarrow a\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(0;3)$. Пересечение: $a\in(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2})\cup(0;3)$.

211006444 (U382572 M1275179)

2) Обе точки ~~выше~~ „ниже" прямой
·Точка A ниже прямой: $-2x<2x-5 \Leftrightarrow x_A<\frac{5}{4} \Leftrightarrow a<-\frac{5}{2}$

№3 Продолжение

· Точка „B" ниже прямой: $\frac{3}{x} < 2x-5 \overset{\text{из §1}}{\Longleftrightarrow} a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (3; +\infty)$.

Пересечение:

$a \in \cancel{\varnothing}$

То есть при $a \in \left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 3)$ точки A и B будут лежать по одну сторону от прямой $2x - y = 5$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 3)$.

211006444 (U382572 M1275779)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006444**

ID профиля: **382572**

Вариант 10

№4

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10, \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10, \\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81. \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2 = a \geq 0$; $x^2y^2 = b \geq 0$, тогда:

$$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10, \\ a^2+5b=81; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+50-\frac{30}{a}-81=0, \\ b=10-\frac{6}{a}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-31-\frac{30}{a}=0, \\ b=10-\frac{6}{a}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^3-31a-30=0 \quad (1) \\ a \neq 0, \\ b=10-\frac{6}{a}; \end{cases}$$

· Рассмотрим ур-е (1): заметим, что $a=-1$ – корень; $-1+31-30=0$,

$$\begin{array}{l|l} a^3-31a-30 & a+1 \\ \underline{-\ a^3+a^2} & a^2-a-30 \\ \quad -a^2-31a & \\ \quad \underline{-\ -a^2-a} & \\ \qquad -30a-30 & \\ \qquad \underline{-\ -30a-30} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$a^3-31a-30=(a+1)(a^2-a-30)=(a+1)(a-6)(a+5)$

$a^3-31a-30=0 \Leftrightarrow (a+1)(a-6)(a+5)=0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} a=-1, \\ a=6, \\ a=-5; \end{array}\right. \quad a \geq 0 \Leftrightarrow a=6.$$

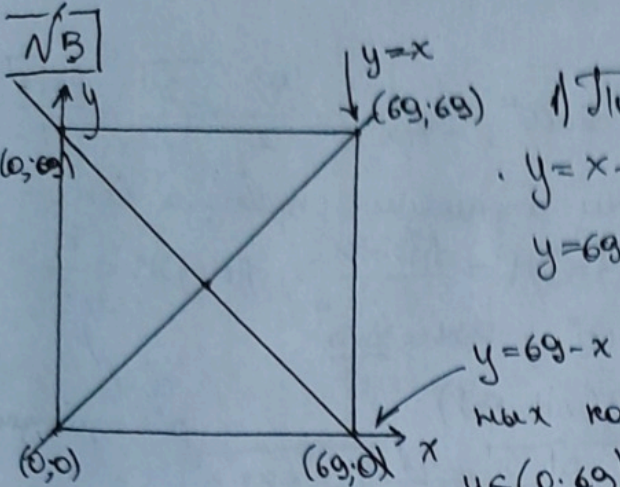
· $$\begin{cases} a=6, \\ a \neq 0, \\ b=10-\frac{6}{a}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6, \\ b=9. \end{cases}$$ Вернёмся к „x" и „y":

· $$\begin{cases} x^2+y^2=6, \\ x^2y^2=9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(6-x^2)-9=0, \\ y^2=6-x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-x^4-9=0, \ | \cdot(-1) \\ y^2=6-x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-6x^2+9=0, \\ y^2=6-x^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x^2-3)^2=0, \\ y^2=6-x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=3, \\ y^2=3; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3}, \\ y=-\sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3}, \\ y=\sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3}, \\ y=\sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3}, \\ y=-\sqrt{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

№5



1) Построим прямые $y=x$ и $y=69-x$:

$y=x$ - линейная ф-ия; $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 69 \\ \hline y & 0 & 69 \end{array}$

$y=69-x$ - линейная ф-ия; $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 69 \\ \hline y & 69 & 0 \end{array}$

2) На прямой $y=x$ лежит 67 целочисленных координат (узлов сетки), если $x\in(0;69)$ и $y\in(0;69)$, т.к. $x=a$, $y=a$, где $a\in\mathbb{Z}$ очевидно являются решением диофантового ур-я $y=x$ и таких a при $x\in(0;69)$ очевидно 67.

3) Аналогично на прямой $y=69-x$ также лежит 67 целочисленных координат (из симметрии квадрата)

4) Значит всего в квадрате на этих двух прямых лежит $2\cdot 67$ целочисленных координат. Точка пересечения двух прямых не является целочисленной: ($x=69-x \Leftrightarrow x=\frac{69}{2}\notin\mathbb{Z}$)

5) Значит всего способов выбрать пару узлов сетки: 67^2

6) Рассмотрим, как прямая $y=a$, где $a\in\mathbb{Z}$, $a\in(0;69)$ (прямая, пар-ая оси Ox) пересекает прямые $y=x$ и $y=69-x$:

$$\begin{cases} y=a, \\ y=x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a, \\ y=a; \end{cases} \quad \begin{cases} y=69-x, \\ y=a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=69-a \\ y=a \end{cases}$$

Отсюда мы видим, что эта прямая пересекает $y=x$ и $y=69-x$ в целочисленных координатах, причём пробегает всевозможные пары узлов сетки, лежащие на прямой, пар-ой оси Ox. И таких пар 67 (сколько и целых чисел в $(0;69)$).

7) Аналогично, всевозможных пар узлов сетки, лежащих на прямой, пар-ой оси Oy — 67 (из симметрии квадрата)

8) Т.е. кол-во пар, нужных нам по условию:

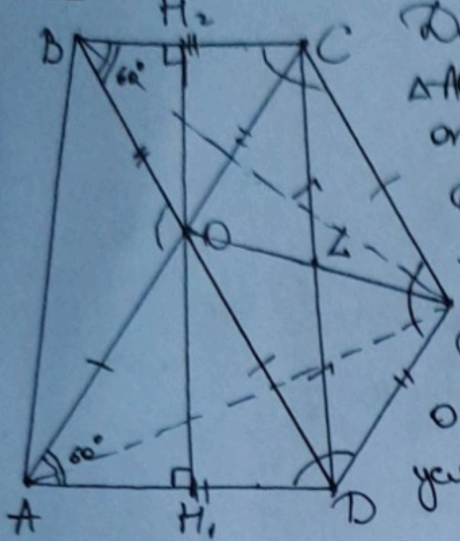
$$67^2-2\cdot 67=67(67-2)=67\cdot 65=(66+1)(66-1)=66^2-1=4356-1=4355$$

$$\begin{array}{r} \times\, 66 \\ 66 \\ \hline 396 \\ +\,396 \\ \hline 4356 \end{array}$$

211006444 (U382572 M1275780)

Ответ: 4355.

№6



Дано: выпуклый четырёхугольник $ABCD$: $AC \cap BD = O$; ΔAOD и ΔBOC – правильные; O и T симметричны относительно т. L, где L – середина CD.

Док-ть: а) ΔABT – правильный;

Найти: б) $S_{ABT} : S_{ABCD}$ – ?, если $BC = 2$; $AD = 7$

Док-во: а): 1) Проведём отрезки CT и DT, тогда $OL = LT$ (по опр. центральной симметрии) и $CL = LD$ (по условию) $|\Rightarrow$ $OCTD$ – пар-ам (по признаку) $\Rightarrow$ $OC \parallel DT$ и $OC = DT$ и $OD \parallel CT$ и $OD = CT$.

2) В четырёхугольнике $BCTD$ $CT \parallel BD$ ($CT \parallel OD$) и $BC = DT$ ($BC = OC$ из правильного тр-ка BOC, а $OC = DT$) $|\Rightarrow$ $BCTD$ – равнобедренная трапеция (по опр.) $\Rightarrow$ $\angle BCT = \angle CTD$ (по св-ву)

3) Аналогично $ACTD$ – равнобедренная трапеция $|\Rightarrow$ $\angle ADT = \angle DTC$ (по св-ву)

4) $\angle AOB = \angle COD$ (вертикальные); $\angle COD = \angle CTD$ (по св-ву пар-ма) $|\Rightarrow$ $\angle AOB = \angle CTD = \angle BCT = \angle ADT$.

5) Рассмотрим Δ-ки ADT, BCT и AOB:

$AO = AD$ (из правильного ΔAOD) $= CT$
$BO = BC = DT$
$\angle AOB = \angle ADT = \angle BCT$

$\Rightarrow$ $\Delta ADT = \Delta BCT = \Delta AOB$ (по 2 сторонам и углу между ними) $\Rightarrow$

$AB = BT = AT$. $\Rightarrow$ ΔABT – правильный ■

Решение: б): 1) $\angle OAD = \angle OCB = 60°$ (из правильных Δ-ов) и они накрест лежащие при AD, BC и секущей AC $|\Rightarrow$ $AD \parallel BC$ $\rightarrow$ $ABCD$ – трапеция (по опр.).

2) $\Delta AOB = \Delta DOC$ (по 2 сторонам $OB = OC$; $AO = OD$ и углу между ними: $\angle AOB = \angle DOC$) $\Rightarrow$ $AB = CD$ $|\Rightarrow$ $ABCD$ – равнобедренная трапеция (по опр.).

3) Проведём высоту этой трапеции через т. O:

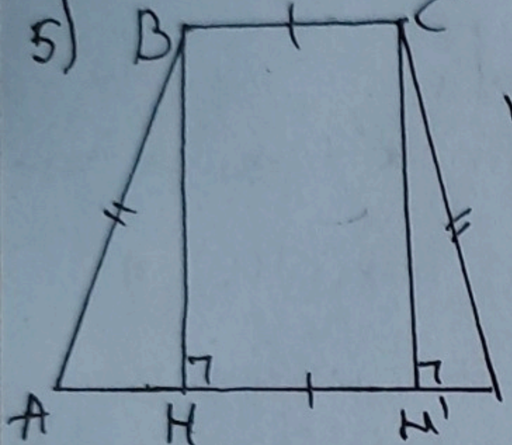
$H_1H_2 = OH_1 + OH_2$, но OH_1 и OH_2 – высоты Δ-ов AOD и BOC, т.е.

$OH_1 = AD \sin 60°$; $OH_2 = BC \sin 60°$ $|\Rightarrow$ $H_1H_2 = (AD + BC)\sin 60°$

311000444 (U382572 M1275780)

№6 Продолжение

4) $S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot H_1H_2 \Leftrightarrow S_{ABCD}=\frac{(AD+BC)^2}{2}\sin 60^\circ$; $S_{ABCD}=\frac{9^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{81\sqrt{3}}{4}$

5) 

Найдём боковую сторону трапеции; проведём высоты BH и CH', тогда $AH=DH'=\frac{AD-BC}{2}$; $AH=DH'=\frac{5}{2}$

св-во р/б трапеции

$BH=CH'=H_2H_1=(AD+BC)\sin 60^\circ$; $BH=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

По т. Пифагора для $\triangle ABH$ ($\angle H=90^\circ$):

$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}$; $AB=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{81\cdot 3}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{25+81\cdot 3}$.

$25+81\cdot 3=25+243=268=4\cdot 67$, т.е. $AB=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{67}=\sqrt{67}$

6) $S_{ABT}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$, т.е $S_{ABC}=\frac{67\cdot\sqrt{3}}{4}$ $\Rightarrow$ $S_{ABT}:S_{ABCD}=$

$=\frac{67\sqrt{3}\cdot 4}{4\cdot 81\sqrt{3}}=\frac{67}{81}$

Ответ: $S_{ABT}:S_{ABCD}=67:81$.