Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

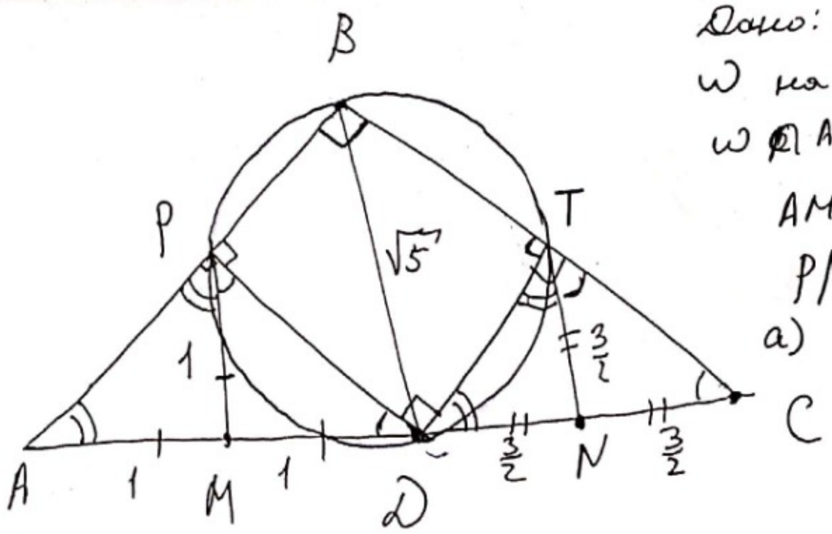
Шифр: **211006400**

ID профиля: **846344**

Вариант 10

Задача 1 Чистовик

Лист 1



Дано: $\triangle ABC$: $D \in AC$

ω на BD как на диаметре

$\omega \cap AB = P$, $\omega \cap BC = T$

$AM = MD$, $DN = NC$;

$PM \parallel TN$

а) $\angle ABC = ?$

$S = ?$

б) $MP = 1$

$NT = \frac{3}{2}$

$BD = \sqrt{5}$

Решение.

а) BD - диаметр $\Rightarrow DT \perp BC$, $PD \perp AB$;

медиана вдвое меньше гипотенузы $\Rightarrow PM = AM = MD$

и $TN = DN = NC$

Пусть $\angle PMD = \alpha$, тогда $\angle PDM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$;

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle TND = 180^\circ - \angle PMD = 180^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle TDN = \frac{\alpha}{2}$.

Тогда $\angle PDT = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$, $\angle PBT = \angle ABC =$

$= 180^\circ - 90^\circ = \underline{90^\circ}$.

б) $PM = AM = MD = 1$, $TN = DN = NC = \frac{3}{2}$;

В $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ равные острые углы $(\angle TDN = \angle PAD)$

$\Rightarrow$ ~~$\triangle APD \sim \triangle DTC$: $\frac{CD}{AD} = $~~;

Т. косинусов $\triangle BDC$!

$$\oplus\begin{cases} BC^2 = 5 + 9 - 2\sqrt{5}\cdot 3\cos\angle BDC \\ AB^2 = 5 + 4 + 2\cdot\sqrt{5}\cdot 2\cos\angle BDC \end{cases}$$

$BC^2 + AB^2 = 25 = 23 + 2\sqrt{5}\,(2\cos\angle BDC - 3\cos\angle BDC) \Rightarrow \cos\angle BDC = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

$BC^2 = 5 + 9 + 2\cdot\sqrt{5}\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = (\sqrt{20})^2$, $BC = \sqrt{20}$

$AB^2 = 4 + 5 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = (\sqrt{5})^2$, $AB = \sqrt{5}$

$S = \frac{AB\cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}}{2} = 5$;

Ответ: б) 5; а) 90°

ЛИСТ 2

Задание 2. чистовик

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2};$$

ОДЗ!

$-3 \leqslant x \leqslant 7$

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2\sqrt{21+4x-x^2}-4.$$

Возведем в квадрат обе части:

$$10-2\sqrt{21+4x-x^2}=4\left(\sqrt{21+4x-x^2}\right)^2-16\sqrt{21+4x-x^2}+16$$

Пусть $\sqrt{21+4x-x^2}=\alpha \geqslant 0$

Тогда: $10-2\alpha=4\alpha^2-16\alpha+16;$

$$2\alpha^2-7\alpha+3=0 \iff \left[\begin{array}{l}\alpha=3;\\ \alpha=\frac{1}{2};\end{array}\right.$$

1 случай: $\alpha=3$: $\sqrt{21+4x-x^2}=3$

$21+4x-x^2=9;$

$$x^2-4x-12=0 \iff \left[\begin{array}{ll}x=6 & (\in ОДЗ)\\ x=-2 & (\in ОДЗ).\end{array}\right.$$

2 случай: $\alpha=\frac{1}{2}$: $\sqrt{21+4x-x^2}=\frac{1}{2}$

$21+4x-x^2=\frac{1}{4}$

$$x^2-4x-\frac{83}{4}=0 \iff \left[\begin{array}{l}x=2+\frac{3}{2}\sqrt{11} \ (\in ОДЗ)\\ x=2-\frac{3}{2}\sqrt{11};\end{array}\right.$$

$x=6$, $x=-2$, $x=2+\frac{3}{2}\sqrt{11}$ подходят по ОДЗ;

Проверка: $x=6$ - корень;

$x=-2$ - не подходит;

$x=2+\frac{3}{2}\sqrt{11}$ - не подходит;

$\Rightarrow x=6$ - единственный корень;

Ответ: $x=6$

211006400 (U846344 M1277824)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006400**

ID профиля: **846344**

Вариант 10

Чистовик

ЛИСТ 1

Задание 4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10; \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81; \end{cases} \Leftrightarrow$$

Замена: $\begin{cases} x^2+y^2 = \alpha \geq 0 \\ x^2y^2 = \beta \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{\alpha} + \beta = 10 \\ \alpha^2 + 5\beta = 81; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 10 - \dfrac{6}{\alpha} & (1) \\ \alpha^2 + 5\left(10 - \dfrac{6}{\alpha}\right) = 81 & (2) \end{cases}$$

(2): $\alpha^2 + 50 - \dfrac{30}{\alpha} = 81$

$$\alpha^3 - 31\alpha - 30 = 0;$$

$$(\alpha+1)(\alpha^2 - \alpha - 30) = 0$$

$$(\alpha+1)(\alpha-6)(\alpha+5) = 0$$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \alpha = 6 \\ \alpha = -5 \end{array}\right.$, но $\alpha > 0 \Rightarrow \underline{\alpha = 6}$

$\beta = 10 - \dfrac{6}{\alpha} = 9;$

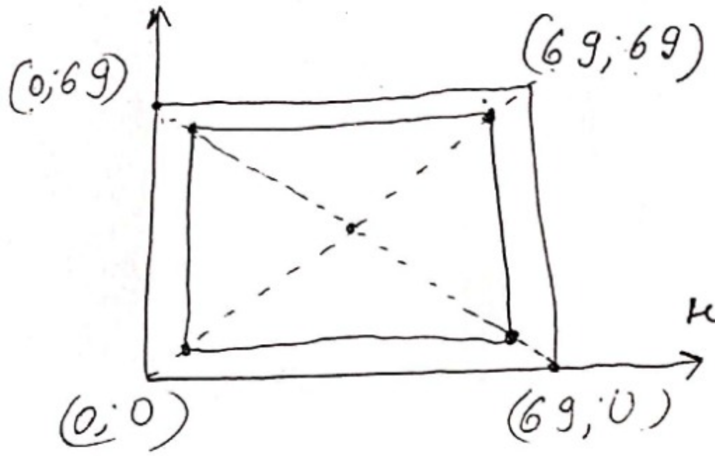
$$\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 6; \\ x^2y^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{9}{x^2} = 6 \\ y^2 = \dfrac{9}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-3)^2 = 0 \\ y^2 = \dfrac{9}{x^2}; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = \dfrac{9}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3}; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

211006400 (U846344 M1277825)

Задание 5   Листовик.   ЛИСТ 2



Ограничим квадрат внутри квадратом 67×67; На диагоналях у него по 68 к узлов, причем диагональ не проходит через центральный узел.

На диагонали $y = x$ 68 узлов, а всего узлов 68^2 => выбрать пару можно $68(68^2-1)$ способом, и еще требуется исключить те случаи, которые запрещены условием: $2 \cdot 67$ клеток.

Итоговое кол-во способов для 1-й диагонали: $68 \cdot (68^2 - 1 - 2 \cdot 67)$

На второй тоже $68 \cdot (68^2 - 1 - 2 \cdot 67)$

Осталось вычесть повторяющиеся способы:

$$\cancel{2 \cdot 68(68^2 - 1 - 2 \cdot 67) - 68^2 =}$$
$$\cancel{= 68(2 \cdot 67 \cdot 69 - 2 \cdot 67 - 68) = 68(67^2 - 68)}.$$

на втором аналогично => всего $2 \cdot 68(68^2 - 1 - 2 \cdot 67)$

Вычтем повторяющиеся способы:

их $68^2 - 4$, т.к 4 способа выбрать на концах квадрата

=> общее кол-во способов: $\boxed{2 \cdot 68(68^2 - 1 - 2 \cdot 67) - 68^2 + 4} =$

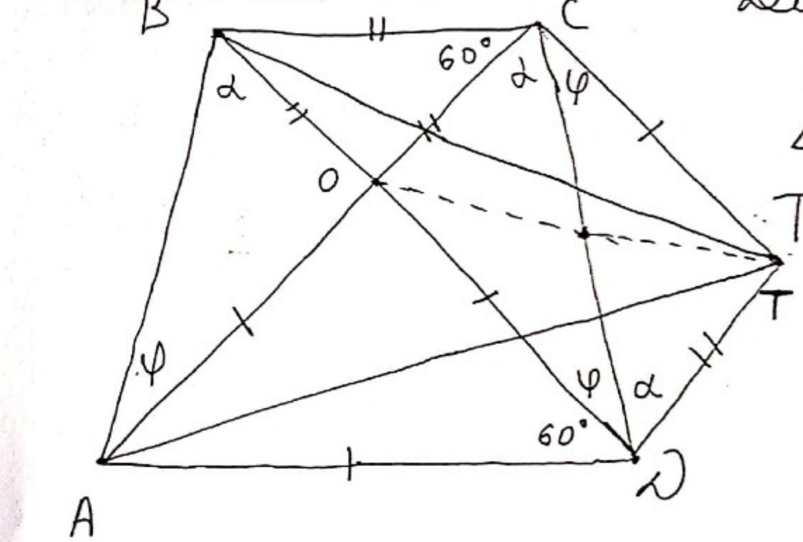
$\cancel{=}\, 68$

211006400 (U846344 M1277825)

ответ.

Задание 6 чистовик

ЛИСТ 3



Дано: четырехугольник ABCD

$AC \cap BD = O$

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные.

T симметрична O отн. сер. BC.

а) Док-ть: $\triangle ABT$ правильный.

б) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = ?$ $BC = 2$, $AD = 7$.

Решение.

а) Из условия следует, что $\angle OAD = 60^\circ = \angle CBO$, и

и $\angle OAD = \angle BCO = 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} BC \parallel AD \\ ABCD \text{ - вписанный} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ABCD - равнобокая трапеция. ($AB = CD$).

Из симметрии следует, что OCTD - параллелограмм. (диагонали делятся пополам в т. пересеч.)

Пусть $\angle ODC = \angle DCT = \angle BAC = \varphi$

и $\angle ABD = \angle OCD = \angle CDT = \alpha$

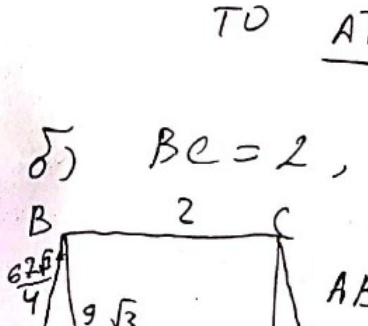
Тогда $\alpha + \varphi = 180^\circ - \angle BOA = 60^\circ$;

$\triangle ATD = \triangle BCT$ (по двум сторонам и углу между ними).

$\Rightarrow$ $AT = BT$. Но кроме того, $\triangle OCD = \triangle ATD$ (по этому же признаку) $\Rightarrow AT = CD$, а т.к $CD = AB$,

то $AT = AB = BT \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный, ч.т.д.

б) $BC = 2$, $AD = 7$. Сделаем мини-рисунок для подсчета:



$BB' = CC' = \frac{\sqrt{3}}{2}(2+7) = \frac{9}{2}\sqrt{3}$; $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{2+7}{2}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{81}{4}\sqrt{3}$;

$AB = \sqrt{\frac{81}{4}\cdot 3 + \frac{25}{4}} = \sqrt{67}$

$\Rightarrow S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} AB\cdot AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{67}{4}\sqrt{3}$

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{67}{4}\sqrt{3}}{\frac{81}{4}\sqrt{3}} = \frac{67}{81}$.

Ответ: а) ч.т.д; б) $\frac{67}{81}$;