Часть 1

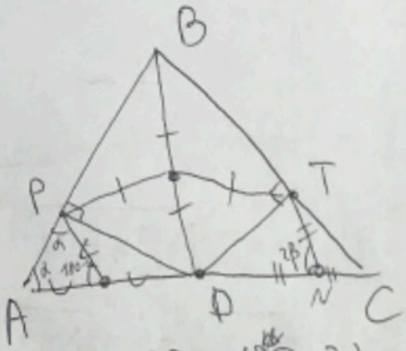
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

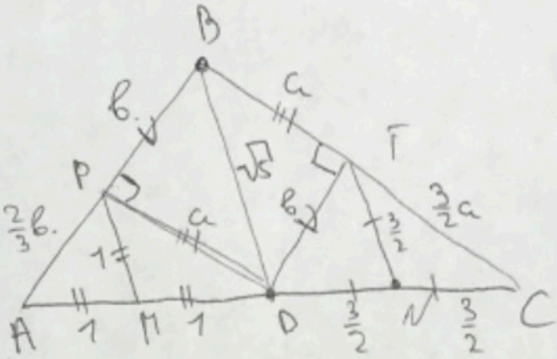
Шифр: **211006345**

ID профиля: **312040**

Вариант 10

Черновик.





$2\beta = 180 - 2\alpha$

$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle B = 90^\circ$

$a^2 + b^2 = 5$

$\frac{5}{3}b$

$\frac{25}{9}(b^2 + a^2) = 5$

$\frac{5}{3}b \quad \frac{5}{2}a$

$x+3+9+6\sqrt{x+3} = 7-x$

$25\left(\frac{b^2}{9} + \frac{a^2}{4}\right) = 25.$

$6\sqrt{x+3} = -5-2x.$

$4b^2 + 9a^2 = 36$

$36x + 108 = 25 + 20x + 4x^2.$

$a^2 + b^2 = 5 \,|\cdot 4$

$4a^2 + 4b^2 = 20.$

$5a^2 = 16.$

$a = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$\frac{16}{5} + b^2 = 5$

$b^2 = \frac{9}{5}.$

$b = \frac{3}{\sqrt{5}}.$

$BC = \frac{5}{2}a = 2\sqrt{5}.$

$b = \sqrt{5}.$

$5.$

211006345 (U312040 M1276200)

Черновик.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$D = 256 + 16 \cdot 83$

$-x^2+4x+21=0$

$\sqrt{\frac{40+3\sqrt{22}}{8}}$

$x^2-4x-21=0$

-2. $7-$

$(x+3)(x-7)$

$1-3+4 = \frac{40-3\sqrt{22}}{8}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$x+3-7+x+16-2\sqrt{(7-x)(x+3)} - 8\sqrt{(7-x)4} + 4\sqrt{x+3} =$

$= 4(x+3)(7-x) = 4(7x-x^2+21-3x) = -4x^2+16x+84$

$a+b=10$.

$3-1+4=2\cdot 3$ +

$701 \,|\, 13$, -65, 9, 51

$-(x+3)-(7-x)$

$1-3+4=6$.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} - 6 = -(x+3)+2\sqrt{(x+3)(7-x)}-(7-x) =$

$= -(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2$.

$701 \,|\, 19$, $-\cancel{61}$, 9, 21

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}+1) = 6$.

16

1402

701

$701 \,|\, 29$, -58, 2

$a^2+a-6=0$.

$(a-2)(a+3)$

$x-4=2\sqrt{7-x}$

$x^2-8x+16=28-4x$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$

$x^2-4x-12=0$.

$701 \,|\, 23$, -69, 3, 11

$x+3 = 4+7-x+4\sqrt{7-x}$

$(x+2)(x-6)=0$

$2x=$

$x=-2$

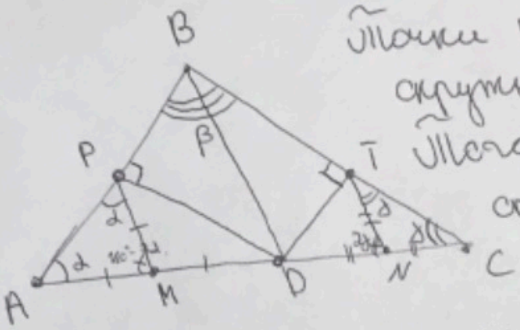
$x=6$.

$2x-8=4\sqrt{7-x}$

211006345 (U312040 M1276200)

Чистовик.

1 а)



Точки P,B,T и P лежат на одной окружности, при этом BP- диаметр. Тогда $\angle BPD=\angle BTD=90^\circ$ (т.к. углы, опирающиеся на диаметр, равны 90°)

Тогда $\triangle APD$ и $\triangle CTD$ - прямоугольные, при этом M- середина AD, а N- середина DC => $AM=PM=MD$ и $DN=TN=NC$ (т.к. в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине этой гипотенузы)

Пусть $\angle BAC=\alpha$; $\angle BCA=\gamma$; $\angle ABC=\beta$

$AM=PM \Rightarrow \triangle AMP$- равнобедренный $\Rightarrow \angle APM=\angle BAC=\alpha$.

Тогда $\angle AMP=180^\circ-\underset{\angle BAC}{\underset{\parallel}{\angle PAM}}-\angle APM=180^\circ-2\alpha$ (сумма углов в тр-ке 180°)

Аналогично, $\angle TNC=180^\circ-2\gamma \Rightarrow \angle DNT=180^\circ-\angle TNC=2\gamma$ (смежные углы)

$PM \parallel TN$ по условию $\Rightarrow \angle PMA=\angle DNT$ (соответственные углы при параллельных прямых), т.е. $\underset{\alpha+\beta+\gamma}{\underset{\parallel}{180^\circ}}-2\alpha=2\gamma$. (сумма углов $\triangle ABC$ равна 180°)

~~Итак~~ $180^\circ=2\alpha+2\gamma$

$90^\circ=\alpha+\gamma$. (1)

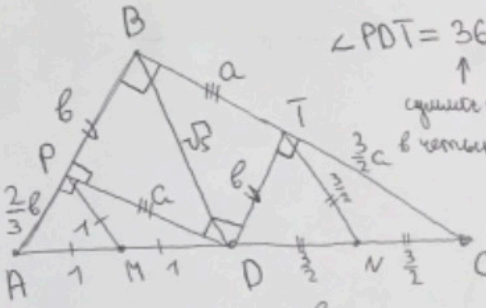
При этом известно, что $180^\circ=\alpha+\beta+\gamma$.

Тогда (1) $\Rightarrow 180^\circ=90^\circ+\beta \Rightarrow \underset{\angle ABC}{\underset{\parallel}{\beta}}=90^\circ$

Ответ: $\angle ABC=90^\circ$

Чистовик.

① б)



$\angle PDT = 360^\circ - \underbrace{\angle PBT}_{=90^\circ} - \underbrace{\angle BPD}_{=90^\circ} - \underbrace{\angle BTD}_{=90^\circ} = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$

сумма углов в четырёхугольнике (из пункта (а))

Тогда PBTD − прямоугольник (т.к. в нём все углы прямые)

Тогда $PD = BT = a$; $PB = DT = b$

$PM = AM = MD \Rightarrow PM = \frac{1}{2}(AM + MD) = \frac{1}{2}AD$

$AD = 2PM = 2$

Аналогично $DC = 2 \cdot TN = 3$.

Заметим, что $PD \parallel BT$ (т.к. PBTD − прямоугольник), т.е. $PD \parallel BC$.

Тогда по теореме Фалеса

$\frac{AP}{PB} = \frac{AD}{DC}$, т.е. $\frac{AP}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow AP = \frac{2}{3}b$.

Аналогично $\frac{CT}{BT} = \frac{DC}{AD}$, т.е. $\frac{CT}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow CT = \frac{3}{2}a$

$AC = AD + DC = 2 + 3 = 5$.; $AB = AP + BP = b + \frac{2}{3}b = \frac{5}{3}b$; $BC = BT + TC = a + \frac{3}{2}a = \frac{5}{2}a$

$\triangle ABC$ − прямоугольный $\Rightarrow$ по теореме Пифагора $AB^2 + BC^2 = AC^2$, т.е.

$\frac{25}{9}b^2 + \frac{25}{4}a^2 = 25 \;|\cdot \frac{36}{25}$

$4b^2 + 9a^2 = 36$. (1)

$\triangle BPD$ − прямоугольный $\Rightarrow$ по теореме Пифагора $PB^2 + PD^2 = BD^2$, т.е.

$a^2 + b^2 = 5 \;|\cdot 4$

$4a^2 + 4b^2 = 20$ (2)

~~Сложим~~ Вычтем (2) и (1)

$4b^2 + 9a^2 - 4b^2 - 4a^2 = 36 - 20$.

$5a^2 = 16$.

$a = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow b = \sqrt{5 - a^2} = \sqrt{5 - \frac{16}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Тогда $AB = \frac{5}{2}a = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$; $BC = \frac{5}{3}b = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

① продолжение б)　　Чистовик

$\triangle ABC$ - прямоугольный $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = 5$.

Ответ: $S_{ABC} = 5$

~~Чер~~ Чистовик.

(2) $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} - 2\sqrt{(3+x)(7-x)} + 4 = 0 \quad \Big| + \underbrace{x+3+7-x} = 10$

$\underset{(\sqrt{x+3})^2}{\underbrace{x+3}} - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} + \underset{(-\sqrt{7-x})^2}{\underbrace{7-x}} + \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 10.$

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 + \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} - 6 = 0.$

Обозначим $a = \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}$

$a^2 + a - 6 = 0.$

$(a-2)(a+3) = 0.$

$\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -3. \end{array}\right.$

1° $a = 2.$

т.е. $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$

Возведём в квадрат обе части равенства

$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} + 7 - x = 4.$

$-2\sqrt{(x+3)(7-x)} = -6 \quad |:(-2)$

$\sqrt{(x+3)(7-x)} = 3 \quad |^2$ (возведём в квадрат)

$(x+3)(7-x) = 9$

$21 + 4x - x^2 = 9$

$x^2 - 4x - 12 = 0.$

$(x+2)(x-6) = 0.$

Проверим

1) $x = 6$

$\sqrt{6+3} - \sqrt{7-6} + 4 = 2\sqrt{21+4\cdot 6-6^2}$

$3 - 1 + 4 = 2\sqrt{9}$

$6 = 6$ (+)

2) $x = -2.$

$\sqrt{-2+3} - \sqrt{7+2} + 4 = 2\sqrt{21-8-4}$

$1 - 3 + 4 = 2\sqrt{9}$

$2 = 6$ (−).

2° $a=-3$. **Чистовик** ② продолжение.

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-3 \quad | \,{}^{\wedge}2$$

$$x+3-2\sqrt{(x+3)(7-x)}+7-x=9$$

$$-2\sqrt{(x+3)(7-x)}=-1 \quad | \,{}^{\wedge}2$$

$$4(x+3)(7-x)=1.$$

$$84+16x-4x^2=1$$

$$4x^2-16x-83=0.$$

$$D=\frac{(-16)^2-4\cdot4\cdot(-83)}{2\cdot4}=\frac{256+16\cdot83}{8}=32+2\cdot83=2\cdot(16+83)=2\cdot99=198$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{16+\sqrt{198}}{8}=\dfrac{16+3\sqrt{22}}{8} \\ x=\dfrac{16-\sqrt{198}}{8}=\dfrac{16-3\sqrt{22}}{8} \end{array}\right.$$

Проверим.

1) $x=\dfrac{16+3\sqrt{22}}{8}$

$$\sqrt{\frac{16+3\sqrt{22}}{8}+3}-\sqrt{7-\frac{16+3\sqrt{22}}{8}}+4=2\sqrt{\left(\frac{16+3\sqrt{22}}{8}+3\right)\left(7-\frac{16+3\sqrt{22}}{8}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{40+3\sqrt{22}}{8}}-\sqrt{\frac{40-3\sqrt{22}}{8}}+4.=2\sqrt{\frac{(40+3\sqrt{22})(40-3\sqrt{22})}{64}} \quad \Big|\cdot 2\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{40+3\sqrt{22}}-\sqrt{40-3\sqrt{22}}+8\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\underset{40^2}{\underset{\parallel}{1600}}-\underset{(3\sqrt{22})^2}{\underset{\parallel}{198}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1402}=\sqrt{701}$$

$$\underbrace{40+3\sqrt{22}+40-3\sqrt{22}+64\cdot2}_{\parallel\ 208}-\underbrace{2\sqrt{(40-3\sqrt{22})(40+3\sqrt{22})}}_{\substack{\wedge\\0}}+\underbrace{2\sqrt{(40+3\sqrt{22})8\sqrt{2}}}_{\substack{\wedge\\100}}-\underbrace{2\sqrt{(40-3\sqrt{22})8\sqrt{2}}}_{\substack{\wedge\\0}}=701$$

(т.к. $40+3\sqrt{22}<64$
$8\sqrt{2}<16$.

Тогда сумма не равна 701 ⊖.

Чистовик.

2) продолжение.

2) $x = \frac{16-3\sqrt{22}}{8}$

Заметим, что тогда $\sqrt{7-x} = \sqrt{\frac{40+3\sqrt{22}}{8}}$; $\sqrt{x+3} = \sqrt{\frac{40-3\sqrt{22}}{8}}$

Тогда правая часть не изменится, а левая уменьшится (по сравнению с первым случаем), т.к. раньше у нас было $\sqrt{\frac{40+3\sqrt{22}}{8}} - \sqrt{\frac{40-3\sqrt{22}}{8}} + 4$, а стало $\sqrt{\frac{40-3\sqrt{22}}{8}} - \sqrt{\frac{40+3\sqrt{22}}{8}} + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если в первом случае левая часть была меньше правой, то сейчас тем более левая часть меньше правой $\ominus$.

Тогда подходит только $x=6$.

Ответ: $\{6\}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

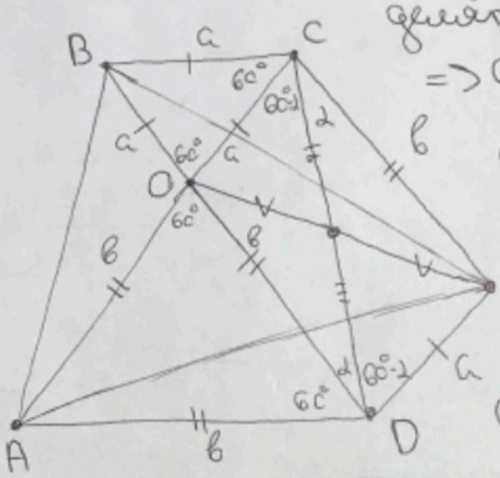
Шифр: **211006345**

ID профиля: **312040**

Вариант 10

Чистовик.

⑥ а) Заметим, что OCTD - параллелограмм (т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам) =>



$\Rightarrow OC = DT;\ OD = CT$.
$\quad\;\; \overset{\|}{a} \qquad\quad \overset{\|}{b}$

Пусть $\angle BDC = \alpha$.

Тогда $\angle ACD = 60^\circ - \alpha$, т.к.

$\angle CCD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
$\quad\quad \| \;\angle BOC$

OCTD - параллелограмм =>

$\Rightarrow \angle OCD = \angle CDT;\ \angle CDO = \angle DCT = \alpha$ (т.к. $CO \parallel DT$ и $DO \parallel CT$)
$\quad\quad \overset{\|}{60^\circ - \alpha}$.

Тогда $\angle ADT = \angle ODA + \angle BDC + \angle CDT = 60^\circ + \alpha + 60^\circ - \alpha = 120^\circ$

Тогда $\triangle ACB = \triangle ADT$ ($BC = DT = a$; $AD = AC = b$; $\angle ACB = \angle ADT = 120^\circ$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \angle CCD$, т.к. вертик.)

$\Downarrow$

$AT = AB$.

Аналогично $\triangle BCT = \cancel{\triangle ADT}\ \triangle ACB \Rightarrow BT = AB$

Тогда $AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный

ч.т.д.

б) $a = 2 = BC$

$b = 7. = AD$.

Очевидно, что если проведём высоту из точки C в $\triangle BCC$(~~?~~) и продлим её за точку до пересечения с AD, то она будет также перпенди-

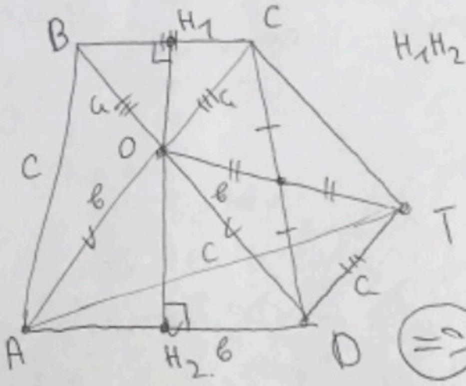
Чистовик.

⑥ Мк

кулярна AD (т.к. $\angle CBC = \angle ODA = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$)

Тогда это высота трапеции (ABCD- трапеция, т.к.)

$$S_{ABCD} = \frac{H_1H_2}{2}\cdot(BC+AD)$$



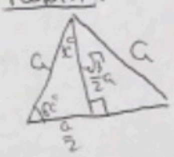
$$H_1H_2 = CH_1 + OH_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

высоты в правильных треугольниках

$\Rightarrow$

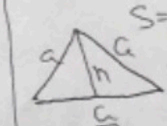
$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)\underset{BC}{(}\underset{AD}{a+b)}}{2} = S_{ABCD}$$

Факт 1



т.к. $h = a\cdot\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Факт 2



$$S = \frac{ah}{2} = \frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Тогда $S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2+7)^2 = \frac{81\sqrt{3}}{4}.$

Теперь посчитаем S_{ABT}

Пусть $AB=c$. Тогда $S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}c^2}{4}$

Осталось найти c.

$c = AT$. (ΔABT- правильный)

$DT = a$
$AD = b$ (из пункта а)
$\angle ADT = 120^\circ$

Напишем теорему косинусов для ΔADT

$AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2AD\cdot DT\cdot\cos\angle ADT$, т.е.

$$c^2 = a^2+b^2 - 2ab\cdot\underbrace{\cos 120^\circ}_{=-\frac{1}{2}} = a^2+b^2+ab = 4+49+14 = 67.$$

$c = \sqrt{67}$

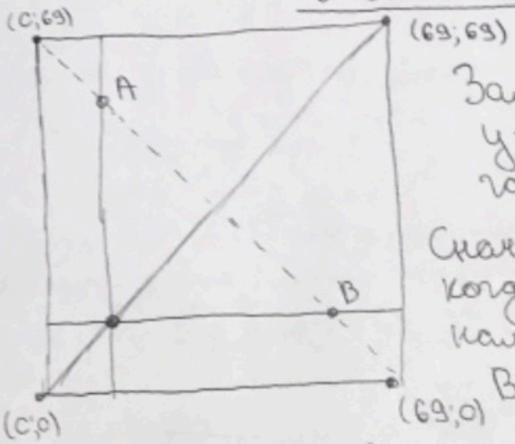
Тогда $S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}\,67}{4}$

Тогда $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 67}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 81} = \frac{67}{81}$

Ответ: $\frac{67}{81}$

Чистовик

5



Заметим, что прямые $y=x$ и ~~x~~ $y=69-x$ – это диагонали квадрата.

Сначала посчитаем случаи, когда одна из точек на диагонали, а другая – нет.

Всего в каждом столбце и в каждой строке 68 узлов => всего узлов $68^2=4624$

На каждой диагонали также по 68 узлов. ~~(т.к. на др~~

Тогда суммарно на двух диагоналях 136 узлов (т.к. ~~дауа~~ на стороне квадрата чётное число узлов (70), то диагонали пересекаются не в узле, а в клетке => каждый узел ~~ри~~ считается ровно один раз)

Тогда клеток не на диагоналях $4624-136=4488$

При этом не должно быть клеток, у которых хотя бы одна координата совпадает с нашей клеткой на диагонали => нам не подходит ещё $67+66=133$ клетки (т.к. суммарно в одном столбце и одной строке $68+68-1=135$ клеток, плюс ещё нужно выкинуть ~~или~~ узлы A и B, т.к. пересечение посчитано второй раз мы их ~~уже~~ уже выкинули, когда считали клетки на диагоналях) => оставшихся подходящих узлов $4488-133=4355$.

Тогда всего вариантов выбрать два узла, когда ровно ~~два~~ ~~на тока~~ один узел на диагонали – $4355 \cdot 136$. (и все они различны)

$4355 \cdot \cancel{16}\,138 = 600990$.

Чистовик.

(5) Теперь разберём случай, когда оба узла на диагоналях.

Всего узлов на диагоналях 138.

Способов выбрать первый узел у нас 138, а второй – 135 (т.к. после выбора первого у нас останется 137 вариантов, плюс ещё два не подойдут, т.к. у них будет такая же X или y координата)

Тогда способов выбрать два узла $\frac{138\cdot 135}{2}$ (делим на 2, т.к. каждый способ посчитан два раза, они отличаются лишь порядком выбора 1 и 2 узлов)

$$\frac{138\cdot 135}{2}=68\cdot 135=9180.$$

Тогда всего способов. $600990+9180=610170$.

Ответ: 610170