Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006276**

ID профиля: **854518**

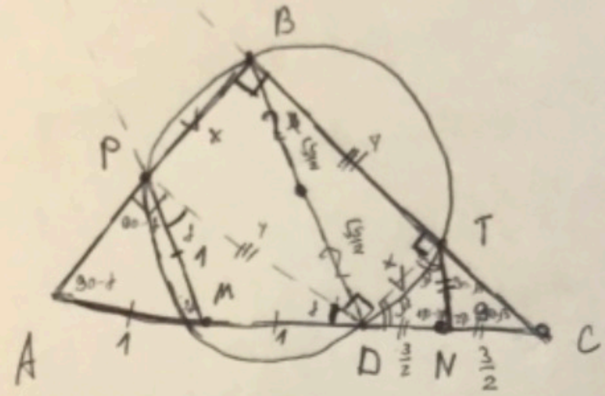
Вариант 10

Черновик.

$x+\gamma=\beta$

$x=\beta-\gamma$

①



$AM=MD$

$DN=NC$

$PM \parallel TN$

$MP=1$

$NT=\frac{3}{2}$

$BD=\sqrt{5}$

S_{ABC}

$\angle ACB=\angle ADB-\angle DBT$

$2\gamma=180-2\beta$

$2\gamma+2\beta=180$

$\gamma+\beta=90$

$\angle ABC - ?$

а) 90° б)

②
$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}=2\cdot\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}$$

$(x+3)(7-x)=$

$=7x-x^2+21-3x=$

$=21+4x-x^2$

$\cancel{a-b+4=2ab}$

$\cancel{a-b+4=2\sqrt{ab}}$

$a^2+b^2=10$

$a-b+4=2ab$

$a^2+b^2+a-b+4=10+2ab$

$(a-b)^2+(a-b)-6=0$

$D=25$

$a-b+4=2ab$

$2ab-a+b-4=0$

$\cancel{a(2b-1)+b-4=0}$

$a^2+b^2=x+3+7-x=$

$=10$

$a-b=\frac{-1\pm5}{2}$

$\left[\begin{array}{l}a-b=2\\a-b=-3\end{array}\right.$

211006276 (U854518 M1275572)

Черновик

① $x^2+y^2=5$ $\qquad$ 7,2

$x^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cos(180-2\beta)$ $\qquad$ $\frac{7,2}{4}=1,8$

$y^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(180-2\gamma)$

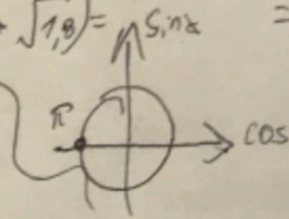
$\frac{3}{2}$

$=$

$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1,8}+\sqrt{0,8}\right)\left(\sqrt{3,2}+\sqrt{7,2}\right)=$

$=\left(\sqrt{1,8}+\sqrt{0,8}\right)\left(\sqrt{0,8}+\sqrt{1,8}\right)=$

$=1,8+2\sqrt{1,8\cdot0,8}+0,8$



$\cos(180-\varepsilon)=$

$=\cos180\cdot\cos\varepsilon+\sin180\cdot\sin\varepsilon=$

$=-\cos\varepsilon+0=$

$=-\cos\varepsilon$

$2\gamma+2\beta=180$

$x^2+y^2=5$

$x^2=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\cdot\cos2\beta$

$=2,6+2\sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{4}{5}}=2,6+2\sqrt{\frac{36}{25}}=2,6+2\cdot\frac{6}{5}=2,6+\frac{12}{5}=$
$=2,6+2,4=\boxed{5}$

$\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\cdot\underbrace{\cos(180-2\gamma)}_{=-\cos2\gamma}+2+2\cos2\gamma=5$

$y^2=2+2\cdot\cos2\gamma$

$y^2=2+2\cdot\frac{3}{5}=2+1,2=$

$=3,2$

$4,5-4,5\cos2\gamma$

$+2+2\cos2\gamma=5$

$AP^2=2-2\cdot\cos2\gamma=$

$=2-\frac{6}{5}=0,8$

$x^2=1,8$

$6,5-5-2,5\cos2\gamma=0$

$1,5=2,5\cos2\gamma$

$3=5\cos2\gamma$

$\cos2\beta=-\frac{3}{5}$

$CT^2=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{2}+\frac{27}{10}=4,5+2,7=7,2$

$\cos2\gamma=\frac{3}{5}$

Черновик

9

$$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$$

$$y^2-y(4a+4x)+5a^2+8x^2+12ax=0$$

1) Обе снизу

$y=2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)-5>a$

$-a-5>a$

$2a<-5$

$a<-\frac{5}{2}$

2) Обе сверху

...

$D=16a^2+32ax+16x^2-20a^2-32x^2-48ax=$

$=-4a^2-16ax-16x^2=$

$=-4(a^2+4ax+4x^2)=$

$=-4(a+2x)^2$

$y=2a-5>\frac{3}{a}$

$$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$$

$a=-2x$

$x=-\frac{a}{2}$

$a\neq0$

$2x-y=5$

$y=2x-5$

$x^2-2ax-y+a^2+\frac{3}{a}=0$

$y=\frac{4a+4x}{2}=2a+2x=$

$=2a-a=$

$=a$

$(x-a)^2+\frac{3}{a}=y$

$\frac{2a^2-5a}{a}-\frac{3}{a}>0$

$y=(x-a)^2+\frac{3}{a}$

$\frac{2a^2-5a-3}{a}>0$

$D=25+4\cdot2\cdot3=$

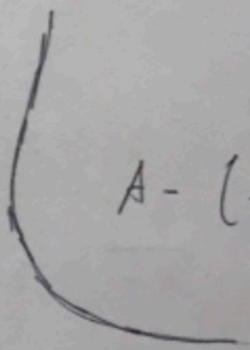
$=25+24=49$

$a=\frac{5\pm7}{2}$

$a=6\quad a=-1$

$B\left(a;+\frac{3}{a}\right)$

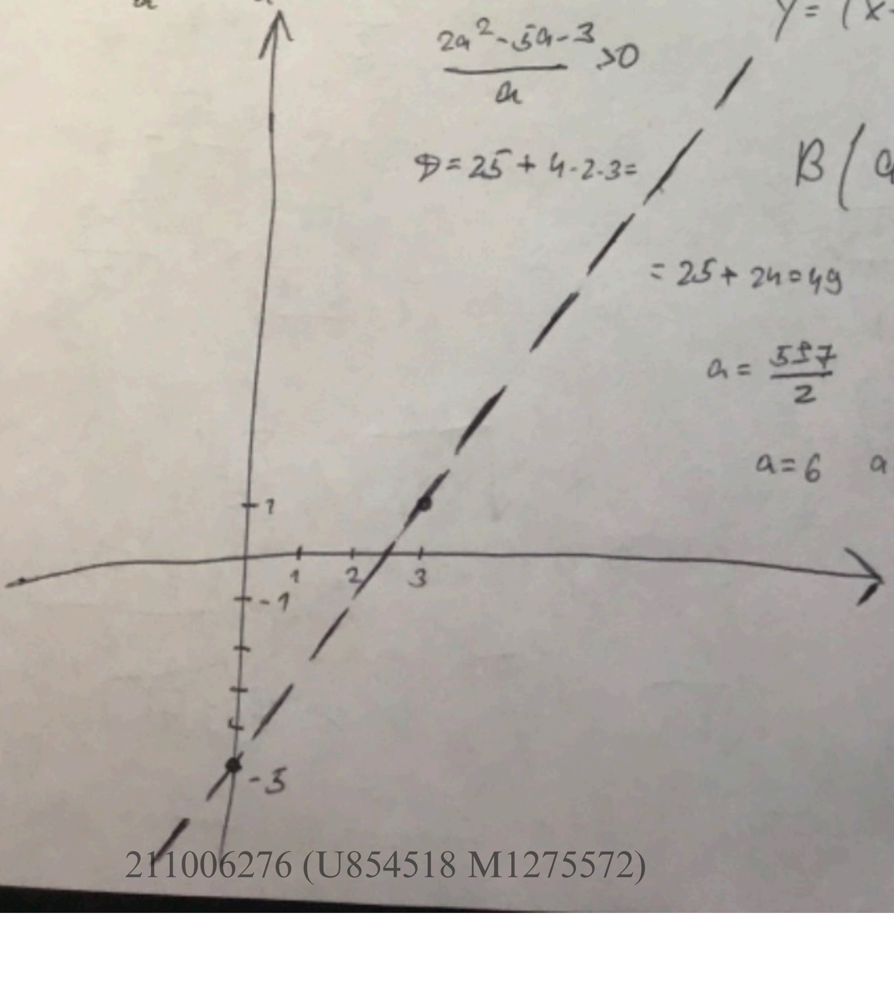
$A-\left(-\frac{a}{2};a\right)$



$\cancel{x=a}$

$\cancel{x=-\frac{a}{2}}$

$a=-\frac{a}{2}$



$y=(x+2x)^2-\frac{6}{x}=$

$=9x^2-\frac{3}{2x}$

211006276 (U854518 M1275572)

Чистовик.

1

Дано: $AM = MD$

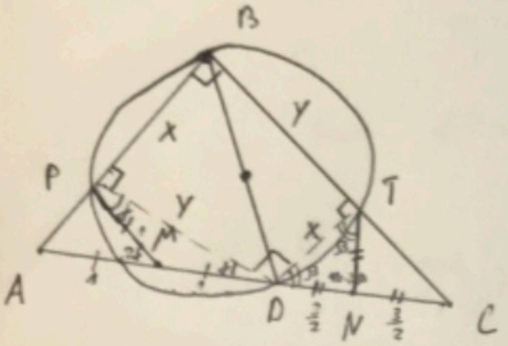
$DN = NC$

$PM \parallel TN$

а) $\angle ABC$ − ?

б) $MP = 1$, $NT = \frac{3}{2}$, $BD = \sqrt{5}$

S_{ABC} − ?



а) Соединим DP и DT.

BD − диаметр $\Rightarrow \angle DPB = \angle DTB \Rightarrow \angle DPA = \angle DTC = 90^\circ$

$\angle DTB = 90^\circ$

PM и TN − медианы в прямоуг. треуг. ΔAPD и ΔDTC, следовательно $PM = \frac{1}{2} AD = AM = MD$, $TN = \frac{1}{2} DC = DN = NC$

Обозначим углы как на рисунке.

$PM \parallel TN \Rightarrow 2\alpha = 180 - 2\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90$

$\angle PDT = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$

Ответ: 90°

б) Из предыдущего пункта понятно, что PBTD − прямоугольник.

Из теоремы Пифагора и теоремы косинусов:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\left(\cos(180 - 2\beta)\right) = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\cos 2\beta \\ y^2 = 2 + 2\cos 2\alpha \end{array}\right.$$

$\cos(180 - x) = -\cos x$

1

См. продолж.

Чистовик

(1) Решаем данную систему:

продолж.

$$4{,}5 + 4{,}5\cos(180 - 2t) + 2 + 2\cos 2t = 5$$

$$4{,}5 - 4{,}5\cos 2t + 2 + 2\cos 2t = 5$$

$$\cos 2t = \frac{3}{5}$$

$$y^2 = 2 + 2\cdot\frac{3}{5} = 3{,}2 \qquad y = \sqrt{3{,}2}$$

$$x^2 = 1{,}8 \qquad x = \sqrt{1{,}8}$$

Теор. косинусов для ΔAPM:

$$AP^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot\frac{3}{5} = 0{,}8$$

Теор. косинусов для ΔTNC:

$$Tc^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\cdot\frac{3}{5} = 4{,}5 + 2{,}7 = 7{,}2$$

$$S_{ABc} = \frac{1}{2}(x + AP)(y + Tc) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1{,}8} + \sqrt{0{,}8}\right)\left(\sqrt{3{,}2} + \sqrt{7{,}2}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{1{,}8} + \sqrt{0{,}8}\right)\left(\sqrt{0{,}8} + \sqrt{1{,}8}\right) =$$

$$= 1{,}8 + 0{,}8 + 2\sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{4}{5}} =$$

$$= 2{,}6 + 2\cdot\frac{6}{5} = 2{,}6 + 2{,}4 = 5$$

Ответ: 5

211006276 (U854518 M1275572)

③ Чистовик

② $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2 \cdot \sqrt{21+4x-x^2}$ $\qquad a, b > 0$

$\underset{a}{\shortparallel} \qquad \underset{b}{\shortparallel} \qquad \underset{ab}{\shortparallel}$

$$\begin{cases} a^2+b^2 = x+3+7-x = 10 \\ a-b+4 = 2ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 10 \\ a-b+4 = 2ab \end{cases}$$

$a^2+b^2+a-b+4 = 10+2ab$

$a^2+b^2-2ab+a-b-6=0$

$(a-b)^2+(a-b)-6=0$

$D = 25$

$a-b = \frac{-1\pm5}{2}$

1) $a-b=2$

$(b+2)^2+b^2=10$

$b^2+2b-3=0$

$D=16$

$b = \frac{-2\pm4}{2}$

$\left[\begin{array}{l} b=1 \Rightarrow a=3 \\ b=-3 \Rightarrow \varnothing \end{array}\right.$

$\sqrt{x+3}=3$ $\qquad \boxed{x=6}$

$\sqrt{7-x}=1$

2) $a-b=-3$

$(b-3)^2+b^2=10$

$2b^2-6b-1=0$

$b = \frac{3+\sqrt{11}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{11}-3}{2}$

$b = \frac{3-\sqrt{11}}{2} \Rightarrow \varnothing$

$\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{11}-3}{2} \Rightarrow x = 7-3\sqrt{11}$

$\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{11}+3}{2} \Rightarrow x = -3-3\sqrt{11}$

не подх.

Ответ: $x=6$

211006276 (U854518 M1275572)

Чистовик

(3) $5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$

$y^2 - y(4a+4x) + 5a^2 + 8x^2 + 12ax = 0$

$D = -4a^2 - 16ax - 16x^2 =$

$= -4\cdot(a+2x)^2 < 0$, кроме $a = -2x$

$x = -\frac{a}{2}$

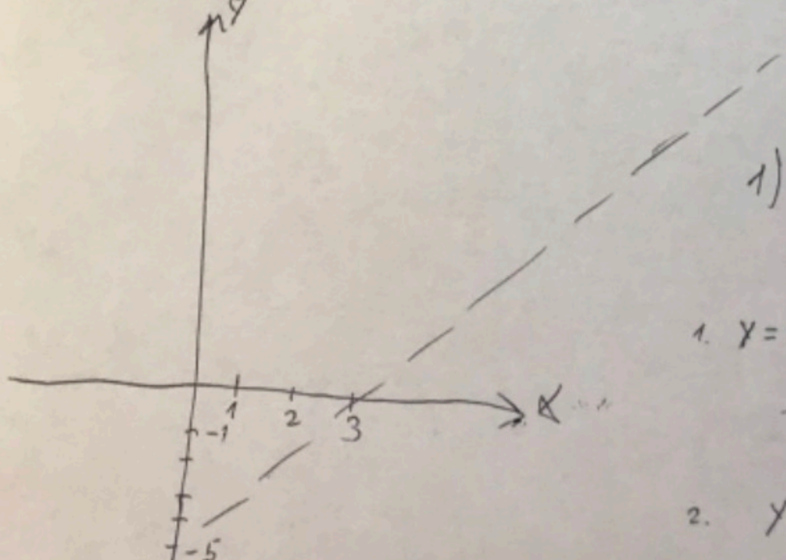
$y = \frac{4a+4x}{2} = 2a + 2x = a$

Если A сущ. то имеет координаты $\left(-\frac{a}{2}; a\right)$

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$ $\quad a \neq 0 \quad :a$

$y = (x-a)^2 + \frac{3}{a}$

Вершина в точке $x_0 = a$ $\Rightarrow$ $B - \left(a; \frac{3}{a}\right)$

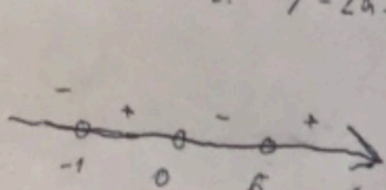


1) Обе точки под прямой

1. $y = 2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) - 5 > a$

$-a - 5 > a$ $\quad \boxed{a < -\frac{5}{2}}$

2. $y = 2a - 5 > \frac{3}{a}$



2) Обе точки над прямой

1. $-a-5 < a$

$\boxed{a > -\frac{5}{2}}$

$2a - 5 < \frac{3}{a}$

$\frac{2a^2 - 5a - 3}{a} > 0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006276**

ID профиля: **854518**

Вариант 10

Черновик

3) $x + y = -3\sqrt{5}$

$x - y = 3\sqrt{3}$

$x = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{2}$ $y = \frac{-3\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{2}$

4) $x + y = -3\sqrt{5}$

$x - y = -3\sqrt{3}$

$x = \frac{-3\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{2}$ $y = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{2}$

$(x+y)^2 = 27$

$(x-y)^2 = 45$

5) $x + y = 3\sqrt{3}$

$x - y = 3\sqrt{5}$

$x = \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{2}$

$y = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{2}$

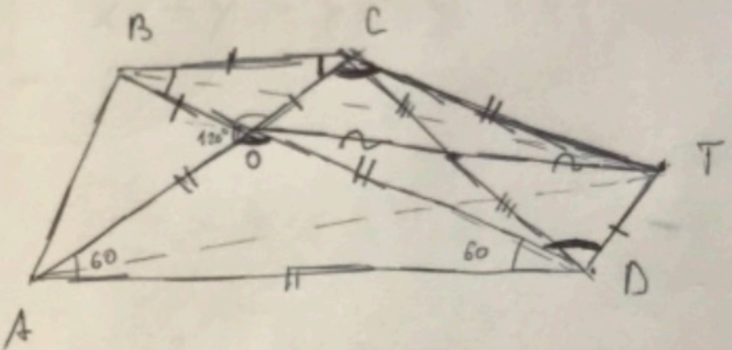
Вам Черновик

(7)

$\cos^2\alpha = \frac{64}{67}$ $\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha = 7\sin\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{3}{67}$ $\sqrt{3}\cos\alpha = 8\sin\alpha$

$\frac{67}{64}$ $tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{8}$



$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{3}{64} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{h}{2,5} = tg(60+\alpha)$

AT +

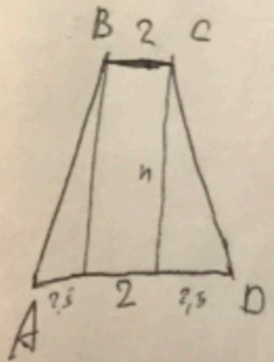
$\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{7}{\sin(60-\alpha)}$

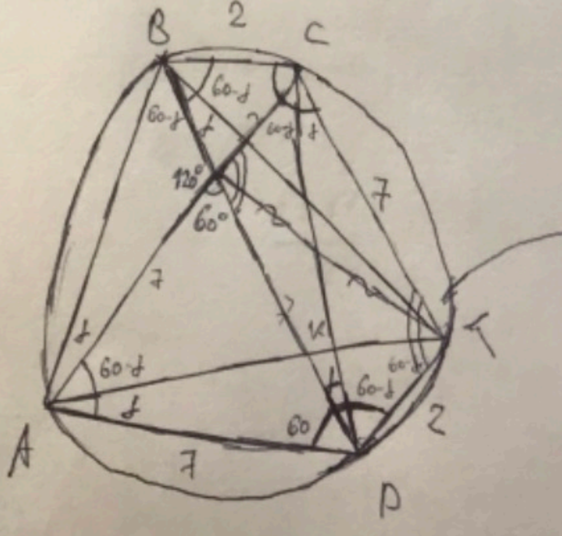
$\frac{AT}{\sin 120} = \frac{2}{\sin\alpha}$

а) +

$2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha - \frac{1}{2}\cdot\sin\alpha\right) = 7\sin\alpha$

б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$





$60+\alpha = \angle CTA$

$\angle CKT = 180 - 60 - 2\alpha = 120 - 2\alpha$

$180 - \cancel{60} - \alpha - \cancel{120} + 2\alpha = \alpha$

№2 Черновик

(4)

$$\frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \qquad a = x^2+y^2, \quad b = x^2y^2$$

$$(x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$x^4+y^4+7x^2y^2 = 81$$

$$(x^2+y^2)^2+5x^2y^2 = 81$$

$$\frac{6}{a} + b = 10 \qquad \frac{30}{a} + 5b = 50 \qquad a \geqslant 0$$

$$a^2+5b = 81$$

$a \neq 0$

$$a^2 - \frac{30}{a} = 31 \qquad \boxed{a \neq 0}$$

1. $a = -1$ ~~$-6+b=10$, $b=16$~~

$$a^3 - 30 = 31a \qquad 3\cancel{6}+\cancel{45}=81$$

$$(x+y)^2 = 36+9 = 45$$

$$a^3 - 31a - 30 = 0$$

$$(x-y)^2 = 27$$

$$\boxed{a=6 \quad b=9}$$

$a=-1$

$-1+31-30=0$

2. $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\sqrt{45} = 3\sqrt{5} \qquad \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r|l} a^3-31a-30 & a+1 \\ -\ a^3+a^2 & a^2-a-30 \\ \hline -a^2-31a & \\ -\ -a^2-a & \\ \hline -30a-30 & \end{array}$$

$$\frac{1+2\sqrt{5}+5}{2} + 5b = 81$$

$D = 1+4 = 5$

1) $x+y = 3\sqrt{5}$, $x-y = 3\sqrt{3}$

$$\frac{6+2\sqrt{5}}{2} + 5b = 81$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2}$$

$$3+\sqrt{5}+5b = \cancel{81}\ 78$$

$D = 1+120 = 121$

$$y = \frac{3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}$$

2) $x+y = 3\sqrt{5}$, $x-y = 3\sqrt{3}$

$$b = \frac{78-\sqrt{5}}{5}$$

$$a = \frac{1 \pm 11}{2} \qquad a = \cancel{-}5$$

$$x = \frac{3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2} \qquad y = \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2}$$

$a = 6$

Чистовик

④ $$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2\cdot y^2 = 81 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$\frac{30}{a} + 5b = 50$

$$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \\ a^2+5b=81 \end{cases}$$

$a^2 - \frac{30}{a} = 31$ $a \neq 0$ $*a$

$a^3-31a-30=0$

$a=-1$ - корень

$$\begin{array}{r|l} a^3-31a-30 & a+1 \\ -\underline{a^3+a^2} & \overline{a^2-a-30} \\ -a^2-31a & \\ -\underline{-a^2-a} & \\ -30a-30 & \end{array}$$

$a^2-a-30=0$

$D=121$

$a=\frac{1\pm 11}{2}$ $a=6$ $a=-5$

3.2) $x^2+y^2=36$
$xy=-3$

1) $a=-1$
не подх.

3) $a=6 \Rightarrow b=9$

$$\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$$

2) $a=-5$
не подх.

3.1) $x^2+y^2=36$
$xy=3$

см. продолж.

211006276 (U854518 M1275573)

Чистовик

4

продолж

3.1) $x^2+y^2=36$

$xy=3 \Rightarrow 2xy=6$

$(x+y)^2=45$

$(x-y)^2=27$

3.1.1) $x+y=3\sqrt{5}$

$x-y=3\sqrt{3}$

$x=\dfrac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2}$ $\quad y=\dfrac{3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}$

3.1.2) $x+y=3\sqrt{5}$

$x-y=-3\sqrt{3}$

$x=\dfrac{3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}$ $\quad y=\dfrac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2}$

3.1.3) Аналогично $x+y=-3\sqrt{5}$

$x-y=3\sqrt{3}$

$x=\dfrac{3\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2}$ $\quad y=\dfrac{-3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}$

3.1.4) Симметрично

$x=\dfrac{-3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}$ $\quad y=\dfrac{3\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2}$

3.2) $x^2+y^2=36$

$xy=-3 \Rightarrow 2xy=-6$

$(x+y)^2=27$

$(x-y)^2=45$

3.2.1) $x+y=3\sqrt{3}$

$x-y=3\sqrt{5}$

$x=\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2}$ $\quad y=\dfrac{3\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2}$

3.2.3) $x+y=-3\sqrt{3}$

$x-y=3\sqrt{5}$

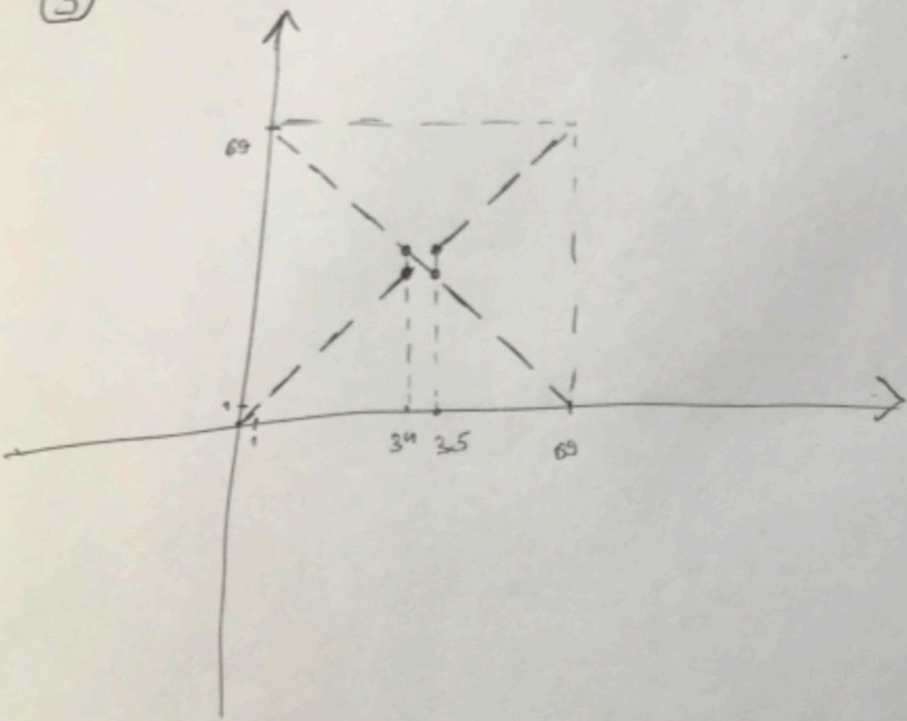
$x=\dfrac{3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}$ $\quad y=\dfrac{-3\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2}$

3.2.2) Симметрично, $x=\dfrac{3\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2}$ $\quad y=\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2}$

3.2.4) $x=\dfrac{-3\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2}$ $\quad y=\dfrac{3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}$

Чистовик.

5



Всего точек на $y=x$ и $y=69-x$ внутри квадрата — $68\cdot 2=136$ штук.

Всех точек внутри квадрата: $68\cdot 68=4624$ штуки.

1 случай:

Одна точка на прямых.

$$C_1 = 136\cdot(4624-136-2\cdot 66) =$$
$$= 136\cdot 4356 =$$

2 случай

Две точки на прямых.

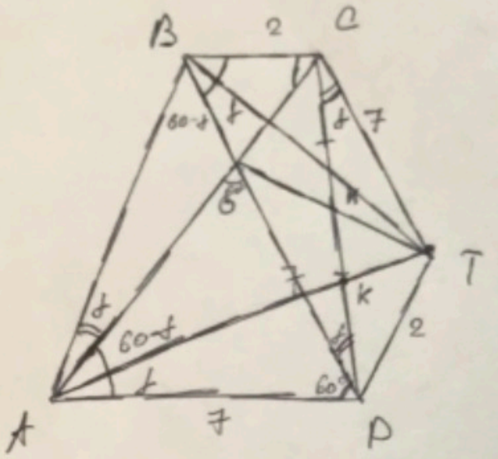
Нельзя занимать тот же узел и еще 2 узла чтобы не было параллельности

$$C_2 = \frac{136\cdot(136-3)}{2} = 68\cdot 133 = $$
$$=$$

Ответ: $136\cdot 4356 + 68\cdot 133 =$

Чистовик

(6)



Дано: ΔBOC, ΔAOD – прав.

$CK = KD$

$OK = KT$

а) Док-ть: ΔABT – прав.

б) $BC = 2$, $AD = 7$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

а) $ABCD$ – р/б трапеция.

($\angle CAD = \angle BCA = 60^\circ$, опираются на AB)

$CTDO$ – параллелограмм ($CK=KD$, $OK=KT$)

$ACTD$ – вписанная равнобедренная трапеция. $\Rightarrow \angle CDA = \angle CTA = 60+\alpha$

$\angle CKT = 180 - \alpha - 60 - \alpha = 120 - 2\alpha = \angle AKD$

$\angle KAD = 180 - 60 - \alpha - 120 + 2\alpha = \alpha \Rightarrow \angle CAT = 60 - \alpha \Rightarrow$

$\angle BAT = \alpha + 60 - \alpha = 60$

$BCTD$ – вписанная трапеция $\Rightarrow \angle TBD = \angle TCD = \alpha$

$\angle ABD = \cancel{\ldots} = 180 - 60 - \alpha - 60 = 60 - \alpha$

$\angle ABT = 60 - \alpha + \alpha = 60^\circ$

$\angle BAT = \angle ABT = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABT$ – правильный

б) По теореме синусов для ΔACT:

$\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{7}{\sin(60-\alpha)}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{8}$