Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006249**

ID профиля: **197670**

Вариант 10

№2. Стр№1

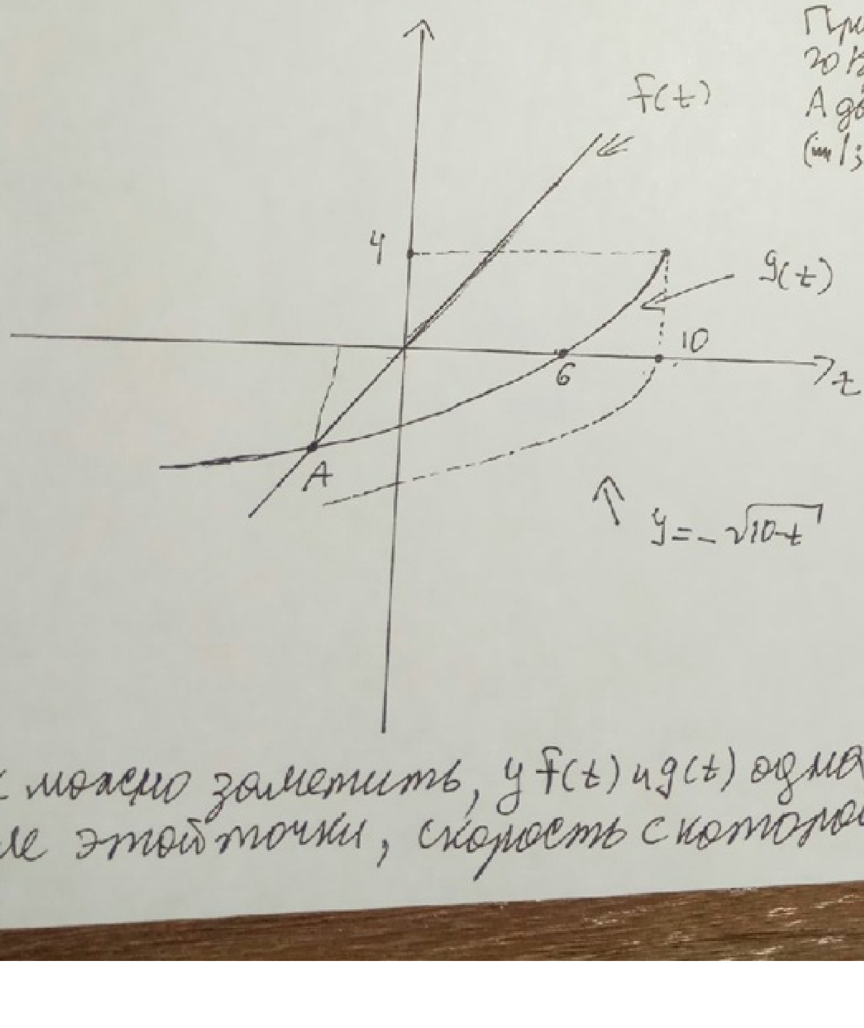
$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2} = 2\sqrt{(3+x)(7-x)}$, но $\sqrt{x+3}$, $\sqrt{7-x}$, $\sqrt{(3+x)(7-x)} \geq 0$, $\Rightarrow -3 \leq x \leq 7$. Заметим, что $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2}$ или $= -\sqrt{(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2}$, т.е. $(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 = 10 - 2\sqrt{(3+x)(7-x)}$

1) $2\sqrt{(3+x)(7-x)} = \sqrt{10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)}} + 4$

2) $2\sqrt{(3+x)(7-x)} = -\sqrt{10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)}} + 4$

Решение 1). пусть $\sqrt{(3+x)(7-x)} \cdot 2 = t \Rightarrow t = \sqrt{10-t} + 4 \Rightarrow$ $t \leq 10$, т.к. $\sqrt{10-t} \geq 0$ И мы видим, что функция ~~возрас~~ убывает при росте t, а функция t возрастает при росте t, $\Rightarrow$ у графиков $f(t)$ и $g(t) = \sqrt{10-t} + 4$ не более 1 точки пересечения $\Rightarrow$ корней у уравнения тоже ≤ 1. С другой стороны $t = 6$ - корень, т.к. $6 = \sqrt{10-6} + 4 = 4 + \sqrt{4}$. Итого $t = 6$.

2) воспользуемся старыми обозначениями и получим: $t = -\sqrt{10-t} + 4$. Нарисуем графики $f(t) = t$ и $g(t) = 4 - \sqrt{10-t}$



Примечание: график немного криво начерчен, точка A должна иметь коорд. (1;1)

Как можно заметить, у $f(t)$ и $g(t)$ одна точка пересечения, с после этой точки, скорость с которой убывает $g(t)$

№2 стр№2

Становиться все ~~меньше~~ и меньше, чем скорость $F(t) \Rightarrow$
$g(t)$ будет всегда ~~меньше~~ больше после точки перес с $F(t)$, $\Rightarrow$ у уравнения ровно 1 корень, но $t=1$ есть корень, т.к. $1 = -\sqrt{10-1} + 4 =$
$= -3 + 4$, $\Rightarrow$ из решений 1) и 2) $t=1$ или $t=6$;
тогда $t=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 1 \Rightarrow |(x+3)(7-x)| = \frac{1}{4}$ или
$(x+3)(7-x) = \frac{1}{4}$ при $-3 \le x \le 7$. Тогда $-x^2+4x+20{,}75=0 \Rightarrow$
$D = 16 + 20{,}75 \cdot 4 = 99 \Rightarrow x_1 = \frac{-4+3\sqrt{11}}{-2}$ и $x_2 = \frac{-4-3\sqrt{11}}{-2}$, но
$x_1 < 7$, т.к. $\underline{\underline{4+3\sqrt{11}}} < 14 \Leftrightarrow 3\sqrt{11} < 10 \Leftrightarrow \sqrt{99} < \sqrt{100}$. Но $x_2 > -3$, т.к.
$\frac{4-3\sqrt{11}}{2} > -3 \Leftrightarrow \underline{\underline{4-3\sqrt{11}}} > -6 \Leftrightarrow -\sqrt{99} > -\sqrt{100}$. Второй случай

$t = 6 \Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 6$ и $(x+3)(7-x) = 144$, при $-3 \le x \le 7 \Rightarrow$
$21 + 4x - x^2 = 144$ и $D = 16 - 4 \cdot 123 < 0 \Rightarrow \varnothing$.

Ответ: $x_1 = \frac{4+3\sqrt{11}}{2}$ и $x_2 = \frac{4-3\sqrt{11}}{2}$.

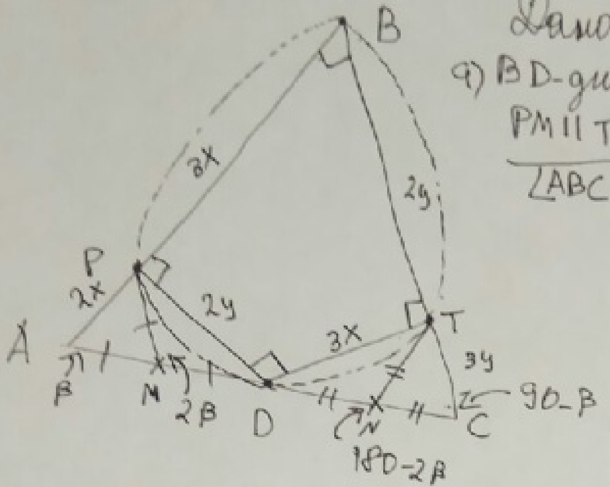
№1

Стр №3.

Дано:

а) BD-диам. PM ∥ TN ; ∠ABC

б) $MP=1$; $NT=\frac{3}{2}$; $BD=\sqrt{5}$; S_{ABC}



Решение:

BD-диам, $\Rightarrow \angle BTD = \angle BPD = 90^0$, т.к. опираются на диаметр, $\Rightarrow$ $\angle CTD = \angle APD = 90^0$, т.к. смежные с ~~диам~~ прямыми углами. $\Rightarrow$ TN и PM – медианы в прямоуг. Δ, $\Rightarrow PM=DM=AM$ и $TN=CN=DN$. $PM \parallel TN$, $\Rightarrow$ если $\angle PMD = 2\beta$, то $\angle TND = 180-2\beta$, тогда ΔTDN и ΔPDM – равнобед., $\Rightarrow \angle TDN = \beta$ и $\angle PDM = 90-\beta \Rightarrow \angle TCD = 90 - TDN = 90-\beta$ и $\angle PAM = 90 - \angle PDM = \beta$, в ΔABC $\angle ABC = 180 - \angle A - \angle C = 180-(90-\beta+\beta) = 90$, $\Rightarrow$

а) Ответ: $\angle ABC = 90$.

Заметим, что т.к. $\angle ABC = 90 \Rightarrow \angle PDT = 180 - \angle ABC = 90$ из вписанности. $\Rightarrow$ PBTD – прямоугольник, $\Rightarrow PD \parallel BT \Rightarrow PD \parallel BC$, $\Rightarrow \Delta APD \sim \Delta ABC$, т.к. из параллельности $\angle APD = \angle ABC$ и $\angle PDA = \angle BCA$, $\Rightarrow$ $\frac{AD}{AC} = \frac{AP}{AB}$, то $MP=1 \Rightarrow AD = 1\cdot 2 = 2$ и $NT=\frac{3}{2} \Rightarrow DC = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3$, $\Rightarrow AC=5 \Rightarrow$ $\frac{AD}{AC} = \frac{AP}{AB} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow$ пусть $AP=2x \Rightarrow PB=3x$, т.к. $PB=AB-AP$.

Аналогично $\Delta ABC \sim \Delta CDT \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{CT}{CB} = \frac{3}{5} \Rightarrow$ пусть $CT=3y \Rightarrow$ $TB = CB - CT = 2y$. Т.к. BTDP прямоуг, $\Rightarrow DT = AB = 3x$, $\Rightarrow$ $BT = PD = 2y$. Таким образом в ΔCTD и в ΔAPB из т. Пифагора $(2x)^2+(2y)^2=4$ и $(3x)^2+(3y)^2=9 \Rightarrow x^2+y^2=1$. Но $S_{ABC} = S_{APD} + S_{DTC} + S_{BTDP} =$ $= \frac{2x\cdot 2y}{2} + \frac{3x\cdot 3y}{2} + 2y\cdot 3x = 2xy + 4{,}5xy + 6xy = 12{,}5xy$, то из ΔBTD по т. Пифагора $(2y)^2+(3x)^2=(\sqrt{5})^2 \Rightarrow 4y^2+9x^2=5$

№1 Стр № 4

$\Rightarrow 4y^2 + 9x^2 = 4(x^2+y^2) + 5x^2 = 5 = 4\cdot 1 + 5x^2$, т.к. $x^2+y^2=1$ (см. выше)

$\Rightarrow 5x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, а $y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} =$

$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$. $\Rightarrow S_{ABC} = 12{,}5xy = 12{,}5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 12{,}5 \cdot \frac{2\cdot 5}{25} = 25 \cdot \frac{5}{25} = 5$

б) Ответ: $S_{ABC} = 5$

211006249 (U197670 M1276024)

№3

$5a^2 - \underline{4ay} + 8x^2 - \underline{4xy} + \underline{y^2} + 12ax = 0$ – точка A $\quad ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$ – парабола

Найдем коорды точки B: $x_b = \frac{-\beta}{2\alpha}$, где α и β коэфы ур-ния вида $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Из условий выразим уравнение параболы так, чтобы y был только по 1 стороне равенства:

$ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3 = ay \Rightarrow y = x^2 - 2ax + \left(a^2 + \frac{3}{a}\right) \Rightarrow$ коорды. точки B:

$x_b = \frac{+2a}{2} = +a \Rightarrow y_b = a^2 - 2a \cdot a + \left(a^2 + \frac{3}{a}\right) = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$.

Прямая в условии $y = 2x - 5$ и Точка B имеет коорды $\left(a; \frac{3}{a}\right)$

$y^2 \cancel{= 4ay \overset{-4xy}{=} 4xy - 8x^2 - 12ax - 5a^2 \Rightarrow y^2 - y(4a + 4x) = -8x^2 - 12ax - 5a^2}$

Из ур-ния точки A: $\underbrace{(2a)^2 - 4ay + y^2}_{} + 4a^2 + \underbrace{12ax + 9x^2}_{} +$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006249**

ID профиля: **197670**

Вариант 10

№4. Чистовик. Стр№1

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81$ $\Rightarrow$ и $x^2y^2 = 10 - \frac{6}{x^2+y^2}$ $\Rightarrow (x^2+y^2)^2+5x^2y^2 =$

пусть $x^2+y^2 = t \geq 0$

$= (x^2+y^2)^2 + 5\left(10 - \frac{6}{x^2+y^2}\right) = t^2 + 50 - \frac{30}{t} = 81 \Rightarrow t^2 - \frac{30}{t} = 31 \Rightarrow$

$t^3 - 30 = 31t \Rightarrow t^3 - 31t - 30 = (t+1)(t^2-t-30) = 0$. $t_1 = -1$, но $t \geq 0 \Rightarrow$ не подхо-

дит $\Rightarrow t^2 - t - 30 = (t-6)(t+5) = 0 \Rightarrow t_1 = 6$ и $t_2 = -5$, но $t \geq 0 \Rightarrow t_2 = -5$ не под-

ходит, $\Rightarrow t = 6 \Rightarrow x^2+y^2 = 6 \Rightarrow \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{6}{6} + x^2y^2 = 10 \Rightarrow x^2y^2 = 9$.

Но $(x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \Rightarrow 6^2 + 5x^2y^2 = 81 \Rightarrow x^2y^2 = 9$. Итого

$$\begin{cases} x^2y^2 = 9 \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 = 6 - y^2$ и $(6-y^2)y^2 = 9$. Пусть $y^2 = a \Rightarrow (6-a)a = 9 \Rightarrow$

$-a^2 + 6a - 9 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 = (a-3)^2 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y_1 = -\sqrt{3}$ и

$y_2 = \sqrt{3}$, $\Rightarrow x^2 = 6 - y^2 = 6 - 3 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$, причем для

любой пары x_i y_j она удовлетворяет решению уравнений (сис-

темы), т.к. все слагаемые в ней это квадраты x и y. $\Rightarrow$

Ответ: $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $(+\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

Исходя из условия, подходящих для выбора узлов всего 68^2 (не лежащих на границе квадрата). Если два узла не лежат на прямой, $\parallel$ одной из осей, $\Rightarrow$ у этих узлов разные коорд. по x и по y. Всего узлов лежащих на $y=x$ 68; на $y=69-x$ – тоже 68. Заметим, что выбрать один узел на прямой $y=x$ можно 68 способами, тогда второй узел можно выбрать $C^1_{68^2-1-2\cdot67}$, т.к. мы не можем выбрать 67 узл. с той же коорд. x и 67 с той же y. Кроме того, сам 1-ый узел второй раз мы выбрать не можем. Тогда всего пар узлов, если 1 из них на $y=x$ $68\cdot C^1_{68^2-68-67}=68(68^2-68-67)$, аналогично для прямой $y=69-x$, $\Rightarrow$ всего пар узлов $68(68^2-68-67)\cdot2$, но тогда пары, при которых одна ~~тогда~~ точка на $y=x$, и одна на $y=69-x$ мы посчитали по 2 раза. Значит вычтем эти пересчета

№5 Чистовик стр №3.

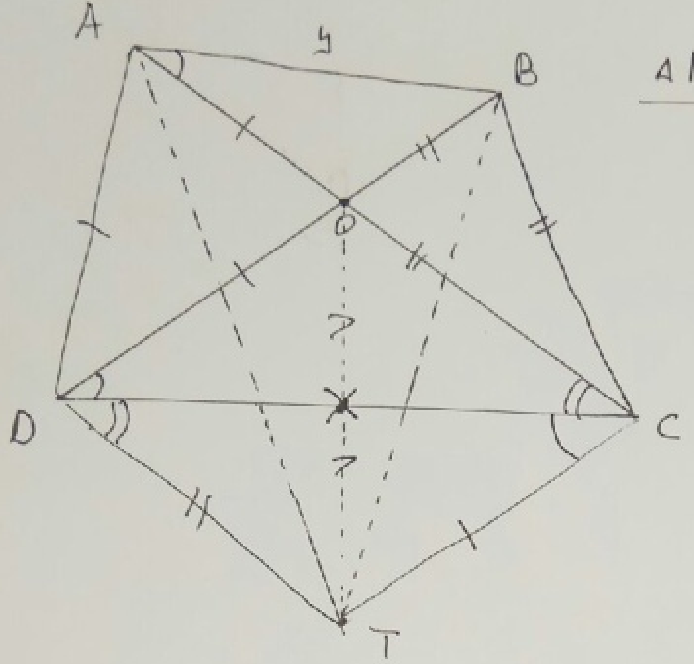
Точка на $y=x$ выбирается 68 способами и на $y=69-x$ тоже 68, $\Rightarrow$ всего пар узлов 68^2 ~~штук~~, ~~$\Rightarrow$ Ответ: $68(68^2-68-67)\cdot 2-68^2=$~~
~~$=2\cdot 68(68^2-68-68-33)=136(68^2-169)=136(68^2-13^2)=136(56)(81)=$~~
~~$=136\cdot 56\cdot 81$~~

~~Ответ: $136\cdot 56\cdot 81$.~~ но тогда мы посчитали еще и те пары, которые на прямых $\parallel Ox$ или Oy. Их всего $68\cdot 2$ (т.к. для кажд. точки с $y=x$ есть 2 такие на $y=69-x$) $\Rightarrow$ всего пар $68^2-68\cdot 2=68\cdot 66$ $\Rightarrow$ пар узлов, удовлетв. условию задачи $68(68^2-68-67)\cdot 2-68\cdot 66=68(68^2-68-67-33)\overset{\cdot 2}{=}68(68^2-168)\cdot 2$

Ответ: $68(68^2-168)\cdot 2$ способами.

Примечание: все листы, загруженные мной в систему в решении 1-ой части – Чистовики! Прошу выставить за них баллы.

№6 Чистовик стр№4.



Дано: $BC=2$ $AD=7$
T-симм. C
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные

Решение:

в $\triangle AOD$ все стороны I (черточка); в $\triangle BOC$ II (двойная черточка), $\angle COD=\angle BOA=120$ (смежный с $\angle 60^\circ$), $\Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle DOC$ по двум сторонам и углу меж. ними. Тогда $\angle BAC=\angle BDC$ из подобия $\Rightarrow ABCD$ - вписан т.к. два одинак. $\angle$ смотрят на 1 дугу. Соединим C и T. и D и $T \Rightarrow$ из симметрии (или фактически мы удвоили медиану) $\triangle OCD = \triangle CTD \Rightarrow CT = DO$ и $CO = DT \Rightarrow \angle OCD=\angle CDT$ и $\angle ODC=\angle DCT$. Но $\angle ODC+\angle OCD=180-120=60 \Rightarrow$ в $\triangle BCT$ $\angle BCT=\angle BCO+\angle OCT=60+60=120$.
Аналогично в $\triangle ADT$ $\angle ADT=120$. Значит $\triangle ADT=\triangle BCT=\triangle AOB$ по 2 сторонам и углу между ними, $\Rightarrow AT=BT=AB$ из равенства $\triangle \Rightarrow$
9) ABT - правильный ч.т.д.

Площадь прав. $\triangle$ равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a - сторона $\triangle$, $\Rightarrow S_{AOD}=\frac{49\sqrt{3}}{4}$ и $S_{BOC}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$. Пусть $S_{ABO}=x \Rightarrow S_{ABCD}=2x+\sqrt{3}+\frac{49\sqrt{3}}{4}=$
$=2x+\frac{53\sqrt{3}}{4}$. Тогда, если $BA=y \Rightarrow S_{ABT}=\frac{y^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=$
$=\left(\frac{8x+53\sqrt{3}}{4} : \frac{y^2\sqrt{3}}{4}\right)^{-1}=\frac{y^2\sqrt{3}}{8x+53\sqrt{3}}$.

№6 чистовик. стр№5.

Заметим, что $\frac{S_{BOC}}{S_{DOC}} = \frac{BO}{DO} = \frac{2}{7} \Rightarrow S_{DOC} = \frac{7}{2} \cdot S_{BOC} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ и $\Rightarrow$ $x = \frac{7\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{y^2\sqrt{3}}{4 \cdot 7\sqrt{3} + 53\sqrt{3}} = \frac{y^2}{81}$. $\frac{S_{BOC}}{S_{DOC}} = \frac{BO}{DO}$)

т.к. у этих $\triangle$ одинак. высоты. $S_{ABCTD} = S_{ABCD} + S_{DCT} = 2x + \frac{53\sqrt{3}}{4} + x = \frac{3x + 53\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot 7\sqrt{3}}{2} + \frac{53\sqrt{3}}{4} = \frac{42\sqrt{3} + 53\sqrt{3}}{4} = \frac{95\sqrt{3}}{4}$, но

$S_{ABT} = S_{ABCTD} - S_{ADT} - S_{BCT} = S_{ABCTD} - 2x = \frac{95\sqrt{3}}{4} - \frac{2 \cdot 7\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{95\sqrt{3} - 4 \cdot 7\sqrt{3}}{4} = \frac{67\sqrt{3}}{4} \Rightarrow y = \sqrt{67} \Rightarrow$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$ (т.к. ABT правильный)

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$.

Примечание: я загружал в 1 части в систему только чистовики, но забыл подписать на них что они чистовики. Не могли бы вы проверить эти листы как чистовики пожалуйста.