Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006248**

ID профиля: **116324**

Вариант 10

Черновик

$\cancel{4a^2+12ax+9x^2}$ $(4x+y \quad)(x+y$

$y^2-4ay+4a^2+$ $(x \quad y+5a)(x \quad y \quad a)$

$x^2+ax+y^2+by+kxy+c=0$

$y^2-4ay+4a^2$

$y^2-4xy+4x^2+4x^2+12ax+9a^2=4a^2+4ay$

$(4x^2+12ax+9a^2)-(y^2+4ay+4a^2)=4xy-4x^2$

$(2x+3a)^2-(y+2a)^2=$

$=(2x-y+a)(2x+y+5a)=4x(y-x)$

$y^2-(4a+4x)y+5a^2+8x^2+12ax=0$

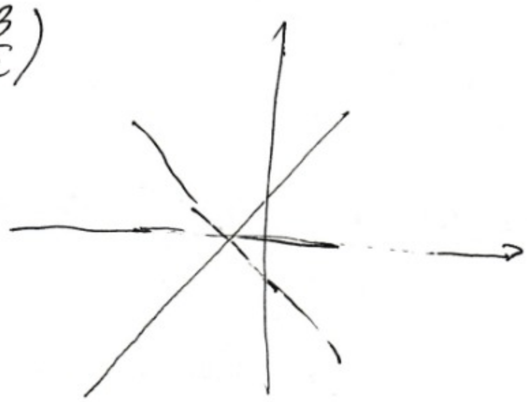
$D=-4(5a^2+8x^2+12ax)+16a^2+16xa+16x^2=$

$=-4a^2-16x^2-32ax=$

$=-4(a^2+4x^2+8ax)$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

$B(a;\frac{3}{a})$



211006248 (U116324 M1273980)

Черновик

$$\begin{array}{r} 91 \\ -19 \\ \hline 72 \end{array}$$

№2

$\sqrt{x+3}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}+\sqrt{7-x}$

$x+3+16+8\sqrt{x+3}=4(21+4x-x^2)+7-x+4\sqrt{(21+4x-x^2)(7-x)}$

$x+19+8\sqrt{x+3}=9\cancel{1}+15x-4x^2+4\sqrt{x+3}\cdot(7-x)$

$21+4x-x^2=0$ $\qquad -x^2+4x+21=(7-x)(x+3)$

$x^2-4x-21=0$

$\left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-3 \end{array}\right.$ $\qquad \sqrt{x+3}\,(8-4(7-x))=\sqrt{x+3}\,(4x-20)$

$4x^2-14x-72+\sqrt{x+3}\cdot(1+x)=0$

$\sqrt{x+3}+4=2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}+\sqrt{7-x}$

$\sqrt{x+3}+4=\sqrt{7-x}\,(2\sqrt{x+3}+1)$

$x+3+16+8\sqrt{x+3}=(7-x)(4(x+3)+1+4\sqrt{x+3})$

$\sqrt{x+3}\,(20+4x)=2(2x^2-7x-36)$ $\qquad D=4\cdot2\cdot36+49$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 8 \\ \hline 288 \\ +\ 49 \\ \hline 337 \end{array}$$

$a-b+4=2ab$ $\qquad a^2=-b^2+10$

$2ab+b=a+4$ $\qquad a^2+\dfrac{a^2+8a+16}{(2a+1)^2}=10$

$b(2a+1)=a+4$

$b=\dfrac{a+4}{2a+1}$ $\qquad a^2(4a^2+4a+1)+a^2+8a+16=10(4a^2+4a+1)$

$4a^4+4a^3+a^2+a^2+8a+16=40a^2+40a+10$

$\underbrace{a^2+b^2}_{10}-2ab=4a^2b^2-16ab+16$

$4a^4+4a^3-38a^2-32a+6=0$

$4t^2-14t+6=0$ $\qquad 2a^4+2a^3-\cancel{38}a^2-\cancel{32}a+\cancel{6}=0$

$2t^2-7t+3=0$ $\qquad a=-1$ – корень

$D=$

211006248 (U116324 M1273980)

$2-2-19+16+3=0$

Черновик

$$\begin{array}{l} 2a^4+2a^3-19a^2-16a+3 \mid a+1 \\ 2a^4+2a^3 \qquad\qquad\qquad\qquad 2a^3-19a+3 \\ \quad -19a^2-16a \\ \quad -19a^2-19a \\ \qquad 3a+3 \\ \qquad 3a+3 \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$a=3$ - корень

$$\cancel{\begin{array}{l} 2a^3-19a+3 \mid a-3 \\ 2a^3-6a \end{array}}$$

$$\begin{array}{l} 2a^3+0a^2-19a+3 \mid a-3 \\ 2a^3-6a^2 \qquad\qquad 2a^2+6a-1 \\ \quad +6a^2-19a \\ \quad +6a^2-18a \\ \qquad -a+3 \\ \qquad -a+3 \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$2x+a=-2x-5a$

$4x=-6a$

$x=-1{,}5a$

$y=-2a$

$$\frac{\frac{-3+\sqrt{11}+8}{2}}{-3+\sqrt{11}+1}=b$$

$D=4\cdot 2+36=44$

$$a=\frac{-6\pm 2\sqrt{11}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{2}$$

$$b=\frac{5+\sqrt{11}}{2(\sqrt{11}-2)}^{(\sqrt{11}+2)}=$$

$$a=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}=\frac{\sqrt{11}-3}{2}$$

$$=\frac{(5+\sqrt{11})(\sqrt{11}+2)}{2(11-4)}=$$

$2\sqrt{x+3}=\sqrt{11}-3$

$4x+12=11+9-$

$$=\frac{11+10+7\sqrt{11}}{14}=$$

$$=\frac{21+7\sqrt{11}}{14}=\frac{3+\sqrt{11}}{2}$$

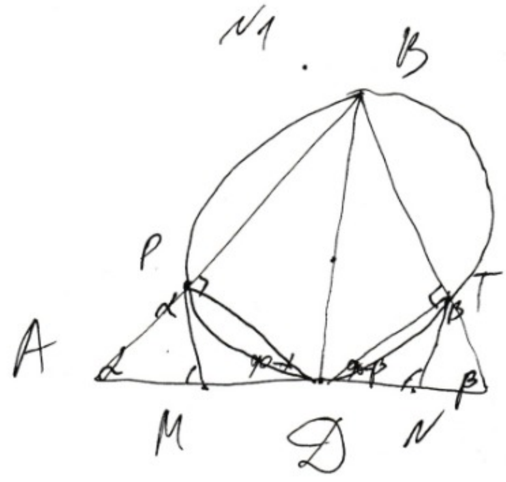
$2ab=2\cdot\frac{1}{4}\cdot 2=1$

$a-b+4=$

$$a-b=\frac{\sqrt{11}-3-\sqrt{11}-3}{2}=-3$$

211006248 (U116324 M1273980)

Черновик



$9a^2+4(4-a^2)=20$

$5a^2=4$

$a^2=\frac{4}{5}$

$b^2=\frac{16}{5}$

$a^2b^2=\frac{64}{25}$

$ab=\frac{8}{5}$

$180-2\alpha=2\beta$

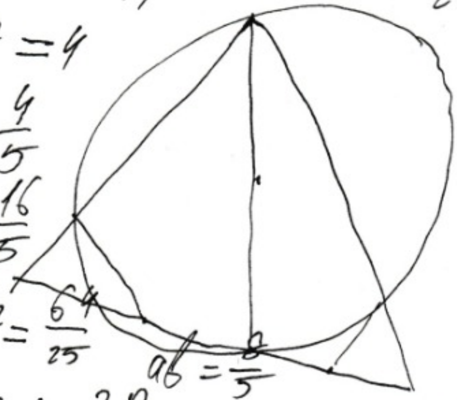
$\alpha+\beta=90^\circ$

$9a^2+4b^2=20$

$25a^2+25b^2=100$

$a^2+b^2=4$

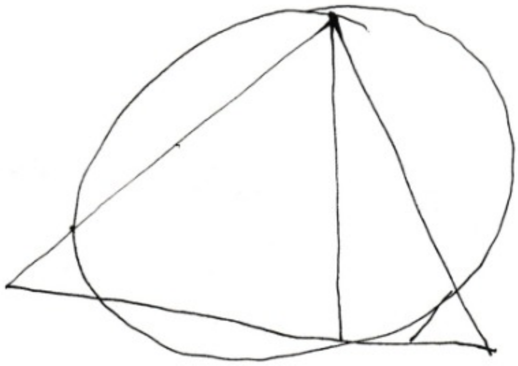
$b^2=4-a^2$

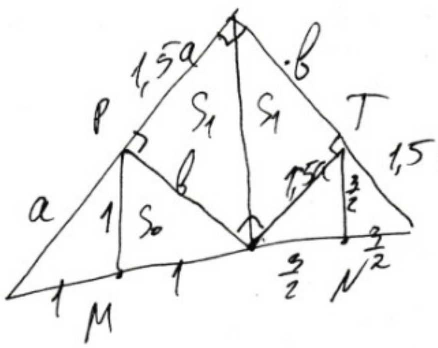


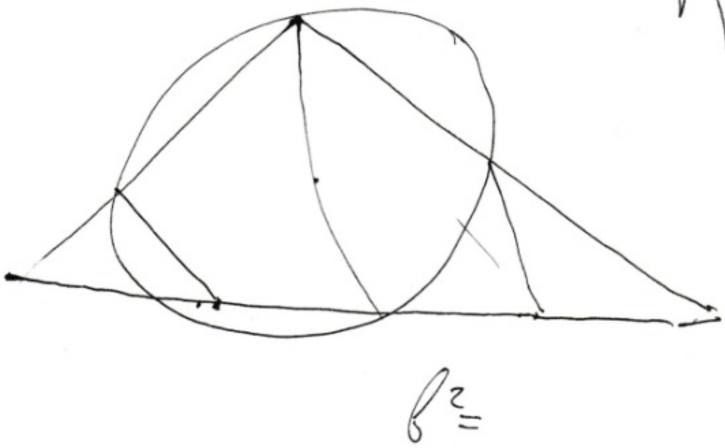
$2,25a^2+b^2=5$

$6,25a^2+6,25b^2=25$

$4a^2+5,25b^2=20$







$a^2+b^2=4$

~~$2,25a^2+2,25b^2=9$~~

$(1,5a)^2+b^2=5$

$1,5ab+\frac{ab}{2}+\frac{2,25ab}{2}$

$b^2=$

$2,25a^2+b^2=5$

$\frac{6,25ab}{2}$ — ?

$p=\frac{1,5a+b+5}{2}$

$S^2=\left(\frac{6,25}{2}\right)^2a^2b^2$

$S_1=\sqrt{}$

$\frac{S_1+S_0}{S_1+\frac{9}{4}S_0}=\frac{2}{3}$

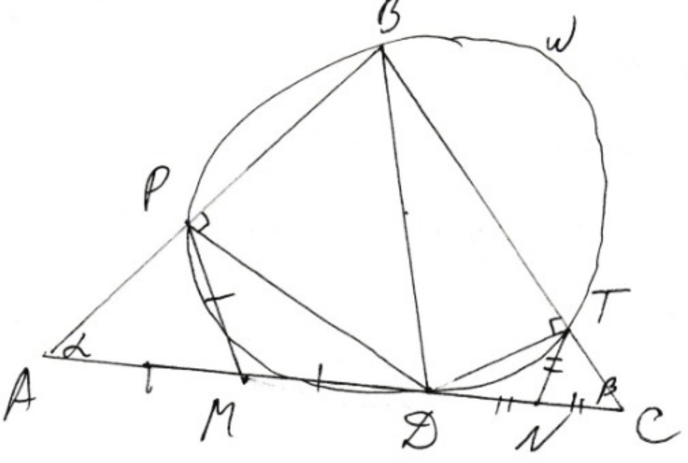
$\frac{\cancel{6,25}^{1,25}}{2}\cdot\frac{\cancel{8}^{4}}{5}=5$

$2S_1+\frac{9}{2}S_0=3S_1+3S_0$

$\frac{3}{2}S_0=S_1$

Чистовик

Задача 1



Дано:

BD - диаметр ω

$PM \parallel NT$

$AM = MD$, $ND = NC$

Найти:

а) $\angle ABC$ - ?

б) $S_{\triangle ABC}$ - ?

Решение:

а) BD - диаметр $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90°$

Тогда $\angle APD = \angle CTD = 90°$ (как смежные с углами $90°$)

PM и NT - медианы в прямоугольных $\triangle APD$ и $\triangle CTD$,

значит $AM = PM = MD$

$DN = TN = CN$

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$.

$CN = NT \Rightarrow \angle CTN = \beta \Rightarrow \cancel{\angle MP}\ \angle NTD = 90° - \beta$

$AM = MP \Rightarrow \angle APM = \alpha \Rightarrow \angle MPD = 90° - \alpha$

$PM = MD \Rightarrow \angle MDP = \angle MPD = 90° - \alpha$

$TN = ND \Rightarrow \angle NTD = \angle NDT = 90° - \beta$

По теореме о сумме углов в $\triangle$:

1

$\angle PMD = 2\alpha$, $\angle TND = 2\beta$

$\angle PDT = 180° - \angle MDP - \cancel{\angle DNT}\ \angle NDT = \alpha + \beta$

$BTDP$ - вписанный $\Rightarrow \angle PBT = 180° - \angle PDT = 180° - (\alpha + \beta)$

По условию $PM \parallel NT \Rightarrow \angle PMN + \angle TNM = 180°$

$2\alpha + 2\beta = 180°$; $\alpha + \beta = 90°$; $\angle PBT = 180° - (\alpha + \beta) = 90° = \angle ABC$

б) $MP=1$, $NT=\frac{3}{2}$, $BD=\sqrt{5}$ Чистовик

Заметим, что если $\alpha+\beta=90°$, то

$\angle TDC = 90°-\beta=\alpha$, $\angle TCD=\beta=90°-\beta$

$\triangle APD \sim \triangle DTC$ по 2 углам.

Пусть $AP=a$, $PD=b$, тогда $DT=1{,}5a$, $TC=1{,}5b$.

В четырёхугольнике $BTDP$ все углы равны $90°$, значит он – прямоугольник.

$BT=PD=b$

$PB=DT=1{,}5a$

$AB=2{,}5a$

$BC=2{,}5b$

Теорема Пифагора для $\triangle ABC$:

$6{,}25a^2+6{,}25b^2=25$;

$a^2+b^2=4$

2

Теорема Пифагора для $\triangle BPD$:

$2{,}25a^2+b^2=5$

Решая систему $\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ 2{,}25a^2+b^2=5 \end{cases}$, получим:

$\begin{cases} a^2=\frac{4}{5} \\ b^2=\frac{16}{5} \end{cases}$

$ab=\frac{8}{5}$

$S_{\triangle ABC}=S_{BTDP}+S_{APD}+S_{DTC}=$

$=1{,}5ab+\frac{ab}{2}+\frac{2{,}25ab}{2}=$

$=\frac{6{,}25ab}{2}=\frac{6{,}25}{2}\cdot\frac{8}{5}=5$

Ответ: 5

Чистовик

Задача 2

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$x+3 \geq 0$
$7-x \geq 0$ $\Big| \Rightarrow$ Можно разделить корень на 2 множителя

$\sqrt{(x+3)(7-x)} = \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{7-x}$

Обозначим $\sqrt{x+3} = a$, $\sqrt{7-x} = b$, $a \geq 0$, $b \geq 0$

Заметим, что $a^2 + b^2 = 10$.

Заменив, в исходном равенстве, получим:

$\begin{cases} a - b + 4 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$; $2ab + b = a + 4$

$b = \dfrac{a+4}{2a+1}$, т.к. $a \neq -1$ по ограничениям

$a^2 + \left(\dfrac{a+4}{2a+1}\right)^2 = 10$

$a^2(4a^2+4a+1) + (a+4)^2 = 10(2a+1)^2$

$4a^4 + 4a^3 + a^2 + a^2 + 8a + 16 = 40a^2 + 40a + 10$

$4a^4 + 4a^3 - 38a^2 - 32a + 6 = 0$

3

$2a^4 + 2a^3 - 19a^2 - 16a + 3 = 0$

Решим, используя теорему Безу:

$a = -1$ – корень (но $a = -1$ не удовлетворяет огран.)

Поделим многочлен на $(a+1)$. Получим:

$2a^3 - 19a + 3 = 0$

$a = 3$ – корень

Поделив на $(a-3)$, получим: $2a^2 + 6a - 1 = 0$

$D = 44$

$a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}$

211006248 (U116324 M1273980)

$a = \frac{-3-\sqrt{11}}{2} < 0$ — не удовлетворяет ~~ограничению~~ ограничениям.

$$\left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = \frac{-3+\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$\sqrt{x+3} = 3$

$x+3 = 9$

$x = 6$

$\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{11}-3}{2}$

$4(x+3) = 11+9-6\sqrt{11}$

$4x+12 = 20-6\sqrt{11}$

$4x = 8-6\sqrt{11}$

$x = 2-1{,}5\sqrt{11} =$

$= \frac{4-3\sqrt{11}}{2}$

Ответ: $x=6$ или $x = \frac{4-3\sqrt{11}}{2}$.

4

211006248 (U116324 M1273980)

Чистовик

Задача 3

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$-(y^2+4ay+4a^2)+4x^2+12ax+9a^2=4xy-4x^2-2y^2$

$-(y+2a)^2+(2x+3a)^2=-(y^2-4xy+4x^2)-y^2$

$(2x-y+a)(2x+y+5a)=-(y^2+(y-2x)^2)$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}=0$

$B(a;\frac{3}{a})$

5

211006248 (U116324 M1273980)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006248**

ID профиля: **116324**

Вариант 10

Черновик

$OM = MT$
$CM = DM$
$\angle OMC = \angle DMT$
(вертикальные)

$\Rightarrow$ $\triangle OMC = \triangle TMD$ по 2 сторонам и углу между ними

68^2

$C^2_{68^2}$ - всего $= \frac{68^2 \cdot (68^2-1)}{2}$

Если не на диагоналях, то способов $C^2_{68^2-2\cdot 68} =$

$= C^2_{68\cdot 66} = \frac{68\cdot 66\cdot (68\cdot 66-1)}{2}$

Если точка на диагонали, а другая с ней в строке - столбце: $\frac{68\cdot 2\cdot 67\cdot 2}{2} = 68\cdot 67\cdot 2$

$$\frac{68\cdot 68\,(68^2-1)}{2} - \frac{68\cdot 66\,(68\cdot 66-1)}{2} - 68\cdot 67\cdot 2 =$$

$$= \frac{68}{2}\left(68\cdot 67\cdot 69 - 66\,(68\cdot 66-1) - 67\cdot 4\right) =$$

$$= \frac{68}{2}\left(68\cdot 67\cdot 69 - 66\cdot 68\cdot 66 + 66 - 67\cdot 4\right) =$$

$$= \frac{68}{2}\left(68\cdot (67\cdot 69 - 66^2) + 66 - 67\cdot 4\right)$$

$$\begin{array}{r} 267 \\ \times\ 68 \\ \hline 2136 \\ +1602\ \ \\ \hline 18156 \\ -\ \ 208 \\ \hline 17948 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67 \\ \times 69 \\ \hline 603 \\ +402\ \ \\ \hline 4623 \\ -4356 \\ \hline 267 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 66 \\ \times 66 \\ \hline 396 \\ +396\ \ \\ \hline 4356 \end{array}$$

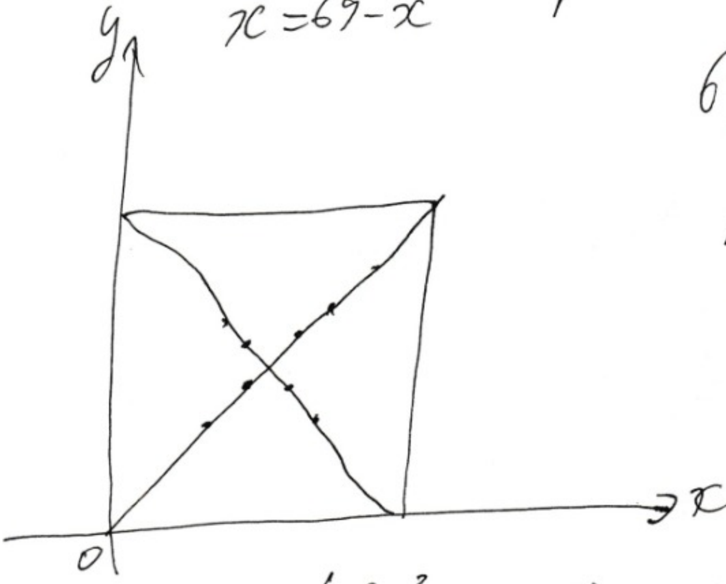
$$\begin{array}{r} 67 \\ \times\ 4 \\ \hline 268 \\ -\ 66 \\ \hline 208 \end{array}$$

$34\cdot 17948$

211006248 (U116324 M1273981)

Черновик

$x = 67 - x$



$67 \cdot (68 \cdot 68 - 67 - 67 - 67)$

пар точек, если ~~одна~~ на одной диагонали, другая не на этой диагонали, не в этой строке-столбце.

$2 \cdot 67 (68^2 - 3 \cdot 67)$ – пар точек, но не посчитаны точки на одной диагонали и центр, дважды посчитаны пары на 2 диагоналях.

Выбрать т. на 2 диагоналях можно $68 \cdot 68$ способами, а если они лежат в той же стр-стол, $68 \cdot 2$. Итого $68 \cdot 66$ пар мы считали дважды

Черновик:

$$\frac{8}{x^2+y^2}+x^2y^2=10$$

$$x^4+y^4+7x^2y^2=81$$

$$\begin{cases}\frac{6}{a}+b=10\\ a^2-2b+7b=81\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}81\\ -\,36\\ \hline 45\end{array}$$

$$10-\frac{6}{a}=b$$

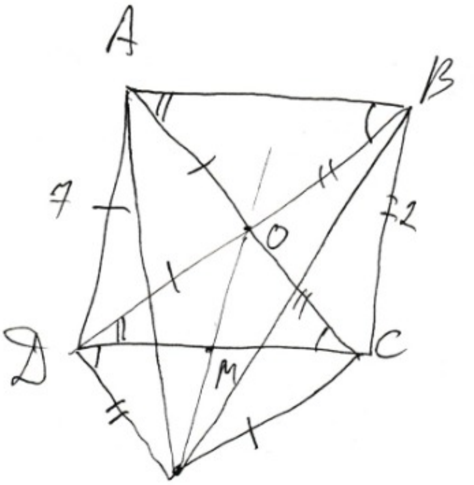
$$a^2+5b=81$$

$$a^2+50-\frac{30}{a}=81$$

$$a^2-\frac{30}{a}=31$$

$$a^3-31a-30=0$$

$a=-1$ – корень ✗



$4{,}5^2-3{,}5\cdot 9$

$3{,}5(4{,}5-7)=$

$=-4{,}5\cdot 2{,}5$

$$a^3+0a^2-31a-30 \;\big|\; a+1$$

$$a^3+a^2 \qquad\qquad a^2-a-30$$

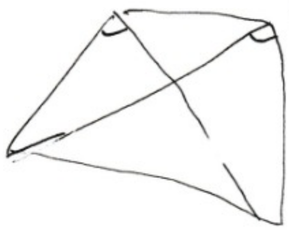
$$-a^2-31a$$

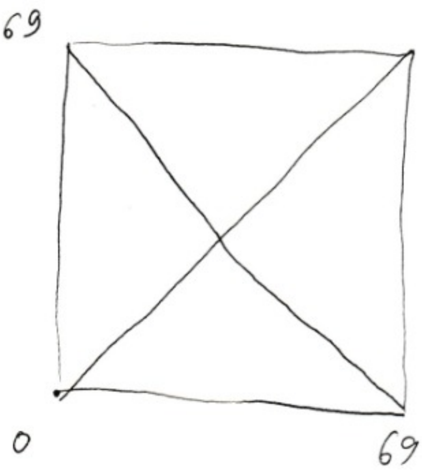
$$-a^2-a$$

$$-30a-30$$

$a=6$

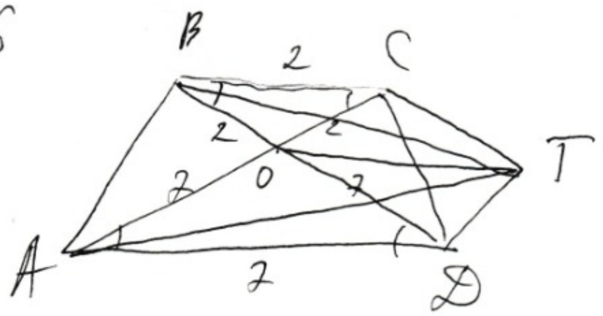
$a=-5$ ✗





$(68+67)$

6



Итак, $a=6$, значит $b = 10 - \frac{6}{a} = 9$ **Черновик**

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$$

$y^2 = \frac{9}{x^2}$

$x^2 + \frac{9}{x^2} = 9$

$x^4 - 9x^2 + 9 = 0$

$D = -4\cdot 9 + 81 = 45$

$x^2 = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

$\frac{9+3\sqrt{5}}{2} > 0$ $\quad \frac{9-3\sqrt{5}}{2} > 0$

$68 \times 68 = 544 + 408 = 4624$

$67 \times 2 = 134$

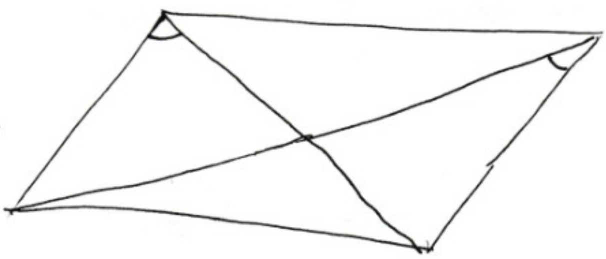
$4624 - 134 = 4490$

$4490 \times 2 = 8980$

$8980 - 133 = 8847$

68

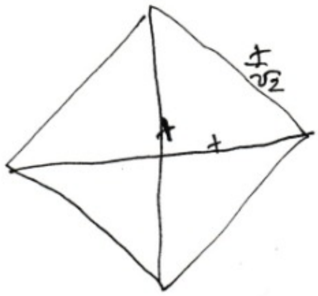
$8847 \times 68 = 70776 + 53082 = 601596$

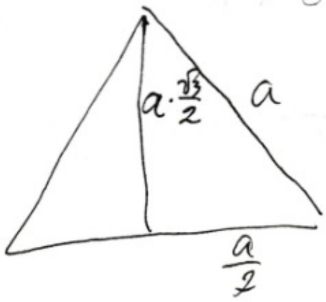


$68 + 66 = 408 + 408 = 4488$

$4488 \times 2 = 8976$

$8976 \times 2 = 52$





$68\cdot 2\cdot(68^2 - 68\cdot 2)$

$\frac{a}{2}\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$

$2\cdot C_{68}^{2}$ – на одной д.

$68\cdot 67$

$68\cdot 66$

$68\cdot 2\cdot 68\cdot 66 - 68\cdot 67 - 68\cdot 66 =$

$= \frac{68}{2}(2\cdot 2\cdot 68\cdot 66 - 2\cdot 67 - 2\cdot 66)$

211006248 (U116324 M1273981)

Чистовик

Задача 4 (1)

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a$ $\quad a \geq 0,\ b \geq 0$, т.к. являются суммой и произведением неотрицательных чисел.

$x^2y^2=b$, $\quad a \neq 0$, т.к. стоит в знаменателе

Заметим, что $x^4+y^4 = (x^4+2x^2y^2+y^4) - 2x^2y^2 =$
$= (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = a^2-2b$

Тогда исходная система записывается как:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a} + b = 10 \\ a^2-2b+7b=81 \end{cases}; \quad \begin{cases} b = 10 - \dfrac{6}{a} \\ a^2+5b=81 \end{cases};$$

$$a^2 + 5\left(10 - \frac{6}{a}\right) = 81$$

$$a^2 + 50 - \frac{30}{a} = 81 \quad \Big|\cdot a,\ \text{т.к. } a \neq 0$$

$$a^3 - 31a - 30 = 0$$

Решим это уравнение, используя теорему Безу

$a=-1$ – корень (причём $a=-1$ не подходит, т.к. $a>0$)

$$\begin{array}{r|l} a^3+0a^2-31a-30 & a+1 \\ \cline{2-2} -\ a^3+a^2 \qquad\qquad & a^2-a-30 \\ \hline -a^2-31a \qquad & \\ -\ -a^2-a \qquad & \\ \hline -30a-30 & \\ -\ -30a-30 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$a^2-a-30=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-5 \text{ – не удовлетворяет ограничениям.} \end{array}\right.$$

$a=6 \Rightarrow b = 10 - \frac{6}{a} = 9$ Чистовик

Сделаем обратную замену:

$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$ $y^2=\frac{9}{x^2}$, т.к. $x=0$ не является решением

$x^2+\frac{9}{x^2}=6 \quad | \cdot x$, т.к. $x=0$ не является решением

$x^4-6x^2+9=0$

$(x^2-3)^2=0$

$x^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}$

$y^2=\frac{9}{x^2}=3$

$y=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\sqrt{3})$.

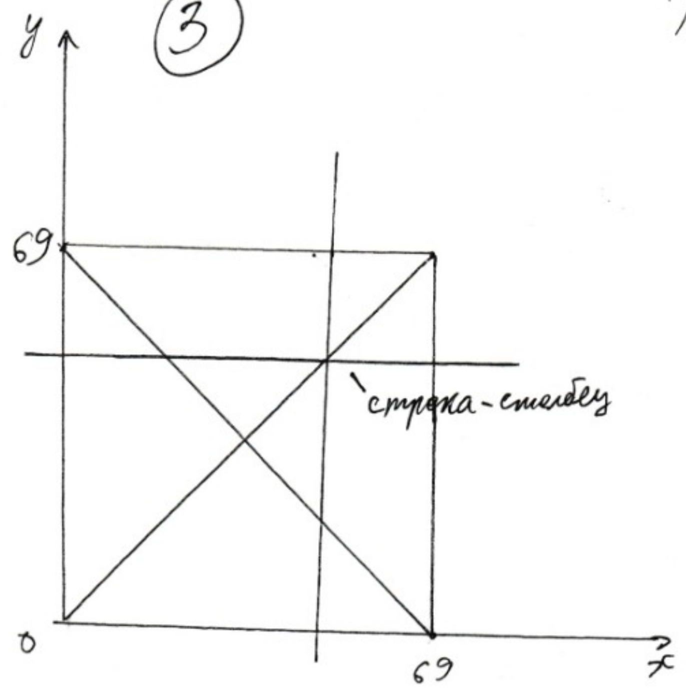
2

211006248 (U116324 M1273981)

Задача 5

③

Чистовик.



Точки $(0;0)$ и $(69;69)$ лежат на прямой $y=x$. Значит эта прямая содержит диагональ квадрата.

Точки $(0;69)$ и $(69;0)$ лежат на прямой $y=69-x$, значит эта прямая содержит вторую диагональ квадрата.

Внутри квадрата 68^2 точек (узлов)

Найдём кол-во способов выбрать 2 точки, если одна лежит на одной диагонали, а другая не лежит с ней в одной строке и столбце. Пусть их A_1.

Перед началом подсчета стоит отметить, что диагонали пересекаются в нецелой точке, значит там нет узла.

$$A_1 = \underbrace{(68 \cdot 2)}_{\text{выбираем узел на диагонали}} \cdot (68^2 \underbrace{-}_{\text{выбираем вторую точку не в том же строке-столбце}} 67 \cdot 2)$$

Однако здесь дважды посчитаны точки на одной диагонали (пусть таких пар B_1) и дважды посчитаны точки на двух диагоналях, но не лежащие в одном строке-столбце (пусть таких пар C_1)

Тогда нужных нам по условию пар будет

$A_1 - B_1 - C_1$ (вычитаем пары, посчитанные дважды).

Чистовик

Для этого сначала найдём B_1 и C_1.

$B_1 = 2 \cdot \underbrace{C_{68}^{2}}_{=68\cdot 67} =$ (выбираем на каждой диагонали 2 точки)

$C_1 = 68 \cdot 66$ (выбираем точку на одной диагонали и точку на другой, не лежащую с ней в одной строке - столбце)

Количество нужных нам пар равно:

$$A_1 - B_1 - C_1 = 68 \cdot 2\left(68^2 - 67 \cdot 2\right) - 68 \cdot 67 - 68 \cdot 66 =$$

$$= 68\left(2 \cdot 4490 - 67 - 66\right) =$$

$$= 68\left(8980 - 67 - 66\right) = 68 \cdot 8847 =$$

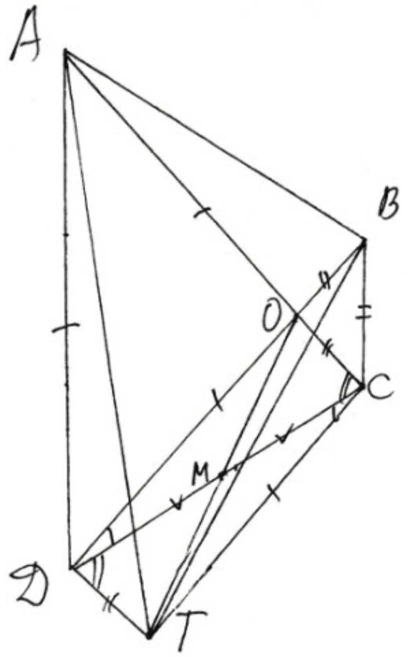
$$= 601596$$

Ответ: 601596.

Задача 6

<u>Чистовик</u>

5



Дано:

$\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – правильные

$CM = MD$

$OM = MT$

Найти:

а) $\triangle ABT \overset{?}{-}$ правильный

б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?, если $BC = 2$, $AD = 7$.

Решение:

а) $\angle AOB = \angle COD =$
$= 180° - \angle AOD = 120°$
$AO = OD$
$BO = OC$

$\Rightarrow$ $\triangle AOB = \triangle DOC$ по 2 сторонам и углу между ними
$AB = CD$

Если $\angle AOB = 120°$, то $\angle OBA + \angle OAB = 60°$.

$\angle DAO + \angle OAB + \angle OBA + \angle OBC = 180° = \angle DAB + \angle CBA$.

Сумма внутренних односторонних углов при BC и AD, секущей AB равна $180° \Rightarrow BC \parallel AD$.

$\angle ADO = \angle OCB = 60° \Rightarrow ABCD$ – вписанный четырёхугольник.

$BC \parallel AD$
$ABCD$ – вписанный
$AB = CD$

$\Rightarrow$ $ABCD$ – равнобокая трапеция.

Чистовик

В четырёхугольнике $OCTD$ диагонали делятся точкой пересечения пополам, значит он параллелограмм.

$CT = OD$, $DT = OC$

Кроме того, $\angle OCD = \angle CDT$

$\angle ODC = \angle DCT$,

и $\angle OCD + \angle ODC = 60°$, т.к. $\angle COD = 120°$.

Значит $\angle OCT = \angle OCD + \angle DCT = 60°$

$\angle ODT = \angle ODC + \angle CDT = 60°$.

К такому же выводу можно было прийти, развив идею, что $OCTD$ — параллелограмм.

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120°$

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120°$

$\angle ADT = \angle BCT$

$DT = OC = BC$

$AD = OD = CT$

$\Rightarrow$ $\triangle ADT = \triangle TCB$ по 2 сторонам и углу между ними. $AT = BT$

$\angle ADT = 120°$

$\Downarrow$

$\angle DAT + \angle DTA = \angle DAT + \angle CBT = 60°$.

$\angle DAB + \angle CBA = \angle DAT + \angle CBA + \angle TAB + \angle TBA =$

$= 180°$

$\angle TAB + \angle TBA = 120°$ $\Rightarrow \angle ATB = 60°$

Итак, $AT = BT$

$\angle ATB = 60°$

$\Rightarrow$ $\triangle ATB$ ~~а~~ равнобедренный с углом $60°$ при вершине, т.е. равносторонний.

6

211006248 (U116324 M1273981)

Чистовик

б) 1) $BC=2$

$AD=7$

$AC = AO+OC = AD+BC = 9$

$DB = DO+BO = AD+BC = 9$

$\angle AOD = 60°$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\angle AOD = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{81\sqrt{3}}{4}$

2) $\angle AOB = 120°$

По теореме косинусов в $\triangle AOB$:

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos\angle AOB$

$AB^2 = 49 + 4 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 53 + 14 = 67$

$AB = \sqrt{67}$

По формуле площади равностороннего треугольника:

$S_{ABT} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\frac{\sqrt{3}}{4}}{81\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{67}{81}$

Ответ: $\frac{67}{81}$.

7

211006248 (U116324 M1273981)