Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

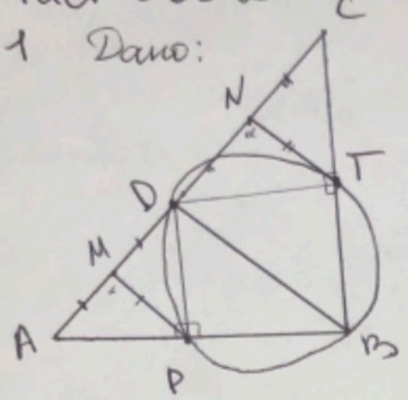
Шифр: **211006230**

ID профиля: **328129**

Вариант 10

Чистовик

№1 Дано:



$\triangle ABC$ BD - диаметр окружности

$AM = MD$ $DN = NC$

$PM \parallel TN$

2) $PM = 1$ $NT = \frac{3}{2}$ $BD = \sqrt{5}$

Найти: а) $\angle ABC$ б) S_{ABC}

Решение:

а) Проведем отрезки PD и TD

Точки T, P, B и D лежат на данной окружности по условию

$\angle BPD$ опирается на диаметр BD этой окружности $\Rightarrow$ $\angle BPD = 90^\circ$

$\angle BTD$ аналогично $\Rightarrow \angle BTD = 90^\circ$

$\angle APD$ смежный с $\angle BPD \Rightarrow \angle APD = 180^\circ - \angle BPD = 90^\circ$

$\angle CTD$ смежный с $\angle BTD \Rightarrow \angle CTD = 180^\circ - \angle BTD = 90^\circ$

* PM и TN медианы в прямоуг. тр-ках $\triangle APD$ и $\triangle CTD$ соответственно $\Rightarrow$ $PM = \frac{1}{2}AD = AM = MD$ AD и CD - гипотенузы

$TN = \frac{1}{2}CD = CN = ND$

AC - секущая, $PM \parallel TN$ $\Big\}$ $\angle AMP = \angle DNT = \alpha$ как односторон. углы

$\angle AMP$ - внешний угол при р/б $\triangle MDP$ ($MD = MP \Rightarrow \angle MDP = \angle MPD$)

$\angle AMP = \angle MDP + \angle MPD = 2\angle MDP$ $\angle MDP = \frac{\alpha}{2}$

$\triangle DNT$ р/б $\Rightarrow \angle NDT = \angle NTD$ (углы при основании)

По сумме углов в тр-ке $\angle NDT + \angle NTD + \alpha = 180^\circ$

$$\angle NDT = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$\angle PDT = 180^\circ - \angle ADP - \angle NDT = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ$

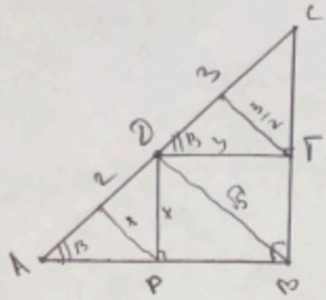
DTBP - вписанный 4-угольник $\Rightarrow \angle TDP + \angle PBT = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle PBT = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\angle ABC = 90^\circ$

Чистовик

№15

Заметим, что $\square ГBP$ прямоугольник (все углы прямые) $\Rightarrow PB \parallel ГD \Rightarrow AB \parallel DГ$



$AD = 2PM = 2$ * ранее объяснено

$CD = 2NГ = 3$

Пусть $PD = x$

$DГ = y$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5}$

$x^2+y^2 = 5 \quad y^2 = 5-x^2$

$\left.\begin{array}{l} AC\text{ - секущая} \\ AB \parallel DГ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle CDГ = \angle DAP = \beta$

$\sin\beta = \frac{x}{2} \quad \cos\beta = \frac{y}{3} \quad \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \frac{x^2}{4} + \frac{5-x^2}{9} = 1 \quad \frac{5}{36}x^2 = \frac{4}{9} \quad x^2 = \frac{4^2}{5}$

$x = \frac{\sqrt{5}}{5}4 = 0{,}8\sqrt{5}$

$y^2 = 5 - x^2 = 5 - 0{,}8^2 \cdot 5 = 5 - 3{,}2 = 1{,}8$

$y = \sqrt{1{,}8}$ подходит

$\sin\beta = \frac{x}{2} = 0{,}4\sqrt{5} \quad \cos\beta = \frac{y}{3} = \frac{\sqrt{1{,}8}}{3} = \sqrt{0{,}2}$

$S_{ABC} = S_{DГBP} + S_{ADP} + S_{CГD} \neq 4$

$S_{DГBP} = xy = 0{,}8\sqrt{5} \cdot \sqrt{1{,}8} = 0{,}8\sqrt{9} = 2{,}4$

$S_{ADP} = AP \cdot \frac{x}{2} = \cos\beta \cdot \underset{2}{AD} \cdot \frac{x}{2} = \cos\beta \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} = \cos\beta\, x = \sqrt{0{,}2} \cdot 0{,}8\sqrt{5} = 0{,}8$

$S_{CГD} = y \cdot \frac{CГ}{2} = \frac{y}{2}\sin\beta \cdot \underset{3}{CD} = \frac{y}{2} \cdot 3 \cdot \sin\beta = 1{,}5\sqrt{1{,}8} \cdot 0{,}4\sqrt{5} = 0{,}6 \cdot 3 = 1{,}8$

$S_{ABC} = 2{,}4 + \overbrace{0{,}8 + 1{,}8}^{2{,}6} = 5$

Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$

б) $S_{ABC} = 5$

2

211006230 (U328129 M1276158)

Чистовик

№2 $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

$21+4x-x^2=0$ $\quad x=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot 21}}{-2}=\begin{matrix}-3\\7\end{matrix}$ $\Rightarrow$ $21+4x-x^2=$
$=-(x+3)(x-7)=(x+3)(7-x)$

$\cancel{\sqrt{(x+3)(7-x)}}$ $\quad \sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

ОДЗ

$x+3\geq 0$ $\quad 7-x\geq 0$ $\quad (x+3)(7-x)\geq 0$

$x\geq -3$ $\quad x\leq 7$ $\quad -3\leq x\leq 7$

Итого $-3\leq x\leq 7$

$-2\sqrt{(7-x)(x+3)}=\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}-4$

Заметим
$(\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3})^2=$
$=7-x+x+3-2\sqrt{(7-x)(x+3)}=$
$=10-2\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$10-2\sqrt{(7-x)(x+3)}-10=\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}-4$

$(\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3})^2=\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}+6$

Пусть $\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}=y$

$y^2=y+6$ $\quad 0=y^2-y-6$

$y=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 6}}{2}=\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}$ $\quad \cancel{y_1=6}$ $y_1=3$
$y_2=-2$

1) $\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}=3$

$7-x+x+3-2\sqrt{(7-x)(x+3)}=9$

$-2\sqrt{(7-x)(x+3)}=-1$

$\sqrt{(7-x)(x+3)}=0,5$

$(7-x)(x+3)=0,25$

$7x+21-x^2-3x=0,25$

$-x^2+4x+20,75=0$

$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot 20,75}}{-2}=\frac{-4\pm 3\sqrt{11}}{-2}=\frac{4\pm 3\sqrt{11}}{2}=$
$=2\pm 1,5\sqrt{11}$

2) $\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}=-2$

$\sqrt{7-x}+2=\sqrt{x+3}$

$(\sqrt{7-x}+2)^2=x+3$

$7-x+4+4\sqrt{7-x}=x+3$

$4\sqrt{7-x}=2x+14$ положительна по ОДЗ

$16(7-x)=4x^2+2\cdot 4x\cdot 14+196$

$0=4x^2+72x+84$

$0=x^2+18x+21$

$\cancel{D=18^2-4\cdot 2}$

$x=\frac{-18\pm\sqrt{18^2-4\cdot 21}}{2}=\frac{-18\pm\sqrt{15}\cdot 4}{2}=$
$=-9\pm 2\sqrt{15}$

3

Чистовик

Продолжение № 2

Проверим по ОДЗ

$2+1,5\sqrt{11} \vee 7$

$\sqrt{11}\cdot 1,5 \vee 5$

$\sqrt{11} \vee \frac{10}{3}$

$\sqrt{11} < \frac{10}{3}$

норм

$2-1,5\sqrt{11} \vee -3$

$5 \vee 1,5\sqrt{11}$

$10 \vee 3\sqrt{11}$

$10 > 3\sqrt{11}$

норм

~~$-9+2\sqrt{15} \vee$~~

$-9+2\sqrt{15} \vee -3$

$2\sqrt{15} \vee 6$

$\sqrt{15} \vee 3$

$\sqrt{15} > 3$

$-9+2\sqrt{15} \vee 7$

$2\sqrt{15} \vee 16$

$\sqrt{15} \vee 8$

$\sqrt{15} < 8$

норм

$-9-2\sqrt{15} < -3 \Rightarrow$ не подходит

Ответ: $x = \{2+1,5\sqrt{11}; 2-1,5\sqrt{11}; -9+2\sqrt{15}\}$

Чистовик

№ 3

$2x - y = 5 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 5}$

координаты A (у уравнения должна быть одна пара $\Rightarrow D = 0$ решений, иначе одну точку задают несколько координат ⇓ Противоречие!)

$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$

$0 = 8x^2 + x(12a - 4y) + y^2 + 5a^2 - 4ay$

$D = 0 = (12a - 4y)^2 - 4 \cdot 8(y^2 + 5a^2 - 4ay) =$

$= 144a^2 - 96ay + 16y^2 - 32y^2 - 160a^2 + 128ay =$

$= -16a^2 - 16y^2 + 32ay = 0$

$y^2 - 2ay + a^2 = 0 \quad (y - a)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y = a \\ x = -0{,}5a \end{matrix}}$

$x = \frac{4y - 12a}{2 \cdot 8} = \frac{\overset{-8a}{4a - 12a}}{16} = -0{,}5a$

Парабола

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$

$y = x^2 - 2ax + a^2 + 3 = (x - a)^2 + 3$ смещение на a вправо на 3 вверх

$\Rightarrow$ координаты вершины B $(a; 3)$

⇓

по условию

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a - 5 < 3 & \text{выше прямой} \\ 2 \cdot (-0{,}5a) - 5 < a \end{cases} \\ \begin{cases} 2a - 5 > 3 & \text{ниже прямой} \\ 2 \cdot (-0{,}5a) - 5 > a \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 4 \\ a > -2{,}5 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 4 \\ a < -2{,}5 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -2{,}5 < a < 4 \\ \varnothing \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Ответ: $-2{,}5 < a < 4$

5

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006230**

ID профиля: **328129**

Вариант 10

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81 \end{cases}$$

Пусть
$x^2+y^2=m$
$x^2y^2=n$

$x^4+y^4+2x^2y^2+5x^2y^2=81$

$(x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81$

$$\begin{cases} \frac{6}{m}+n=10 \\ m^2+5n=81 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{30}{m}+5n=50 \\ m^2+5n=81 \end{cases}$$

$50-\frac{30}{m}=81-m^2$

$m^2-\frac{30}{m}-31=0 \quad | \cdot m$

$m^3-31m-30=0$

$m=-1$

$$\begin{array}{r|l} m^3+0\cdot m^2-31m-30 & m+1 \\ \hline -\ m^3+m^2 & m^2-m-30 \\ -m^2-31m & \\ -\ -m^2-m & \\ -30m-30 & \\ -\ -30m-30 & \\ 0 & \end{array}$$

$m^3-31m-30=(m+1)(m^2-m-30)=0$

$m_1=-1 \quad m_2=6 \quad m_3=-5$

$m=\frac{+1\pm\sqrt{1+4\cdot30}}{2}=\begin{matrix}6\\-5\end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} x^2\geq0 \\ y^2\geq0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2+y^2\geq0 \Rightarrow m\geq0$

$\Rightarrow$ подходит только $m_2=6$

$\Rightarrow n=10-\frac{6}{m}=9$

$x^2+y^2=6 \qquad x^2y^2=9$

$y^2=6-x^2 \qquad x^2(6-x^2)=9$

$-x^4+6x^2-9=0 \qquad x^2=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot9}}{-2}=3$

$x_1=\sqrt{3} \qquad y_1=\pm\sqrt{6-x^2}=\pm\sqrt{3}$

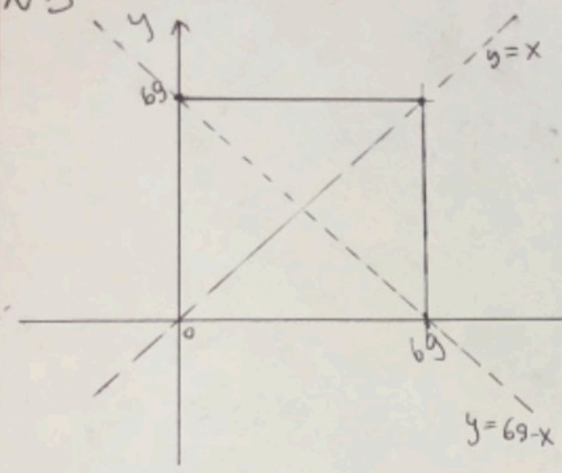
$x_2=-\sqrt{3} \qquad y_2=\pm\sqrt{6-x^2}=\pm\sqrt{3}$

т.е. $x=\pm\sqrt{3} \quad y=\pm\sqrt{3}$ всего 4 пары ответов

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3}) \quad (-\sqrt{3};\sqrt{3})$
$(\sqrt{3};-\sqrt{3}) \quad (-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

Чистовик

№5



① всего узлов внутри квадрата, исключая границы

$(69-2)(69-2)=67\cdot 67$

2 граничных узла по каждую сторону

② Теперь считаем кол-во способов

Рассмотрим сначала варианты расположения точек

(какая из A и B неважно)

	A	B
1)	$y=x$	$*^1$
2)	$y=69-x$	$*^2$
3)	$y=x$	$y=x$
4)	$y=69-x$	$y=69-x$
5)	$y=x$	$y=69-x$

$*^1$ не на $y=x$
не на $y=69-x$
не на той же вертикали и горизонтали (по условию)

$*^2$ тоже самое

Это все возможные случаи, независимые друг от друга

Считаем

1) A на одно из 67 мест $\qquad S_1=67\cdot(66^2-2\cdot 65)$

B на остатки $\underbrace{67\cdot 67}_{\text{все}}-\underbrace{67}_{y=x}-\underbrace{66}_{y=69-x}-\overset{\text{гориз.}}{65}-\underset{\text{вертик.}}{65}=$

(! середину один раз считаем)

$=67\cdot 66-66-2\cdot 65=$

$=66^2-2\cdot 65$

2) Аналогично

$S_2=S_1=67\cdot(66^2-2\cdot 65)$

3) $S_3 = 67 \cdot 66$

A B $(67-1)$

чтобы там A

4) Аналогично с S_3

$S_4 = S_3 = 67 \cdot 66$

5)

$S_5 = 67 \cdot 67 - 1 = 66 \cdot 68$

когда A и B сливаются в одну точку в центре квадрата

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 67 \cdot (66^2 - 2 \cdot 65) + 67(66^2 - 2 \cdot 65) +$

$+ 67 \cdot 66 + 67 \cdot 66 + 66 \cdot 68 =$

$= 2 \cdot 67(66^2 - 2 \cdot 65) + 2 \cdot 67 \cdot 66 + 66 \cdot 68 =$

$= 2 \cdot 67(66^2 - 2 \cdot 65 + 66) + 66 \cdot 68 = 2 \cdot 67(66 \cdot 67 - 2 \cdot 65) + 66 \cdot 68$

66×67: 462, 396, 4422

$65 \cdot 2 = 130$

$4422 - 130 = 4292$

$67 \cdot 2 = 134$

4292×134: 17168, 12876, 4292, 575128

68×66: 408, 408, 4488

$575128 + 4488 = 579616$

$S = 579616$

Ответ: 579616

Продолжение №5

③

211006230 (U328129 M1276159)

Продолжение №6

$\triangle ABГ$ — р/б ($BГ = AГ$); угол при вершине $\angle BГA = 60°$

$\Rightarrow \angle ГBA = \angle ГAB = \frac{180° - \angle BГA}{2} = 60° \Rightarrow \triangle ABГ$ правильный, т.к. все углы тр-ка по $60°$, ч.т.д.

углы при основании р/б тр-ка равны

2) AC - секущая
$\angle BCA = \angle CAD = 60°$ } $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ - трапеция

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$$

$h_1 = \frac{1}{tg\,30°} = \sqrt{3}$ $\quad h_2 = \frac{3,5}{tg\,30°} = 3,5\sqrt{3}$

$h = \sqrt{3} + 3,5\sqrt{3} = 4,5\sqrt{3}$

$$S_{ABCD} = \frac{\overset{9}{7+2}}{2} \cdot 4,5\sqrt{3} = 4,5^2\sqrt{3}$$

$\triangle CГD = \triangle BCГ$ по двум сторонам и углу
$\Downarrow$ $\quad$ CГ - общая $\quad \angle BCГ = \angle CГD = 120°$
$\triangle CГD = \triangle AГD$ $\quad$ $ГD = BC$
$\Rightarrow S_{CГD} = S_{BCГ} = S_{ADГ}$

$S_{ABГ} = S_{ABCD} + S_{CГD} - S_{BCГ} - S_{ADГ} = S_{ABCD} - S_{CГD} =$

$= 4,5^2\sqrt{3} - 3,5\sqrt{3} = \sqrt{3}(4,5^2 - 3,5)$

$S_{CГD} = \frac{1}{2} \underset{AD}{\overset{\shortparallel}{CГ}} \cdot \underset{BC}{\overset{\shortparallel}{ГD}} \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7 \cdot \sin 60 = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,5\sqrt{3}$

$$\frac{S_{ABГ}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{3}(4,5^2 - 3,5)}{4,5^2\sqrt{3}} = 1 - \frac{3,5}{4,5^2} = \frac{335}{405} = \frac{67}{81}$$

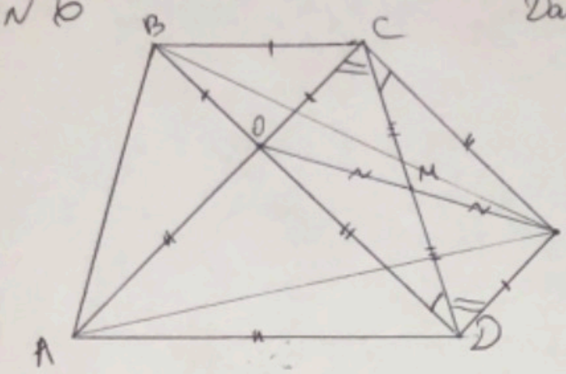
5

Ответ $\frac{67}{81}$

211006230 (U328129 M1276159)

Чистовик

№ 6



Дано: ABCD

△BOC прав. ⇒ { BC = OC = BO; все углы по 60° }

△AOD прав. ⇒ AO = OD = AD

CM = MD 2) BC = 2 AD = 7

1) Док-ть: △ABГ прав.

2) Найти: $\frac{S_{ABГ}}{S_{ABCD}}$

Решение:

1) Проведем отрезки CГ и ГD

В 4-угольнике CГDO диагонали точкой пересечения делятся пополам ⇒ CГDO параллелограм ⇒ CГ ∥ OD ГD ∥ OC

CO = ГD CГ = OD

CD-секущая
CГ ∥ OD } ⇒ ∠CDO = ∠ГCD как накрест леж.

CD-секущая
OC ∥ ГD } ∠ГDC = ∠OCD как накрест лежащие

∠BCO = 60°
∠ADO = 60° по условию

∠BCГ = ∠BCO + $\underbrace{∠OCD}_{=∠CDГ}$ + $\underbrace{∠DCГ}_{=∠ODC}$ =

= 60° + ∠CDГ + ∠ODC = ∠ADГ

$\boxed{∠BCГ = ∠ADГ}$

Проведем отрезки BГ и AГ

△BCГ = △ADГ по I призн. (BC = OC = ГD AD = OD = CГ ∠BCГ = ∠ADГ)

⇒ BГ = AГ

∠CBГ = ∠AГD ∠CГB = ∠ГAD

∠COD = 180° − ∠BOC = 120° (∠COD и ∠BOC смежные)

⇒ ∠OCГ = 180° − ∠COD = 60° (параллелогр.)

∠BCГ = ∠BCO + ∠OCГ = 60° + 60° = 120°

∠CBГ + ∠CГB = 180° − ∠BCГ = 180° − 120° = 60° (в тр-ке сумма всех углов 180°)

∠CГD = ∠COD = 120° (параллелогр)

∠BГA = ∠CГD − ∠CГB − $\underbrace{∠AГD}_{=∠CBГ}$ = 120° − (∠CГB + ∠CBГ) = 120° − 60° = 60°

4