Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006086**

ID профиля: **216872**

Вариант 10

(1)

№1

Дано:

$D \in AC$

BD – диаметр ω

$\omega \cap AB = P$

$\omega \cap BC = T$

$AM = MD$

$DN = CN$

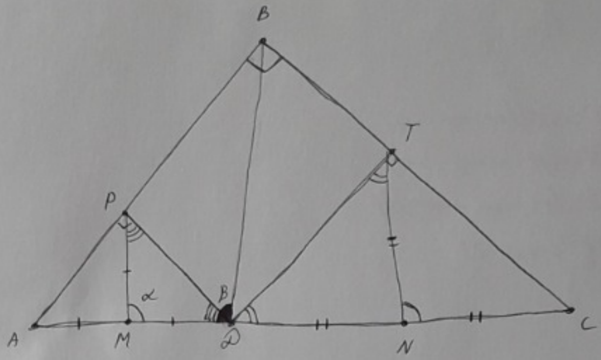
$M, N \in AC$

$PM = 1$

$TN = \frac{3}{2}$

$BD = \sqrt{5}$

$PM \parallel TN$



Найти:

1) $\angle ABC$ – ?

2) S_{ABC} – ?

Решение:

1) $PM \parallel TN$ (по усл)

$\Rightarrow \angle PMD = \angle TNC$ (внут) $= \alpha$

$\angle TND = 180° - \alpha$

BD – диаметр

$\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90°$ (опир. на диам BD)

$TN = \frac{1}{2}DC \Rightarrow DN = NC$ (при медиане прямоуг. $\triangle$)

аналогично:

$PM = AM = DM$

$\angle TDN + \angle DTN + \angle TND = 180°$ ($\Sigma \angle \triangle$)

$\angle TDN = \angle DTN$ ($\angle$ при основ. равнобед. $\triangle$)

$\angle TDN = \frac{\alpha}{2}$

аналогично:

$\angle PDM = 90° - \frac{\alpha}{2}$ ($\triangle MPD$ - равнобед)

$\angle PDT = 180 - \angle PDM - \angle TDN = 90° = 180 - \angle ABC$ ($DPBT$ - вписанный)

$\Rightarrow \angle ABC = 90°$

) ~~$\angle BAC = \angle APM$ (в. $\angle$ при осн равнобед. $\triangle$)~~

~~$\angle PMA = 180° - \alpha$~~

~~$\angle BAC = \frac{\alpha}{2} = \angle TDC = \angle PAD$~~

(2)

~~$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle APD \sim \triangle DTC$ (по 2∠)~~

$2PM = AD = 2$

$2TN = DC = 3$

$\angle BDA = \beta$

$AB^2 = 4+5-4\sqrt{5}\cos\beta$ (по теор. cos)

$BC^2 = 9+5+6\sqrt{5}\cos\beta$ (по теор. cos)

$AB^2 + BC^2 = AC^2 = 25$ (по теор Пифагора)

$AB^2 + BC^2 = 23 + 2\sqrt{5}\cos\beta = 25$

$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$AB^2 = 5$

$BC^2 = 20$

$$\frac{AB\cdot BC}{2} = S_{ABC} = \frac{\sqrt{5\cdot 20}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$, $S_{ABC} = 5$

(3)

№2

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+10-2\sqrt{21+4x-x^2}-6=0$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+x+3-2\sqrt{(x+3)(7-x)}+7-x-6=0$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x})^2-6=0$

$t=\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}$

$t^2+t-6=0$

$\left[\begin{array}{l} t=-3, \\ t=2; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-3, \quad ^\wedge 2 \\ \sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2; \quad ^\wedge 2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 10-2\sqrt{21+4x-x^2}=9, \\ 10-2\sqrt{21+4x-x^2}=4; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{21+4x-x^2}=\frac{1}{2}, \quad ^\wedge 2 \\ \sqrt{21+4x-x^2}=3; \quad ^\wedge 2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2-4x-20{,}75=0, \; * \\ x^2-4x-12=0; \; ** \end{array}\right.$

(*) $x^2-4x-20{,}75=0$

$D=16-83<0$

(**) $x^2-4x-12=0$

т.В. $x=6$

$x=-2$

Проверка

$x=6$ ✓

$\sqrt{6+3}-\sqrt{7-6}+4\overset{?}{=}2\sqrt{21+4\cdot 6-6^2}$

$3-1+4\overset{?}{=}2\cdot 3$

$6=6$

$x=-2$ (не подходит)

$\sqrt{-2+3}-\sqrt{7+2}+4\overset{?}{=}2\sqrt{21-2\cdot 4-(-2)^2}$

$1-3+4\overset{?}{=}2\cdot 3$

$2\neq 6$

Ответ: $x=6$

(9)

№ 3

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$(4x^2+4ax+a^2)+(4x^2+8ax+4a^2+y^2-4ay-4xy)=0$

$(2x+a)^2+(2x+2a-y)^2=0$

$(2x+a)^2\geq 0$

$(2x+2a-y)^2\geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+a=0, \\ 2x+2a-y=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\frac{a}{2}, \\ y=a; \end{cases}$

$A\left(-\frac{a}{2}; a\right)$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

Вершина $\left(a; \frac{3}{a}\right)$ – B

$2x-y=5$

$y-2x+5=0$

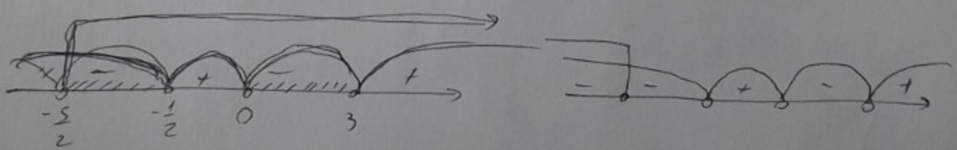
т.к. A и B – лежат по одну сторону

A_y-2A_x+5 и B_y-2B_x+5 – имеют один знак

$\begin{cases} a>-a-5 \\ \frac{3}{a}>2a-5 \end{cases}$ или $\begin{cases} a<-a-5 \\ \frac{3}{a}<2a-5 \end{cases}$

$\begin{cases} a>-2,5 \\ \frac{2a^2-5a-3}{a}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} a<-2,5 \\ \frac{2a^2-5a-3}{a}>0 \end{cases}$

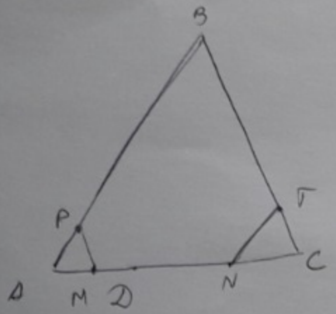
$\begin{cases} a>-2,5 \\ \frac{(a-3)(a+\frac{1}{2})}{a}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} a<-2,5 \\ \frac{(a-3)\cdot(a+\frac{1}{2})}{a}>0 \end{cases}$

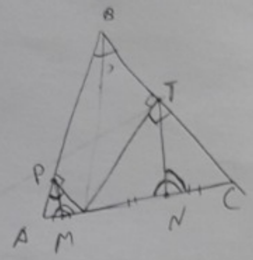


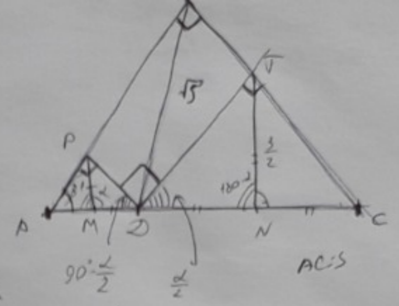
$\Rightarrow a\in(-2,5;-0,5)\cup(0;3)$

Ответ: $a\in(-2,5;-0,5)\cup(0;3)$

черновик







$\angle \cdot 6$

$8x^2+12ax+y^2-4ay+5a^2-4xy=0$

$4x^2+$

$4x^2+12ax+9a^2+y^2-4ay+4a^2$

$8x^2+12ax+a^2-4xy+(y-2a)^2$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$(2x+2a)^2+4x^2+4ax+y^2-4ay+a^2-4xy$

$(2x-y+a)^2=4x^2+y^2+a^2+4xy+4ax+2ya$

$(4x^2+4ax+a^2)+(4x^2+8ax+4a^2+y^2-4ay-4xy)=$

$=(2x+a)^2+(2x+2a-y)^2$

$AB^2=4+5-4\sqrt{3}\cdot\cos\alpha$

$BC^2=9+5+6\sqrt{3}\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$23+2\sqrt{3}\cos\alpha=25$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$AB^2=9-4=5$

$BC^2=20$

$AB^2 \cdot BC^2=4\cdot 5^2$

$\frac{AB BC}{2}=\frac{2\cdot 5}{2}$ 5

$\frac{23}{4} > \frac{24}{4} > 6$

$2\sqrt{6} < \sqrt{45}$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

$x^2-4x-21=$

$=(x+3)(x-7)$

$x \geq -3$

$x \leq 7$

$x+3 \geq 0$

$7-x>0$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{(x+3)(7-x)}+10-10$

$(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+7})^2$

$x+3+7=10$

$t^2=10-2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$t+10-14=t^2$

$t^2-t-14=0$

3; -2

$t+t^2-6=0$

$t^2+t-6=0$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=3$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-2$

$x^2-4x-20=0$

$D_1=4+20=24=6\cdot 4$

$2\pm 2\sqrt{6}$

$20\frac{3}{4}$

$D_4 = 16 - 83 =$

$\Sigma = 4 \quad 6; -2$

$\Pi = 4 - 12$

$24 + 21 - 36$

$45 - 36 = 9$

$21 + 48 - 4$

$-400 - 2$

$1022 \quad 9$

чернови

черновик

$(2x+a)^2+(2x+2a-y)^2=0$

$\begin{cases} 2x+a=0, \\ 2x+2a-y=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\frac{a}{2}, \\ y=a; \end{cases}$ $A(-\frac{a}{2}; a)$

$y=ax^2+bx+c$

$0=y'=2ax+b$

$x=-\frac{b}{2a}$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$y=x^2-2ax+(a^2+\frac{3}{a})$

$B_x=a$ $B(a; \frac{3}{a})$

$y=\cancel{a^2-2a^2+a^2}+\frac{3}{a}$

$2x-y=5$

$y=2x-5$

$\begin{cases} a>-a-5 \\ \frac{3}{a}>2a-5 \end{cases}$ $\begin{cases} a<-a-5 \\ \frac{3}{a}<2a-5 \end{cases}$

$2a>-5$

$a>-2,5$

$\Sigma=2,5$

$\Pi=-1,5$ $3\cdot -\frac{1}{2}$

$2a^2-5a-3=0$

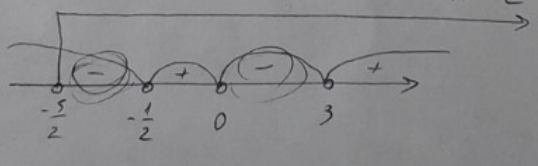
$\frac{3}{a}-2a+5>0$

$2(a-3)(a+\frac{1}{2})$

$\frac{-2a^2+5a+3}{a}>0$

$\frac{(a-3)(a+\frac{1}{2})}{a}<0$

$a>-\frac{5}{2}$



$a\in(-2,5; -0,5)\cup(0;3)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006086**

ID профиля: **216872**

Вариант 10

1

№4

$$\begin{cases}\dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10,\\ x^4+y^4+7x^2y^2=81;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10,\\ x^4+2x^2y^2+y^4+5x^2y^2=81;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10,\\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81;\end{cases}$$

Пусть $\begin{cases}\vartheta=x^2+y^2\geq 0\\ v=x^2y^2\geq 0\end{cases}$, тогда $\begin{cases}x^2=\vartheta-y^2\\ y^4-\vartheta y^2+v=0\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{6}{\vartheta}+v=10,\\ \vartheta^2+5v=81;\end{cases}\qquad \begin{cases}v=10-\dfrac{6}{\vartheta},\\ \vartheta^2+50-\dfrac{30}{\vartheta}=81;\ *\end{cases}$$

(*) $\vartheta^2+50-81-\dfrac{30}{\vartheta}=0$

$\vartheta^3-31\vartheta-30=0$

$\vartheta=6$ – решение

$216-31\cdot 6-30=0$

$(\vartheta-6)(\vartheta^2+6\vartheta+5)=0$

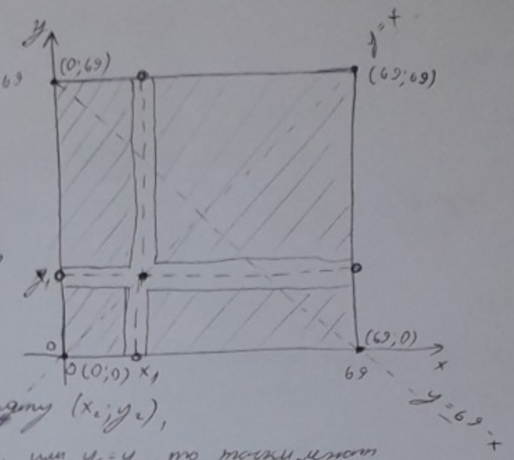
$(\vartheta-6)(\vartheta+1)(\vartheta+5)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\vartheta=6,\\ v=9,\end{cases}\\ \begin{cases}\vartheta=-1,\\ v=16,\end{cases}\\ \begin{cases}\vartheta=-5,\\ v=11\frac{1}{5};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2=6-y^2,\\ y^4-6y^2+9=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2=-1-y^2,\\ y^4+1y^2+16=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2=-5-y^2,\\ y^4+5y^2+11\frac{1}{5}=0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\pm\sqrt{3},\\ y=\pm\sqrt{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x\in\varnothing,\\ y\in\varnothing;\end{cases}\ (D<0)\\ \begin{cases}x\in\varnothing,\\ y\in\varnothing;\end{cases}\ (D<0)\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\sqrt{3})$

②

N5



без ограничения общности первая точка находится на какой-то прямой, с координатой $(x_1; y_1)$, тогда 2-я точка может находиться в любой другой закрашенной точке. Т.к. Если 2-я точка имеет координату $(x_2; y_2)$, то в случае, если $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, то точки лежат на прямой параллельной OX и OY соответственно, в любом другом случае – нет.

=> x_2 и y_2 могут принимать любые из 67 значений. (без учета повторений)

1) точка 1 лежит на прямой $y = x$. для каждого x_1, существует одна точка $1\ (x_1; x_1)$, т.к. она находится внутри $x_1 \in [1; 68]$ – 68 значений.

Без учета повторений имеем $68 \cdot 67 \cdot 67$ – вариантов, но т.к. от перемены точек результат не меняется, то мы должны вычесть варианты расположения точек на прямой $y = x$. всего есть C_{68}^2 вариантов выбрать 2 точки => всего есть $68 \cdot 67^2 - \frac{68 \cdot 67}{2}$ вариантов.

2) аналогично. т.к. этот случай получается ~~симметрией~~ поворотом на 90° относительно центра, но в таком случае мы посчитали варианты, когда 2-я точка находилась на прямой $y = 69 - x$, а 1-я на $y = x$ и варианты, когда 1-я точка находилась в центре (на пересечении диагоналей), однако при решении $x_1 = 69 - x_1$ $x_1 \notin \mathbb{Z}$ => этот случай не считаем.

Когда 1-я точка на прямой $y = x$; а 2-я на $y = 69 - x$, всего есть $68 \cdot 68$ таких вариантов (т.к. точки пересечения прямых не лежит в узле сетки)

=> всего вариантов $2 \cdot 68 \cdot 67 (67 - \frac{1}{2}) - 68^2 = 68(67(134 - 1) - 68) = 601324$

Ответ: 601324

③

№6

Дано:

ABCD - выпуклый

$AC \cap BD = O$

N - середина CD

O - зеркальна T отн. N

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные

$BC = 2$

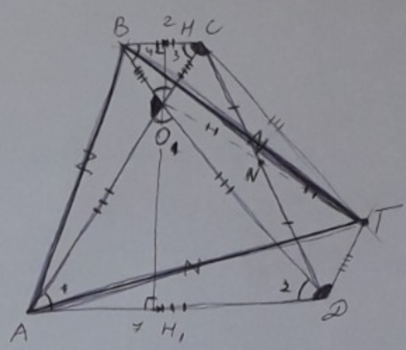
$AD = 7$

Док-ть:

$\triangle ABT$ - правильный

Найти:

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?



Док-во:

$CN = ND$ (по усл.)
$ON = NT$ (по усл.) $\Big| \Rightarrow$ OCTD - пар-м (пр. пр-ма)

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 60°$ (по опр.)

$\angle BOA = 180 - \angle 1 = 120° = \angle COD$ (верт.)

$\angle COD + \angle TDO = 180°$ (св-во $\angle$ пар-ма)

$\angle TDO = \angle TCO = 180° - \angle COD = 60°$

$\angle ADT = \angle 2 + \angle TDO = \angle 3 + \angle TCO = \angle TCB = 120° = \angle BOA$

$AO = AD = OD$ (по опр.)

$OD = CT$ (св. противолеж. сторон пар-ма)

$BO = BC = OC$ (по опр.)

$OC = TD$ (св. противолеж. сторон пар-ма)

$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle ADT = \triangle TCB$ (по 2 сторон. и $\angle$ между ними)

$\Rightarrow AB = BT = AT$

$\Rightarrow \triangle ABT$ - правильный ЧТД

Решение:

$\angle 2 = \angle 4 = 60°$ (по опр.) $\Rightarrow BC \parallel AD$ (накрест леж. $\angle$ при сек. BD)

HH_1 - высота: $O \in HH_1$

$OH = BO \sin 60° = 2 \sin 60°$

$OH_1 = AO \sin 60° = 7 \sin 60°$

$HH_1 = OH + OH_1 = 9 \sin 60° = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

(4)

~~8~~ ABCD – трапец. (по опр.)

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot HH_1 = \frac{9}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$AB = BT = AT$ (из п.1)

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\angle AOB$ (теор. cos)

$AB^2 = 4 + 49 - 28 \cdot \cos 120° = 53 + 28 \cdot \frac{1}{2} = 67$

$S_{ABT} = AB^2 \sin 60° = \frac{AB^2\sqrt{3}}{2} = \frac{67\sqrt{3}}{2}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3} \cdot \cancel{4}\,2}{81\sqrt{3} \cdot \cancel{2}} = \frac{134}{81}$

Ответ: ~~134~~ $\frac{134}{81}$