Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

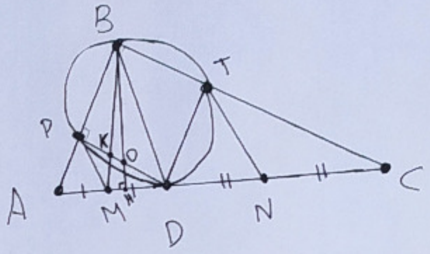
Шифр: **211006060**

ID профиля: **824743**

Вариант 10

Чистовик

Задача №1



Дано:

$\triangle ABC$; $D \in AC$

BD - диаметр ω

$\omega \cap AB = P$; $\omega \cap BC = T$

$DN = NC$; $AM = MD$; $PM \parallel TN$

б) $MP = 1$; $NT = \frac{3}{2}$; $BD = \sqrt{5}$

Найти

а) $\angle ABC$ - ?

б) S_{ABC} - ?

Решение

а) 1) Проведём PD и TD

2) $\angle BTD$ - вписан в ω и опир. на BD $\Rightarrow$ $\angle BTD = 90°$

$\angle CTD = 180 - \angle BTD = 90°$ (как смеж.) ; TN - медиана п/уг $\triangle$ $\Rightarrow$ $TN = DN = NC$ $\Rightarrow$ $\triangle TND$ - р/б

3) Аналогично $\triangle APM$ - р/б

4) Пусть $\angle TND = \alpha$, тогда $\angle NTD = \angle NDT = \frac{180 - \alpha}{2}$

$\angle TND = \angle PMA = \alpha$ (как соотв. при $PM \parallel TN$ и сек MN, тогда $\angle APM = \angle MAP = \frac{180 - \alpha}{2}$

Из п/уг $\triangle APM$ $\angle PDA = 90 - \angle PAM = 90 - \frac{180 - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

5) $\angle PDM + \angle PDT + \angle CDT = 180°$

$\frac{\alpha}{2} + \frac{180 - \alpha}{2} + \angle PDT = 180$ $\Rightarrow$ $\angle PDT = 90°$

6) т.к. $PDTB$ - вписан, то $\angle ABC + \angle PDT = 180°$ $\Rightarrow$ $\angle ABC = 90°$

б) 1) Проведём BM и $BH \perp AC$. Пусть $\angle ABH = \beta$, тогда $\angle BAD = 90 - \beta$

2) Из п/уг $\triangle APD$ $\angle PDA = \beta$. Из п/уг $\triangle HOD$ $\angle HOD = 90 - \alpha$. $\angle HOD = \angle POB = 90°$ (как верт)

3) Из п/уг $\triangle BPK$ $\angle BKP = 90 - \beta$ $\angle BKO = 180 - \angle BKP = 90 + \beta$ (как смеж.)

4) Из $\triangle BKO$ $\angle KBO = 180 - \angle BKO - \angle BOK = 180 - 90 - \beta - 90 + \beta = 0$ $\Rightarrow$ BM совпадает BH

$\Rightarrow$ BM - высота $\triangle ABC$

5) По т. Пифагора в $\triangle BMD$ $BM^2 = BD^2 - MD^2 = BD^2 - MP^2$ $\Rightarrow$ $BM = 2$

6) $AM = MD = PM = 1$ и $DN = NC = TN = \frac{3}{2}$ $AC = 2PM + 2TN = 5$

7) $S_{ABC} = \frac{1}{2} BM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$

Ответ: а) $90°$

б) 5

Лист №1

Чистовик

Задача №2

$\sqrt{x+3}-\sqrt{-(x-7)}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{-(x-7)}+4=2\sqrt{-(x-7)(x+3)}$

т.к. $(-x+7)\geq 0$ и $x+3\geq 0$

то $\sqrt{-(x-7)}\cdot\sqrt{x+3}=\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x+3}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3\geq 0 \\ -x+7\geq 0 \\ (7-x)(x+3)\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -3 \\ x\leq 7 \\ x\in[-3;7] \end{cases}$ $\Rightarrow x\in[-3;7]$

Сравним $\sqrt{7-x}>\sqrt{x+3}+4$ Решив это нер-во мы получим знач. x, при которых левая часть ур-я <0

$7-x>x+3+8\sqrt{x+3}+16$

$-2x-12>+8\sqrt{x+3}$

$-x-6>4\sqrt{x+3}$

$x+6<\underbrace{-4\sqrt{x+3}}_{\leq 0}$ А т.к. $x\in[-3;7]$, то $x+6>0$

$\Rightarrow$ нет реш. $\Rightarrow$ левая часть ур-я ≥ 0

Ответ: $x=6$

$\sqrt{7-x} \geq \sqrt{x+3}+4$

$7-x > x+3+8\sqrt{x+3}+16$

$-12-2x > 8\sqrt{x+3}$

$2x+12 < -8\sqrt{x+3}$

$x+6 < -4\sqrt{x+3}$

-6

$(a-b+4)^2$

$a^2+b^2+16+8a-8b-2ab$

$x+3+7-x+16+8\sqrt{x+3}-8\sqrt{7-x}-2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}=$

$4(7-x)(x+3)$

$26+8\sqrt{x+3}-8\sqrt{7-x}-2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}=4(7-x)(x+3)$

11
12
13
22
21
23
31

$a,b \geq 0$

6

a(b?

$26+8a-8b=4a^2b^2+2ab$

$4a^2b^2+2ab+8b-8a-26$

$2a^2b^2+ab+4b-4a-13$

$ab(2ab+1)+4(b-a)-13$

32 $a-2ab+b-2a+4=0$

33 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=$

$a(1-2b)+b=2a$

-2

0

$1-2b=2$

$x+3-2x$

6

1 4 9

$a-b+4=2ab$

$-(x$

$7-x$

$a-b=2(ab-2)$

$-x-3$

$1-3+4=6$

$\sqrt{2}-\sqrt{2}+4$

$\sqrt{a}-\sqrt{-a+10}+4=2\sqrt{}\sqrt{}$

$\sqrt{x+3}(1-\sqrt{7-x})-\sqrt{7-x}(1-\sqrt{x+3})+4=0$

$a-2ab-b=-4$

$3-1+4$

$-a+2ab+b=4$

-1

$-a+2ab+b=$

$x+3=2$

$7-x=2$

$-\sqrt{x+3}+2\sqrt{}\sqrt{}+\sqrt{-7+x}$

$7-x)$

$3-1+4$

$x+3=7-x$

$x=2$

$2x=4$

Черновик

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

$2\sqrt{-(x-7)(x+3)}$

$-x^2+4x+21=$

$D=16+84=100$ $\quad x_1=7 \quad x_2=-3$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 7-x\geq 0 \\ (x-7)(x+3)\geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\geq -3 \\ x\leq 7 \end{cases}$

$-\quad +\quad +$

$-3 \quad 7$

$a-b+4=2ab$ $\quad \leq 0 \quad \geq 0 \quad 0$

$a-2ab-b+\cancel{4}=0$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{-(x-7)}+4=2\sqrt{-(x-7)}\cdot\sqrt{x+3}$

$a=\sqrt{x+3}\geq 0$

$b=\sqrt{-(x-7)}\geq 0$

$a-2ab-b+4=0$

$a-b+4=2ab$

$a-2ab+b+4-2ab=0$

$a-2ab-b=-4$ $\quad a-b=2ab-4$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-2(ab-2)=0$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-2b=-4$

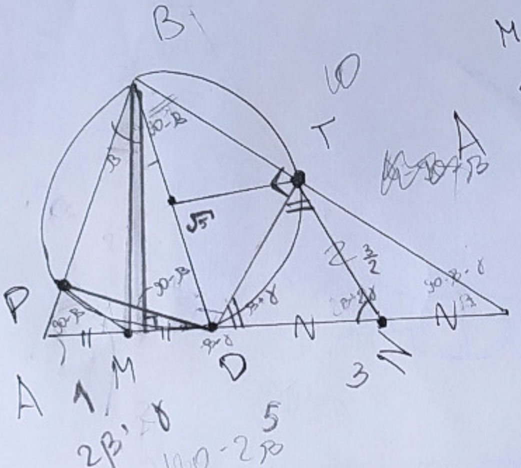
$(x+3)\sqrt{-(x-7)}+(x-7)\sqrt{x+3}+4\sqrt{\ }\sqrt{\ }=-2(x-7)(x+3)$

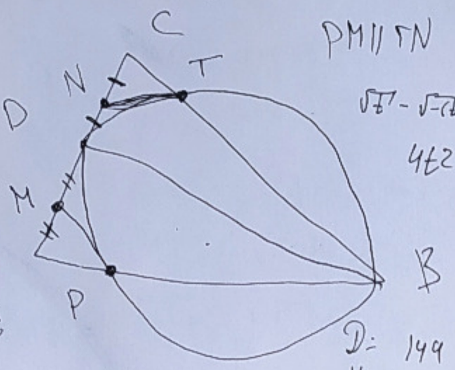
$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=2(b-2)$

$t \quad t-10$

PM || TN

PM || TN $\quad \angle ABC-?$





$\sqrt{t}-\sqrt{-(t-10)}$

$4t^2-38t+9=0$

$1444-16\cdot 9$

$D=144 \quad \sqrt{1300}$

$\times 16 \quad 10\sqrt{13}$

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0 \ (A)$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0 \quad (B)$

$y^2 \quad (y^2+4xy+4x^2)=(y-2a)$ $\quad y=2x-5$

$2\beta,\ \gamma \quad 180-2\beta$

$90-\beta-\gamma$

$5a^2-4ay+12ax+4x^2$

$x_1=\frac{38\pm 10\sqrt{13}}{8}$

$\frac{19\pm 5\sqrt{13}}{4}=t$

$a^2-2ab+b^2=4a^2b^2-16ab+16$

$\times\ 38 \quad 38 \quad 304 \quad 114 \quad 1444$

$x+3+7-x=4(x+3)(7-x)+16-16\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$14\sqrt{t}=4t+6$ $\quad 16t^2-148t+36$

$196t=16t^2+48t+36$ $\quad 8t^2-76t+18=0$

211006060 (U824743 M1275731)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006060**

ID профиля: **824743**

Вариант 10

Чистовик

Задача №4

$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81 \end{cases}$

ОДЗ: $x^2+y^2\neq0$
$x\neq0$ и $y\neq0$

Пусть $x^2+y^2=a$ $x^2y^2=b$
$a\geq0$; $b\geq0$

$\begin{cases} \frac{6}{a}+b=10 \\ a^2+5b=81 \end{cases}$ $\begin{cases} b=\frac{81-a^2}{5} \\ \frac{6}{a}+b=10 \end{cases}$ $\frac{6}{a}+\frac{81-a^2}{5}=10$

$\frac{30+81a-a^3}{5a}=10$

$50a=30+81a-a^3$

$a^3-31a-30=0$

$a=-1$ - корень

$a^2-a-30=0$

$a=6$ $a=-5$

$$\begin{array}{r|l} a^3-31a-30 & a+1 \\ -\ a^3+a^2 & a^2-a-30 \\ -a^2-31a & \\ -\ -a^2-a & \\ -30a-30 & \\ -\ -30a-30 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$a=6$ $a=-5$ не удовл. усл. $a\geq0$ $a=-1$ не удовл. усл. $a\geq0$

$\Rightarrow a=6$ $b=9$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=\frac{9}{y^2} \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$ $\frac{9}{y^2}+y^2=6 \mid \cdot y^2\neq0$

$y^4-6y^2+9=0$

$y^2=3$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$

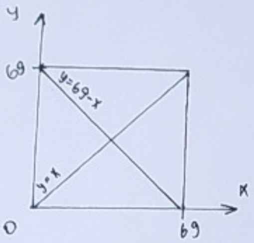
Для $y=\sqrt{3}$ $y=-\sqrt{3}$
$x^2=3$ $x^2=3$
$x=\pm\sqrt{3}$ $x=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

211006060 (U824743 M1275732)

Шестовик

Задача №5

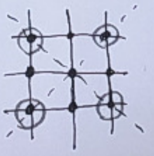


На каждой диагонали будет 68 узлов, причём диагонали квадрата с нечётной стороной не будут пересекаться в одном узле. Значит у нас есть $68 \cdot 2 = 136$ вариантов выбора точки на диагоналях.

Всего ~~точек~~ узлов в данном квадрате $(69-1)(69-1)=4624$

Значит кол-во вариантов, при которых хотя бы 1 узел принадлежит диагоналям можно посчитать по формуле суммы арифметической прогрессии $S = \frac{(2a_1+b(n-1))n}{2} = \frac{(2(68 \cdot 68-1)+(-135)) \cdot 136}{2} =$

$= 619548$ - вариантов. Теперь посчитаем сколько из этих пар не удовлетворяют 2 условию. Через каждый ~~точку~~ узел проходит 2 прямые параллельные осям. На каждой из них лежит по 68 узлов. Следовательно, на каждой можно выбрать 67 пар. Таким образом, общее кол-во пар, не удовлетворяющих 2 условию будет $136(67 \cdot 2 - 1) = 136 \cdot 133 = 18088$ „-1" возникает из-за того, что узлы, которые образуют квадрат и лежат на диагоналях считаются дважды, т.е.



каждый узел имеет пару с таким же узлом на диагонали. У каждого узла их 2, поэтому для избежания повтора надо сделать „-1"

Всего пар, удовлетворяющих условию $619548 - 18088 = 601460$

Ответ: 601460 способов

Чистовик

Задача № 6

Дано

ABCD - выпукл

BOC - р/сп ; AOD - р/сп

$AC \cap BD = O$

$KC = KD$; $KO = KT$

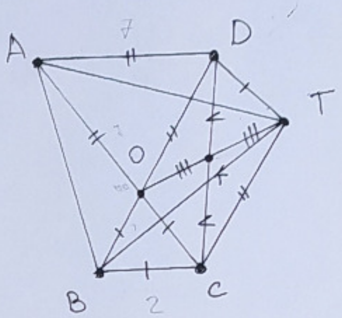
б) $BC = 2$ $AD = 7$

Д-ть:

$\triangle ABT$ - р/сп

б) Найти

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?



Решение

а) 1) ODTC - п/м, т.к. его диагонали OT и DC пересекаются и точкой пересечения делятся пополам

$\Rightarrow DT = OC$ и $TC = OD$

2) $\triangle ADT = \triangle BTC$ ($BC = DT$, $TC = AD$, $\angle BCT = \angle OCB + \angle OCT$, $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT$, $\angle ADO = \angle OCB = 60°$, $\angle OCT = \angle ODT$ (как прот. углы п/ма) $\Rightarrow \angle ADT = \angle BCT$) (по 2-м сторонам и углу)

$\Rightarrow AT = BT$

3) $\angle AOB = \cancel{\angle AOD}\ 180 - \angle AOD = 120°$ (как смеж.)

$\angle DOC = \angle AOB = 120°$ (как верт.) ; $\angle TDO = 180 - \angle DOC = 60°$; $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120°$

4) $\triangle ADT = \triangle AOB$ ($AD = AO$; $DT = OB$; $\angle ADT = \angle AOB$ (подоб.)) (по 2-м сторонам и углу)

$\Rightarrow AT = AB$ $\Rightarrow AT = BT = AB$ $\Rightarrow \triangle ABT$ - р/с ч.т.д.

б) ~~AD=OB=7~~ 1) $AD = OA = 7$; $OB = BC = 2$; $\angle AOB = 120$

$\Rightarrow$ По т. косинусов в $\triangle AOB$ $AB = \sqrt{4 + 49 - 28\cos 120} = \sqrt{67}$

$\Rightarrow S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} AB^2 \sin 60 = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

2) $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{AOD} + S_{OBC} + S_{DCT}$

$S_{AOB} = S_{ODC} = S_{DCT}$, т.к. $\triangle DTC = \triangle ODC = \triangle AOB$

$S_{ABCD} = 3AOB + S_{AOD} + S_{BOC} = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 120 + 7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \sin 60 + 2 \cdot 2 \frac{1}{2} \cdot \sin 60 =$

$= \frac{21\sqrt{3}}{2} + \frac{49\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} = \frac{(42+49+4)\sqrt{3}}{4} = \frac{95\sqrt{3}}{4}$

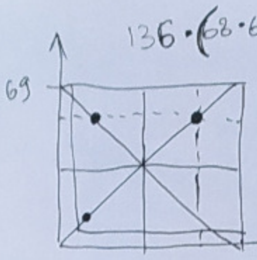
Ответ: $\frac{67}{95}$

Лист №3

$136\cdot(68\cdot 68-1)$ 68 $136\cdot(68\cdot 68-1)-136\cdot 2\cdot 67$

$136(68\cdot 68-1-2\cdot 67)$

$\frac{67}{4}:\frac{95}{4}$



5+5+7+5+6+6

12+15+7

35

$134\cdot\frac{67}{95}$

68
× 68
544
408
4624

9246 − 135   136·2·67

9111·136   136·(67·2) −

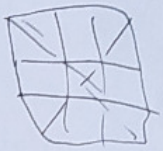
136·133

9111·68

136
×67·2

4490

$\boxed{4489}$



8·15

9111
× 68
72888
54666
619548

134
× 136
804
402
134
18224

16·7+8

68
× 68
544
408
4624

136
× 133
408
408
136
18088

6

(n−1)2

+4 +1+1 +4

15+14+13+12+11+10+9+8+7+6

+5+4+3+2+1

4623
× 136
27738
13869
4623
628728

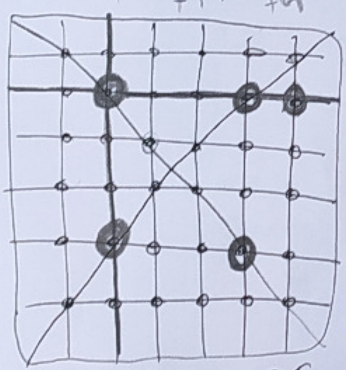
4+49+14

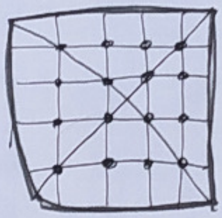
53 67

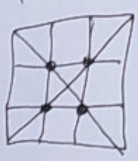
28+14

$\frac{67}{2}\cdot\frac{53}{2}$

$\frac{67\cdot 53}{4}$







2·2·4

16

cos 60

−cos 60

0

$\frac{8\cdot 15}{2}=60$

10 23
13 24
14

0 0 0 0

12 36

35+34 17

(n−1)·

4·(n−1)2+

(n−1)2−1

35+34+33+32+31+30 68

+29+28+27+26+25+24

136(68·2

$\frac{12}{2}$

136

4623=

n=136

15+14

68·68−1

135

136·(68·2−1) 56·6

59·6 (n−1)

136·135

$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$

$S=\frac{a_1(n-1)}{2}$

$\frac{(4623\cdot 2-135)136}{2}$

35+1·2

$a_n=a_1+6(n-1)$

$\frac{70+11\cdot 12}{2}$

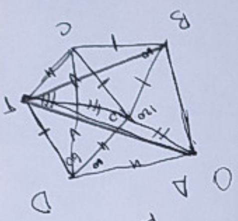
81·6   59·6

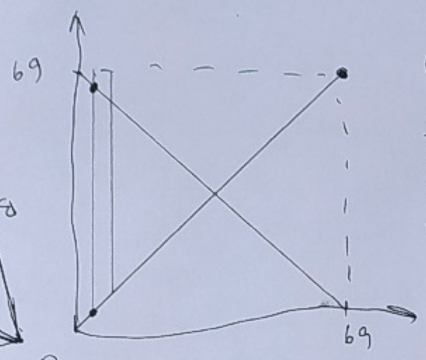
619548
−18088
601460

$(a_1+a_1+6(n-1))n$

$(2a_1+6(n-1))n$

Черновик





$68 \cdot 68 - 68 \cdot 2$

$\cancel{68 \cdot 2 \cdot (68 \cdot 68} - 1) -$

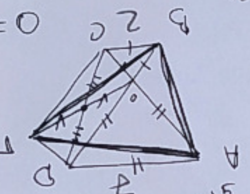
$68 \cdot 2 \cdot (68 \cdot 68 - 1) - 68 \cdot 68 \cdot 2$

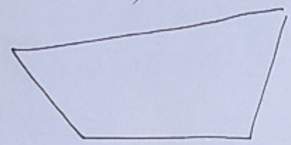
$68 \cdot 2\,(68 \cdot 68 - 1 - 68)$

$136\,(68(67 - 1)$

$136 \cdot 68$

$x^2 + y^2 = 0$





$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$x^2 + 2x^2y^2 + y^4 + 5x^2y^2 = 81$

$(x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81$

$x^2+y^2 = a \quad x^2y^2 = b$

$a \geq 0 \quad b \geq 0$

$$\begin{cases} a^2 + 5b = 81 \\ \dfrac{b}{a} + b = 10 \end{cases} \qquad a = 81 - 5b$$

$b \neq 16{,}2$

$b = \dfrac{81 - a^2}{5}$

$\dfrac{6}{81-5b} + b = 10$

$\dfrac{6 + 81b - 5b^2}{81 - 5b} = 10$

$6 + 81b - 5b^2 = 810 - 50b$

$+5b^2 - 131b + 804 = 0$

$D = 17161 - 16080$

1081

$\dfrac{6}{a} + \dfrac{81 - a^2}{5} = 10$

$\dfrac{30 + 81a - a^3}{5a} = 10$

$-a^3 + 81a + 30 = 50a$

$a^3 - 31a - 30 = 0$

$-1 + 31 - 30$

$a \quad -5 \quad 6 \quad -1$

$b = 9$

$8 = a$

$9 = b$

$a^3 - 31a - 30 \,|\, a + 1$

$a^3 + a^2 \qquad a^2 - a - 30$

$-a^2 - 31a$

$-a^2 - a$

$-30a - 30$

$a^2 - a - 30$

$a = -5 \qquad a = 6$

$\times\ 131$
131
131
393
131
17161

$+\ 804$
20
16080

$\times\ 33$
33
99
99
1089

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ x^2y^2 = 9 \end{cases}$$

$\dfrac{9}{y^2} + y^2 = 6$

$y^4 - 6y^2 + 9$

$t^2 - 6t + 9 = 0$

$t = 3$

$y^2 = 3 \qquad y^2 =$

$y^2 = 3$

$x^2 = 3$

$9 + 9 + 63$