# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

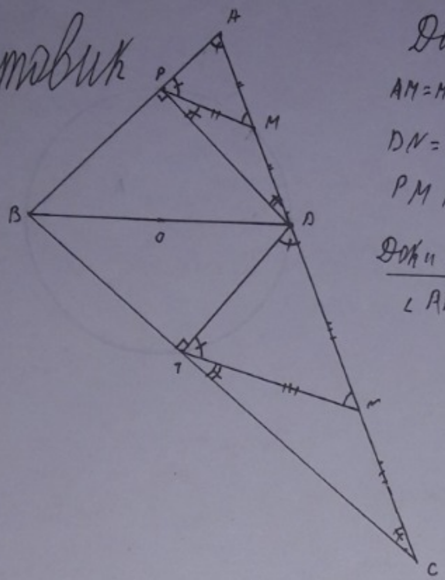
Шифр: **211006021**

ID профиля: **878897**

Вариант 10

# ① Чистовик

а)



Дано:
$AM = MD$
$DN = NC$
$PM \parallel TN$

Док. и найти:
$\angle ABC$ - ?

в $\triangle BPD$ и $\triangle BTD$: $BD$ - диаметр окружности $\omega(O; r\ OD)$; $\angle BPD$ и $\angle BTD$ опираются на диаметр (углы в 4х угольнике вписанном) =>
=> $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$

=> $\angle APD = \angle DTC = 90^\circ$ (смежные)
=> т.к. $\angle APD$ и $\angle DTC = 90^\circ$ => $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ - прямоуг.; т.к. $AM = MD$ и $DN = NC$ => $TN$ и $PM$ - медианы => т.к. эти медианы в прямоуг. $\triangle$ =>
=> по св. медиан: $PM = MA = MD$; $TN = ND = NC$;
$TN \parallel PM$ => при секущ $AC$: $\angle AMP = \angle DNT$ (соотв. углы) => т.к.
$\triangle PMA$ и $\triangle TND$ - р.б. (равнобедр. по признаку) => и обладают общим углом =>
=> их углы при основании ($\alpha = \frac{180^\circ - \angle TND}{2}$) равны => по 2 углам => $\angle TDN = \angle DTN = \angle PAM = \angle APM$
$\angle TNC = \angle PMD$ (как соотв.) => по тому же признаку $\angle NCT = \angle NTC = \angle MPD = \angle MDP$
$\angle APD = \angle APM + \angle MPD \iff \angle ADP + \angle TDN = 90^\circ$ =>
т.к. $\angle ADN = 180^\circ = \angle ADP + \angle PDT + \angle TDN$; $\angle ADP + \angle TDN = 90^\circ$ => $\angle PDT = 90^\circ$ =>
=> т.к. сум. $\angle$ в 4х угольнике $BPDT = 360^\circ$; $\angle BPD = \angle BTD = \angle PDT = 90^\circ$ =>
=> $\angle PBT$ ($\angle ABC$) $= 90^\circ$

**Ответ:** 1а: $\angle ABC = 90^\circ$

Чистовик



1) б) Дано:

$MP = 1;$

$NT = \frac{3}{2}$

$BD = \sqrt{5}$

$S_{\triangle ABC} - ?$

$\angle BTD = \angle BPD = \angle PBT = \angle PDT = 90° \Rightarrow BPDT =$ прямоугольник $\Rightarrow PT = BD = \sqrt{5}$ (диаг.)

$MP = AM = MD = 1 \Rightarrow AD = 2$

$DN = NC = TN = 1{,}5 \Rightarrow DC = 3$ $\Big\}$ $AC = 5$

$\triangle DTC \sim \triangle ABC$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{DT}{AB} = \frac{TC}{BC} = \frac{3}{5}$

$\triangle APD \sim \triangle ABC$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{PD}{BC} = \frac{2}{5}$

Возьмём $AB = 5\beta$; $BC = 5\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow PD = BT$ (прямоуг. $BPDT$) $= 2\alpha$; $TC = 3\alpha$;

$BP = DT = 3\beta$; $AP = 2\beta$

по теор. пиф. в прямоуг. $\triangle DTC$: $\overset{TC^2}{9\alpha^2} + \overset{TD^2}{9\beta^2} = \overset{DC^2}{9} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$

по теор. пиф. в прямоуг. $\triangle PBT$: $\overset{BP^2}{9\beta^2} + \overset{BT^2}{4\alpha^2} = \overset{PT^2}{5} \Rightarrow 5\alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow$ $\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \beta^2 = \frac{1}{5}$ $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow BC = 5\alpha = \frac{10}{\sqrt{5}}$; $AB = 5\beta = \frac{5}{\sqrt{5}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$ (т.к. прямоуг. $\triangle$) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{25}{5} = 5$

Ответ: 5

Чистовик



② $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\sqrt{x+3} = a \Rightarrow a^2 = x+3; \quad a \geq 0$

$\sqrt{7-x} = b \Rightarrow b^2 = 7-x; \quad b \geq 0$

$\begin{cases} a-b+4 = 2ab \\ a^2+b^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b-2ab+4=0 \\ (a-b)^2+2ab-10=0 \end{cases} \Rightarrow (a-b)^2+(a-b)-6=0$

$D = 1+24 = 25$

$(a-b) = \frac{-1\pm5}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=-3 \\ a-b=2 \end{array}\right.$

1) $a-b=2 \Rightarrow 6 = 2ab \Rightarrow ab = 3$

2) $a-b = -3 \Rightarrow 2ab = 1 \Rightarrow ab = \frac{1}{2}$

1) $\begin{cases} a-b=2 \\ ab=3 \end{cases} \Rightarrow a = b+2 \Rightarrow b^2+2b-3=0 \quad D = 4+12 = 16 \quad b = \frac{-2\pm4}{2}$ $\left[\begin{array}{l} \cancel{b=-3} \\ b=1 \end{array}\right. \Rightarrow a=3$

2) $\begin{cases} a-b=-3 \\ ab=\frac{1}{2} \end{cases} \quad a = b-3$

$b^2-3b-\frac{1}{2}=0 \quad D = 9+2 = 11 \quad b = \frac{3\pm\sqrt{11}}{2} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{3+\sqrt{11}}{2} \\ a = \frac{\sqrt{11}-3}{2} \end{cases}$

$\sqrt{x+3} = a \Rightarrow x+3 = a^2 \Rightarrow x = a^2-3 \overset{①}{=} \underline{6}$

$\to ②\ x = \frac{11+9-6\sqrt{11}}{4} - \frac{12}{4} = \underline{\frac{4-3\sqrt{11}}{2}}$



Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=\frac{4-3\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$

Черновик

$x+3+7+x$

$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$

$y = 2x + 5$

$4 = x + 3 + 7 - x$

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\sqrt{7-x} = b$

$\sqrt{x+3} = a$

$ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3$

$y = x^2 - 2ax + \left(a^2 + \frac{3}{a}\right)$

$a^2 = x+3$

$b^2 = 7-x$ $\quad a^2+b^2=10$

$(x+3)(7-x)$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\cancel{(7-x)-(x+3)+2x}$

$+10$

$14 + \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = x+3 + 2\sqrt{21+4x-x^2} + 7 - x$

$14 + \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \left(\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x}\right)^2$

$a - b = x$

$ab = y$

$\begin{cases} a^2+b^2=10 \\ a-b+4=2ab \end{cases}$ $\quad \begin{cases} (a-b)^2+2ab=10 \\ a-b-2ab=-4 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+2y=10 \\ x-y=-4 \end{cases}$

$x^2+2x=2$

$7-x = \frac{9+6\sqrt{11}+11}{4}$

$x^2+2x-2=0$

$D = 4+8 = 12$

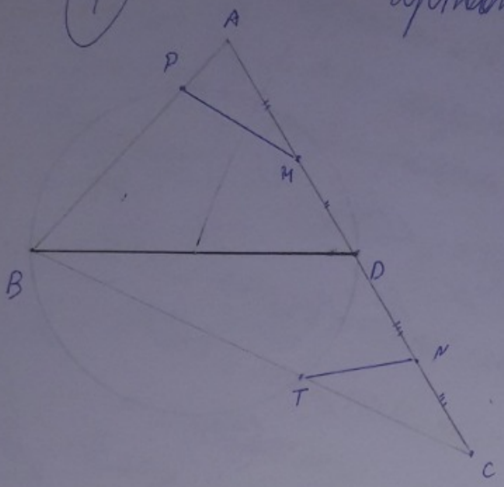
$x = \frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2} = -1\pm\sqrt{3}$

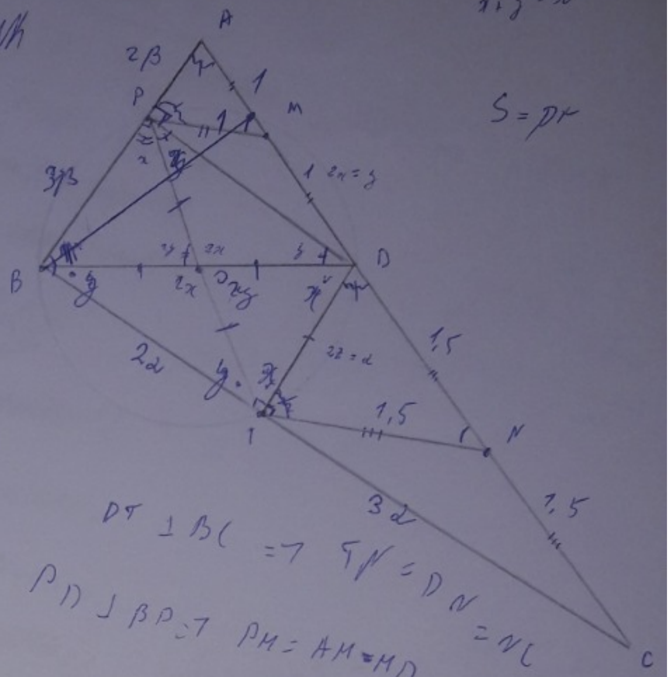


$x = \frac{[illegible]}{4} =$

1

Черновик




$x + y = 50°$

$S = pr$

а) $\angle ABC$ - ?

$DT \perp BC \Rightarrow TN = DN = NC$

$PD \perp BP \Rightarrow PM = AM = MD$

$PM = 1$

$NT = \frac{3}{2}$

$BD = \sqrt{5}$

$\frac{1}{2} AB \cdot BC$

$AD = 2$

$DC = 3$

$AC = 5$

$PT = \sqrt{5}$

$\frac{AP}{AB} = \frac{2}{5}$ $\quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$

$\frac{CT}{BC} = \frac{3}{5}$ $\quad \frac{16}{25} + \frac{9}{25}$

$BT = 2\alpha$

$BP = \beta$

$9\alpha^2 + 9\beta^2 = 9$

$9\alpha^2 + 9\beta^2 = 9$

$\alpha^2 = \frac{4}{5}$

$\beta^2 =$

$5\alpha^2 = 4$

$\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{2} \cdot 25$ $\quad 4\alpha^2 = 5$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006021**

ID профиля: **878897**

Вариант 10

Чистовик

Стр. 1

4.
$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$\begin{cases} x^2 = a \ ; \ a \geq 0 \\ y^2 = b \ ; \ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{a+b} + ab = 10 & | \cdot 5 \\ (a+b)^2 + 5ab = 81 \end{cases} \ominus \Rightarrow (a+b)^2 - \frac{30}{a+b} = 31$$

$\begin{cases} a+b = z \\ z \neq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)^3 - 31(a+b) - 30}{a+b} = 0$$

$: \pm 1$ ; $: \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30$

$\Rightarrow z^3 - 31z - 30 = 0$ ; 1 - ~~подходит~~; $\underline{\underline{-1}}$ - подходит $\Rightarrow z = -1 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 31z - 30 & z+1 \\ \hline z^3 + z^2 & z^2 - z - 30 \\ -z^2 - 31z & \\ -z^2 - z & \\ -30z - 30 & \\ -30z - 30 & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow z^3 - 31z - 30 = 0$

$\Updownarrow$

$(z+1)(z^2 - z - 30) = 0$

$z^2 - z - 30 = 0$ $\quad D = 1 + 120 = 121$

$z = \frac{1 \pm 11}{2} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} z = 6 \\ z = -5 \end{array} \right.$ ; $\Rightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ \left[ \begin{array}{l} z = 6 \\ z = -5 \\ z = -1 \end{array} \right. \end{cases}$

$\left[ \begin{array}{l} a+b = +6 \\ \left.\begin{array}{l} a+b = -5 \\ a+b = -1 \end{array}\right\} \varnothing \end{array} \right.$ т.к. $a+b \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 0$ const $\Rightarrow \underline{a+b = 6} \Rightarrow$

$\Rightarrow ab = 10 - \frac{6}{6} = 9 \Rightarrow \begin{cases} a+b = 6 \\ ab = 9 \end{cases}$ $\quad a = 6 - b \Rightarrow 6b - b^2 = 9$

$b^2 - 6b + 9 = 0$

$(b-3)^2 = 0$

$\underline{b = 3} \Rightarrow \underline{a = 3}$

$\Rightarrow x^2 = y^2 = a = b = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ ; $y = \pm\sqrt{3}$

211006021 (U878897 M1274321)

Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$ ; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ ; $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ ; $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

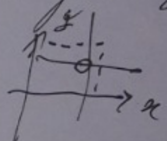
Стр 1

Чистовик

5. прямые $y = x$ и $y = 69 - x$ пересекаются в точке $(34{,}5;\ 34{,}5)$ что не подходит под определение узлов у декартовой прямоугольной системе, т.к. узлы на целых точках.

Всего на диагонали $y = x$ $y \in (0; 69);\ x \in (0; 69)$ можно поставить 68 точек $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. использовать можно обе диагонали $\Rightarrow$ выбор узла на $y = x$ или $y = 69 - x$ равен $68 \cdot 2 = \underline{\underline{136}}$

Всего узлов можно выбрать $68 \cdot 68$; после выбора одного из узлов нельзя брать узел на одной прямой с ним

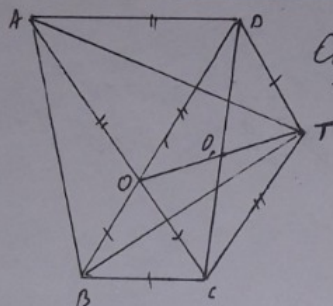


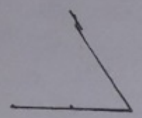

то есть исключается 68 по выбранной оси $x$ и 68 по оси $y$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ число выбора второго шара $= \underline{\underline{68^2 - 2 \cdot 68}} \Rightarrow$

Общее число возможностей выбрать 2 узла в сетке $=$
$136 \cdot (68^2 - 136) = 4488 \cdot 136 = 610368$

Ответ: 610368

⑥. а) Чистовик





а) Дано: △BOC и △AOD - правильные =>

=> AO = OD = AD; OB = BC = OC;

(·) T симметрична (·) O, относительно (·) $O_1$;

$DO_1 = O_1C$; $OO_1 = O_1T$ => (·) T - вершина параллелограмма ODTC, т.к. $\triangle DO_1T = \triangle OO_1C$ и $\triangle OO_1D = \triangle TO_1C$ (по 2 сторонам и вертикальным) => OD ∥ TC и OD = TC;

DT ∥ OC и DT = OC (по св-ву пар-ма)

т.к. △AOD и △BOC - равностор => все углы: ∠AOD = ∠ODA = ∠DAO = ∠OCB = ∠CBO = ∠BOC = 60° => при сек. AC: AD и BC - параллельны (по призн. ∥, когда накр. леж. углы равны). =>

=> ∠AOB = ∠DOC = 120° (смежные); DOCT - пар-м => по св-ву пар-ма: ∠DOC = ∠DTC = 120°; ∠OCT = ∠ODT = 60° =>

=> ∠BCT = ∠BCO + ∠OCT = 120°; ∠ADT = ∠ADB + ∠BDT = 120° =>

1) AD = DC
DT = BC
∠ADT = ∠TCB } △ADT = △TCB (по 2 сторонам и ∠) => AT = BT (по признаку)

2) AD = AO
DT = BO
∠AOB = ∠ADT = 120° } △ADT = △AOB (по 2 сторонам и ∠) => AT = AB (по признаку)

=> AT = BT = AB => △ABT - равностор. =>

=> △ABT - правильный.

ЧТД

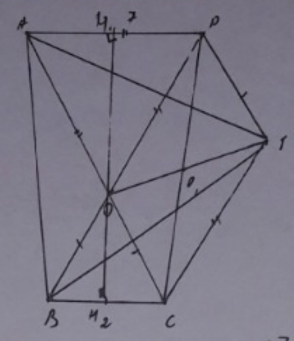
Чистовик

⑥. б) Дано:

$BC = 2$

$AD = 7$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?




$\triangle ABT$ - равностор. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATB = \angle TBA = \angle BAT = 60°$

$BC = BO = 2$; $AO = AD = 7$

$\angle AOB = 120°$ (по доку) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теор. cos в $\triangle AOB$:

$\cos 120 = -\frac{1}{2}$

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos AOB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 = 4 + 49 + 14 = 67 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \sqrt{67}$;

$S_{ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot BT \cdot \sin ABT = \frac{67}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

Рассмотрим ABCD - трапеция т.к. $AD \parallel BC$ (по доку)

из т. O к которым BC и AD можно провести высоты $\Rightarrow$ они будут лежать на одной прямой и это будет единая высота $H_2H_1 \Rightarrow$

$OH_1 = \sqrt{49 - \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 49}{4}} = \frac{7}{2}\sqrt{3}$

$OH_2 = OC \cdot \cos H_2OC$ $30°$ т.к. $OH_2$ - бис. в р.б. тр. $= \sqrt{3}$

$\Bigg\}$ $H_1H_2 = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot H_1H_2 =$

$= \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{67\sqrt{3}}{4}}{\frac{81\sqrt{3}}{4}} = \frac{67}{81}$

Ответ. $\frac{67}{81}$

211006021 (U878897 M1274321)

Черновик

$\frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10$

$\frac{6 + x^4y^2 + x^2y^4 - 10x^2 - 10y^2}{x^2+y^2} =$

$x^4+y^4+7x^2y^2=81$

$x^4+9x^2y^2$

$(x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab$

$(x^2-y^2)^2+9x^2y^2=81$

$(x^2-y^2)^2 = 9(9-x^2y^2)$

$x^2=a$

$y^2=b$

$(x-y)^2(x+y)^2 = 9(3-xy)(3+xy)$

$x^4+1$

$\frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10$

$x^4+y^4-\frac{72}{x^2+y^2} = 11$

$a\geq 0$

$b\geq 0$

$x^4+y^4+7x^2y^2=81$

$(a^2+b^2)-\frac{72}{a+b}-11=0$

$\begin{cases} \frac{6}{a+b}+ab=10 \\ a^2+b^2+7ab=81 \end{cases}$

$\frac{a^3+ab^2+a^2b+b^3-72}{a+b}$

$a+b=z$

$\begin{cases} (a+b)^2+5ab=81 \\ \frac{6}{a+b}+ab=10 \end{cases}$

$(a+b)^2-\frac{30}{a+b}=31$

$z=-1 \Rightarrow z^3-31z$

$z^3-31z-30 \mid z+1$

$z^3+z^2 \quad z^2-z-30$

$-z^2-31z$

$-z^2-z$

$-30z-30$

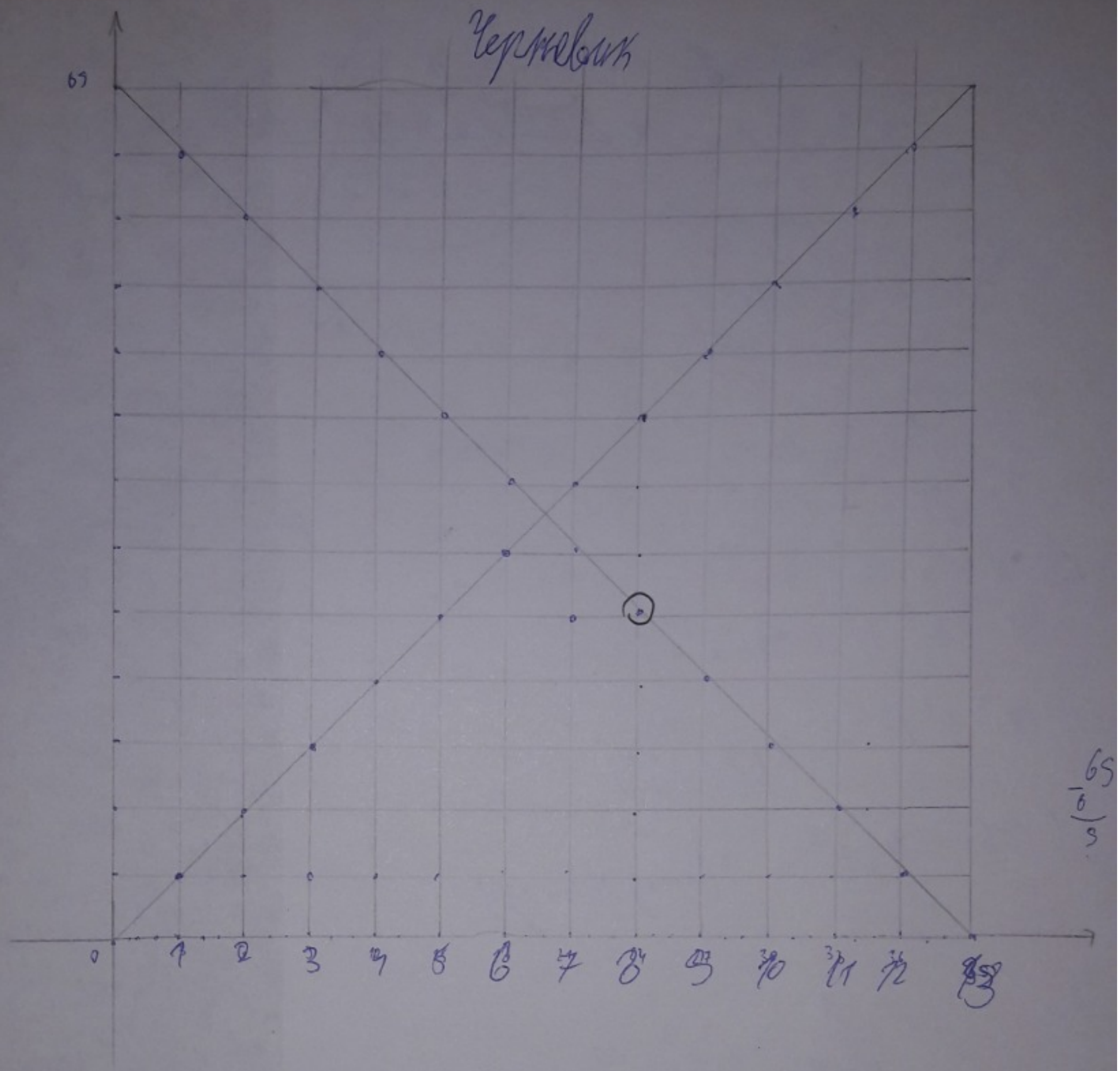
$(a+b)^3-31(a+b)-30=0$

$z^3-31z-30=0 \Rightarrow (z+1)(z^2-z-30)=$

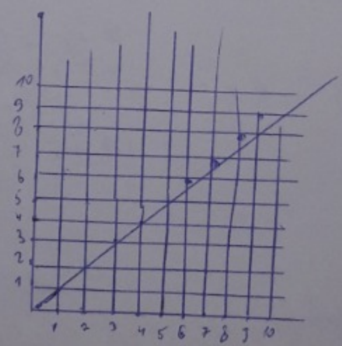
211006021 (U878897 M1274321)

$D=1+120=121$ $\quad z=\frac{1\pm 11}{2}$ $\quad z=6$ $\quad z=-5$

Черновик



65
− 6
5



12

66

136

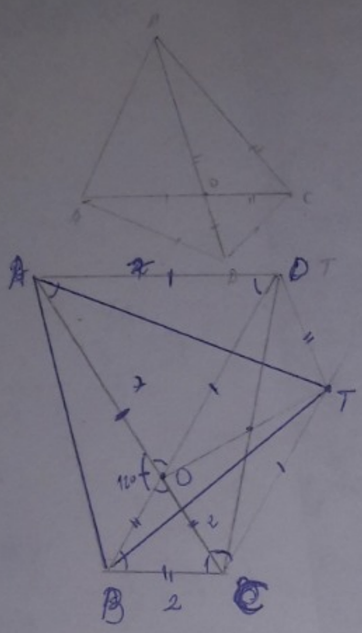
$C_3^1 + C_4^1 =$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times\ 68 \\ \hline 544 \\ 408\phantom{0} \\ \hline 4624 \\ -\ 136 \\ \hline 4488 \end{array}$$

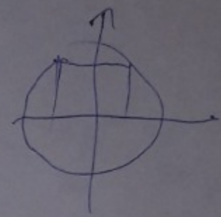
(68 · 68 − (68 − 1 + 68 − 1

211006021 (Ц878897, М1274321)

Черновик



$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$$

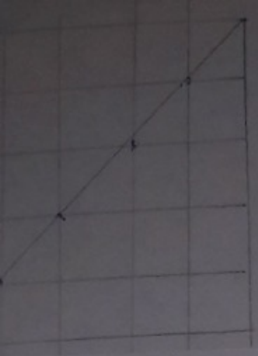


$\cos(120) = -\cos(60) = -\frac{1}{2}$

$AT^2 = AD^2 + DT^2 + AD \cdot DT$

$= 49 + 4 + 14 = 67$

$49 + 18 = 67$



Черновик

$a+b \neq 0$

$$\left[\begin{array}{l} a+b=-1 \Rightarrow 5ab = 80 \Rightarrow ab = 16 \\ a+b = 6 \Rightarrow 5ab = 45 \Rightarrow ab = 9 \\ a+b = -5 \Rightarrow ab = 11{,}2 \end{array}\right.$$

$\varnothing$ н.а., $x^2+y^2 \geqslant 0$ (пз)

$$\begin{cases} a+b=6 \\ ab=9 \end{cases} \Rightarrow \quad a = 6-b$$

$6b - b^2 = 9 \Rightarrow b^2 - 6b + 9 = 0 \mid (b-3)^2 = 0$

$\underline{b=3}$

$\Rightarrow \underline{a=3}$

$x = \pm\sqrt{3}$

$y = \pm\sqrt{3}$

211006021 (U878897 M1274321)