Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006009**

ID профиля: **181863**

Вариант 10

Чистовик лист №1. вариант 10

2.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$ ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+3} \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ 7 \geq x \end{cases}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{21+4x-x^2} - 4 \mid \uparrow 2$

$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} + 7 - x = 4(21+4x-x^2) - 16\sqrt{21+4x-x^2} + 16$

$\sqrt{21+4x-x^2} = t$

$-2t + 10 = 4t^2 - 16t + 16.$

$4t^2 - 14t + 6 = 0$

$2t^2 - 7t + 3 = 0$

$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4}$ $t_1 = 3$ $t_2 = \frac{1}{2}.$

① $\sqrt{21+4x-x^2} = 3. \Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} > 0 \Rightarrow x+3 > 7-x \Rightarrow x > 2.$

$21 + 4x - x^2 = 9$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2}$ $x_1 = 6$ $x_2 = -2$ – П.К.

② $\sqrt{21+4x-x^2} = \frac{1}{2}.$ $\Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} < 0 \Rightarrow x+3 < 7-x.$ $x < 2.$

$21 + 4x - x^2 = \frac{1}{4}. \mid \cdot 4.$

$4x^2 - 16x - 83 = 0.$

$D = 16^2 + 4 \cdot 4 \cdot 83. = 256 + 1328 = 1584$

$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{1584}}{4}$

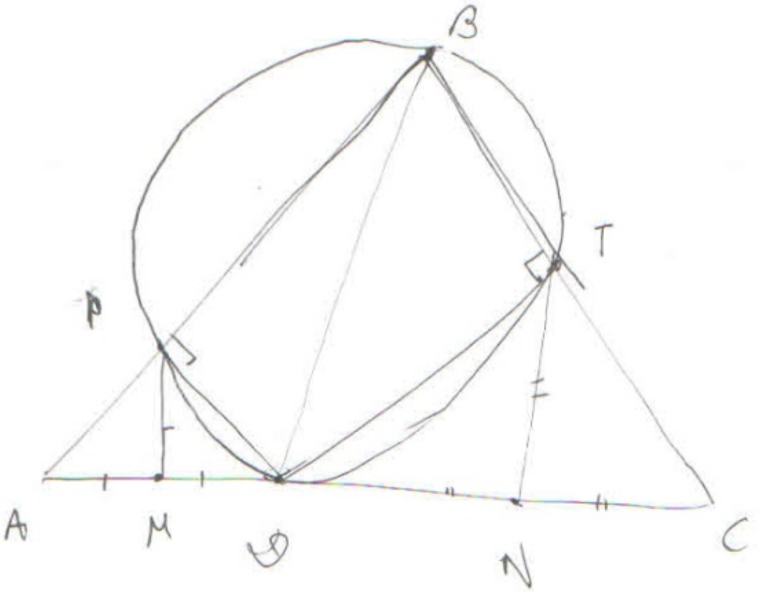
$x_1 = \frac{16+\sqrt{1584}}{4} > 4$ – П. К.

$x_2 = \frac{16-\sqrt{1584}}{4} < 0 < 2.$

Ответ: $x_1 = 6$, $x = \frac{16-\sqrt{1584}}{4}$

211006009 (U181863 M1278464)

(1.) Чистовик. Лист № 2. Вариант 10



Дано:

ABC - тр.

$D \in AC$

ω_1 - окр. построенная как на диаметре BD.

$\omega_1 \cap AB = P$

$\omega_1 \cap BC = T$.

M и N - сер. AD и DC

$PM \parallel TN$, $PM = 1$, $NT = \frac{3}{2}$, $BD = \sqrt{5}$

Найти: $\angle ABC$

S_{ABC}

Решение:

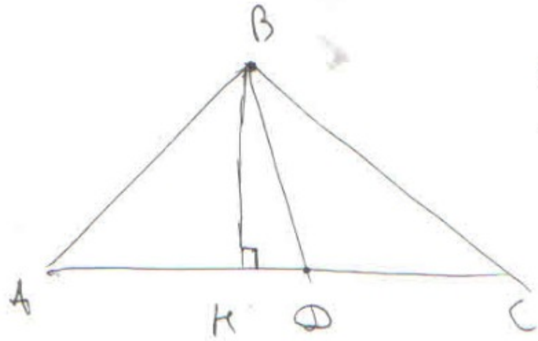
① $\angle DPB = \angle BTD = 90°$, т.к. опираются на диаметр. $\Rightarrow$ $PM = AM = MD$, $TN = DN = NC$, т.к. медианы в пр. угольном. треуг.

$\angle AMP = \angle DNT$, т.к. $PM \parallel NT$ $\Rightarrow$ $\angle PAM = 90 - \frac{\angle AMP}{2}$

$\angle DCT = \frac{\angle DNT}{2} = \frac{\angle AMP}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle BAC + \angle BCA = 90°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\angle ABC = 90°$.

②



$AD = 2PM = 2$

$DC = 2TN = 3$.

BH - высота

пусть. $HD = x$, то $BH = \sqrt{5 - x^2}$

$AH = 2 - x$

$HC = 3 + x$.

$BH^2 = AH \cdot HC$.

$5 - x^2 = (2 - x)(3 + x)$

$5 - \cancel{x^2} = 6 - x - \cancel{x^2}$

$x = 1$.

$BH = 2$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot (AD + DC) = 5$

Ответ: 5.

211006009 (U181863 M1278464)

Чистовик Лист №3 вариант 10

3.) ① $ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$, $a \neq 0$

$ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3 \quad |:a$

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$

$x_m = \frac{+2a}{2} = a$

$y_m = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$

②

$5a^2 + (12x - 4y)a + 8x^2 - 4xy + y^2 = 0$

D = 1) $a = 0$

$8x^2 - 4xy + y^2 = 0$

1) $x = 0$; $y = 0$

2) $8\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0$

$D < 0$ — нет корней.

2) $a \neq 0$

$D = 144x^2 - 96xy + 16y^2 - 160x^2 + 80xy - 20y^2 = -16x^2 - 16xy - 4y^2 =$
$= -4(2x+y)^2 \geq 0 \Rightarrow 2x + y = 0$; $2x = -y$.

$a = \frac{-b}{2} = 2y - 6x$

$a = 5y \qquad y = \frac{a}{5}$

$y_1 = \frac{3}{a} \qquad y_2 = \frac{a}{5}$

$\frac{3}{a} = \qquad y = 2x - 5$

Найдём т. пересечения

$\frac{3}{a} = 2a - 5$

$2a^2 - 5a - 3 = 0$

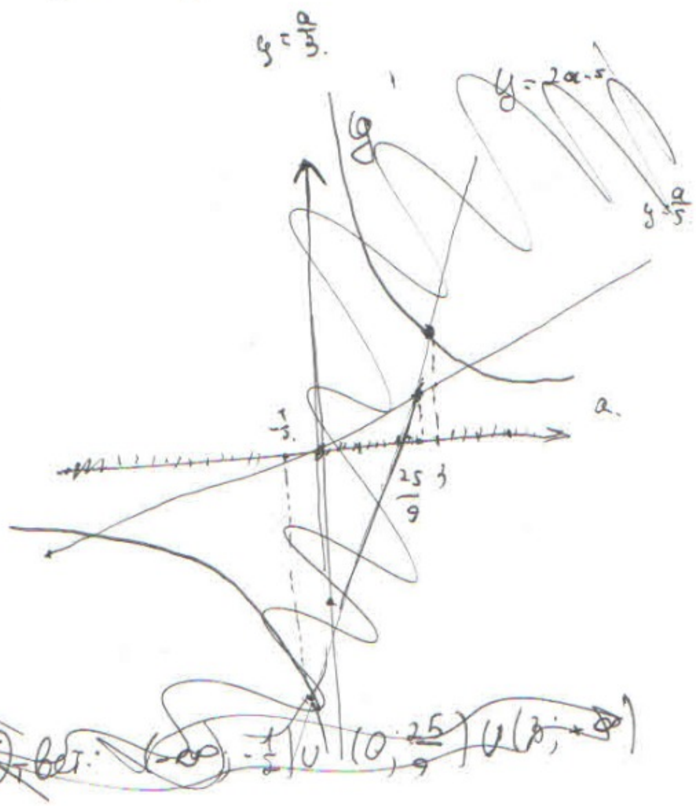
$a = 3 \quad a = -\frac{1}{2}$

$\frac{a}{5} = 2a - 5$

$a = 10a - 25$

$-9a = -25$

$a = \frac{25}{9}$



Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; \frac{25}{9}) \cup (3; +\infty)$

211006009 (U181863 M1278464)

3. Чистовик Лист № 4 вариант 10.

① $x = a$

$y = \frac{3}{a}$ $y = \frac{3}{x}$

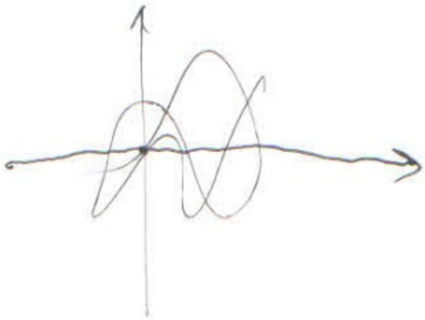
② $y = -2x$

$y = \frac{a}{5}$

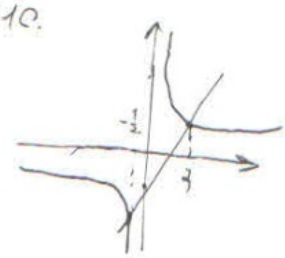
$\frac{a}{5} = -2x$

$x = \frac{a}{-10}$

②



① $\frac{3}{x} = 2x - 5$



$2x^2 - 5x - 3 = 0$

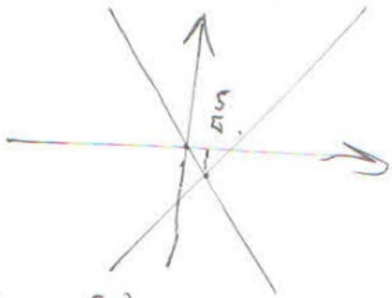
$x = 3$ $x = -\frac{1}{2}$

при $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; 3)$ над прямой

при $a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (3; +\infty)$ под прямой

$-2x = 2x - 5$

$x = \frac{5}{4}$



при $x \in (-\infty; \frac{5}{4})$ - над прямой

при $x \in (\frac{5}{4}; +\infty)$ - под прямой

x:

при $a \in (-\frac{25}{2}; +\infty)$ - над прямой

при $a \in (-\infty; -\frac{25}{2})$ - под прямой

① $\begin{cases} a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (3; +\infty) \\ a \in (-\infty; -\frac{25}{2}) \end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing$

② $\begin{cases} a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; 3) \\ a \in (-\frac{25}{2}; +\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in (-\frac{25}{2}; -\frac{1}{2}) \cup (0; 3)$

Ответ: $a \in (-\frac{25}{2}; -\frac{1}{2}) \cup (0; 3)$.

211006009 (U181863 M1278464)

2. $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$ $\quad 3 \overset{6}{+} 1 + 4 =$

$(x+3)(7-x) = 7x - x^2 + 21 - 3x = 21 + 4x - x^2$ $\quad 83$

$x - y + 4 = 2xy$ $\quad \sqrt{x+3}$ $\quad 2'$ $\quad \frac{6}{6}$ $\quad -2.$

$\sqrt{x+3}$ $\quad 36$

$\begin{array}{r} 83 \\ \times 4 \\ \hline 332 \\ 256 \\ \hline 588 \end{array}$

$2xy - x + y + 4 = 0$ $\quad 2xy - x + y + 4 = 0$

$x(2y-1)$ $\quad x - 3 = 7$ $\quad x^2 - 4x - 12 = 0$

$\sqrt{16+48} =$

$x - y = 2xy + 4.$ $\quad \frac{4 \pm 8}{2} = 6$

$\underline{x+3}$

$256 + 83 \cdot 4$ $\quad 16 \pm 4\sqrt{61}$ $\quad x^2 - 2xy + y^2 = 4x^2y^2 - 16xy + 16$

$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline \end{array}$

$x - y + 4 = 2xy$ $\quad x = 5.$ $\quad 2x = 2.$ $\quad x = 2.$ $\quad 84 + 16x - 4x^2 = 1.$

$2xy - x + y - 4 = 0$ $\quad 4x^2 - 16x - 83 = 0$

$\begin{array}{r} 83 \\ \times 16 \\ \hline 498 \\ 83 \\ \hline 1328 \\ + 256 \\ \hline 1584 \end{array}$

$2(x + \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) = 2(xy - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}) =$

39
$39.$

$2xy - x + y - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$

$(x + \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$

$1584 \mid 4$ $\quad 396$ $\quad \frac{4}{61}$
-12
38
-36
24
-24
0

$x + 3 - 2\sqrt{21 + 4x - x^2} + 7 - x =$

$4t^2 - 14t + 6$ $\quad \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 3 = 0$

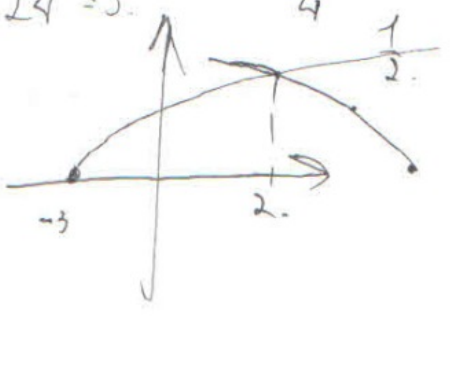
$18 \quad -21 + 3$

61
$+16$
$2\sqrt{183}$

$2t^2 - 7t + 3 = 0$

$D = \sqrt{49 - 24} = 5.$ $\quad \frac{7 \pm 5}{4} = 3$ $\quad \frac{1}{2}.$

$\begin{array}{r} 83 \\ \times 16 \\ \hline 498 \\ 83 \\ \hline 1328 \end{array}$



211006009 (U181863 M1278464)

~~9-2cos~~

$9\cdot 4\cos 2\alpha$

$(9-4\sqrt{5}\cos\alpha)^2+(14+6\sqrt{5}\cos\alpha)^2$

$=81-72\sqrt{5}\cos\alpha+196+$

$9-2\cos\alpha\, 2\sqrt{5} = 14+2\cos\alpha\, 3\sqrt{5}$

~~-4cos~~

$-4\sqrt{5}\cos\alpha-6\sqrt{5}\cos\alpha=5$

$-10\sqrt{5}\cos\alpha=5$

$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{10}=-\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$8x^2-12ax+4$

~~$6x^2-12ax+4=7$~~

$6x^2+12ax+4a^2+2x^2-4xy+2y^2-y^2-4ay+a^2=0$

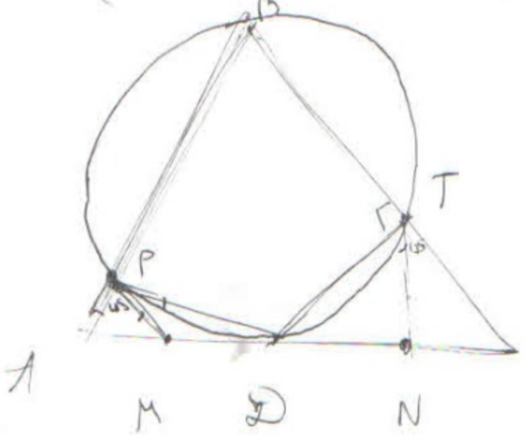
$(3x+2a)^2+2(\sqrt{x}-y)^2-y^2-4ay+a^2=0$

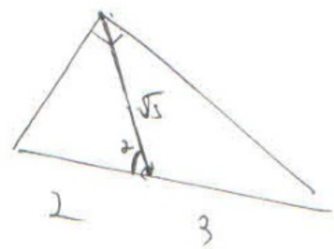
$2^2+5-2\cos\alpha\, 2\sqrt{5}=$

$=3^2+5+2\cos\alpha\, 3\sqrt{5}$

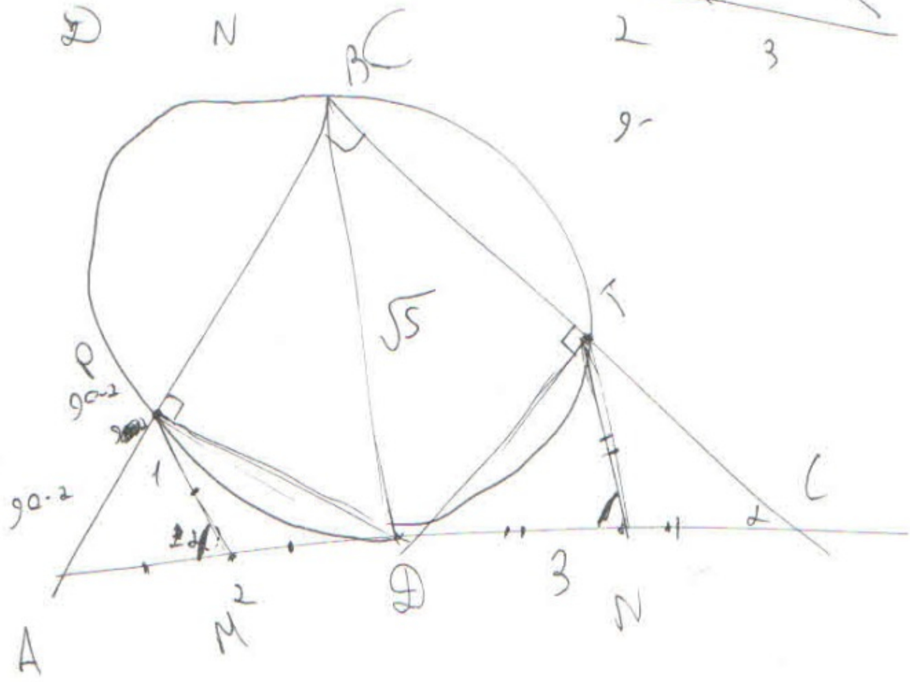
$-4\cos\alpha\, 2\sqrt{5}=$

$=5$





9-



211006009 (U181863 M1278464)

$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0.$

$4x^2 \cancel{- 4xy + y^2}$

a

$a = 0 \quad 8x^2 - 4xy + y^2 = 0 \quad x = 0 \ y = 0$

$\cancel{5 - 4y}$

$8\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\frac{x}{y} + 1 = 0$

$\frac{x}{y} = t \quad 8t^2 - 4t + 1$

$\sqrt{16 - 32}$

$5a^2 + (12x - 4y)\,a + 8x^2 - 4xy + y^2$

$D = \cancel{\sqrt{12^2}}$

$(12x - 4y)^2 = 144x^2 - 96xy + 16y^2.$

$144x^2 - 96xy + 16y^2 - 160x^2 + 80xy - 20y^2 =$

$= -16x^2 - 16xy - 4y^2 \quad -4(2x + y)^2 \leq 0$

$2x = -y.$

$a = \frac{-b}{2}.$

$a = 2y + 6x.$

$6 \quad 2y + 3y \qquad y = \frac{a}{5}.$

$\frac{5}{4} = -\frac{a}{10} \qquad \frac{-50}{4} = a$

$\frac{-25}{2} = a$

211006009 (U181863 M1278464)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006009**

ID профиля: **181863**

Вариант 10

ЛИСТ №1 Чистовик вариант 10

4.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

$m=x^2+y^2\geq 0$

$n=x^2y^2\geq 0$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=m^2-2n.$

$$\begin{cases} \frac{6}{m}+n=10 \\ m^2+5n=81 \end{cases}$$

$n=10-\frac{6}{m}.$

$m^2+50-\frac{30}{m}=81$

$m^3-31m-30=0$

$m=-1$ - корень

$$\begin{array}{r|l} m^3-31m-30 & m+1 \\ \cline{2-2} -\underline{m^3+m^2} & m^2-m-30 \\ -m^2-31m & \\ -\underline{m^2-m} & \\ -30m-30 & \\ -\underline{30m-30} & \\ 0 & \end{array}$$

$(m+1)(m^2-m-30)=0$

$(m+1)(m-6)(m+5)=0$

$m=-1$ - п.к. $n=16$ - п.к.

$m=-5$ - $n=10+\frac{6}{5}$ - п.к.

$m=6$ $n=9.$

$$\begin{cases} x^2+y^2=6. \\ x^2y^2=9 \end{cases}$$

$x^2=t$

$y^2=k.$

$$\begin{cases} t+k=6 \\ tk=9 \end{cases}$$

$k=\frac{9}{t}$ $t+\frac{9}{t}=6$ $t^2-6t+9=0.$

$(t-3)^2=0$

$t=3$

$k=3.$

$x^2=3$

$y^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}$

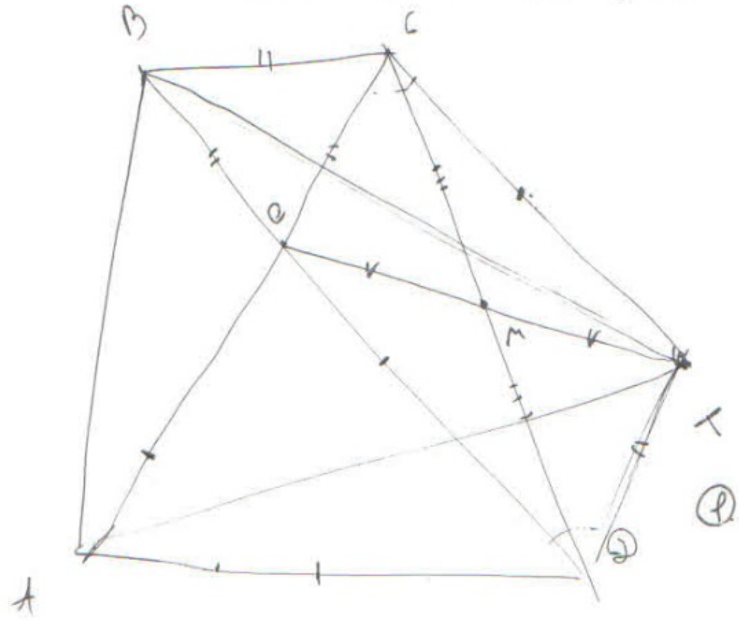
$y=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{3})$

211006009 (U181863 M1278465)

Лист №2 Чистовик вариант

6.



Дано:

BOC и AOD - правильные

O - т. пер. диагоналей

M - сер. CD

T - сим. O относительно M.

BC=2 AD=7

D - тб: ABT - м.

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

(1) ~~∠BCO = ∠OAD = 60°~~

OCTD - парал., т.к. M делит диагонали пополам

$\Rightarrow OC = BC = BO = DT$

Аналогично $AO = AD = OD = CT$. $\angle ADO = \angle ODT$.

$\angle ODT = \angle OCT = 180 - \angle DOC = \angle BOC = 60^\circ \Rightarrow \angle BCT = \angle ADT = \angle BOA = 120^\circ$.

$\angle BCO + \angle OCT$

$BC = BO = TD$

$AO = AD = CT$

$\angle BOA = \angle BCT = \angle ADT$

$\Rightarrow \triangle ADT = \triangle BCT = \triangle BAO \Rightarrow AB = BT = AT$

(2) $AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2\cos 120 \cdot AD \cdot TD = 53 - 2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 14 = 67$

$AT = \sqrt{67}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} AT^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} 67 \sin 60$

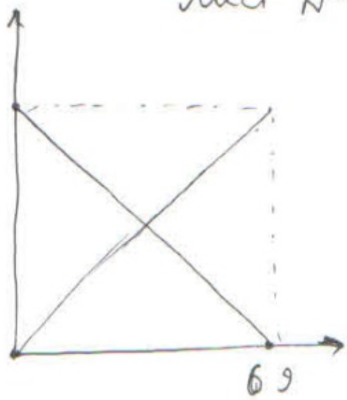
$S_{ABCD} = (AO+OC)(DO+OA)\cdot \sin 60 = (BC+AD)(BC+AD)\sin 60 = 81 \sin 60$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67 \sin 60}{81 \sin 60} = \frac{1}{2}\cdot\frac{67}{81} = \frac{67}{162}$

Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\frac{67}{81} = \boxed{\frac{67}{162}}$

Лист №3 Чистовик вариант 10.

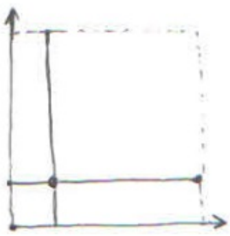
5.



1) поймём сколько всего узлов на прямых $y=69-x$ и $y=x$

$(0;69)$; $(1;68)$, ..., $(69;0)$ всего 70, но 2 лежат на грани, т.е 68.

$(0;0)$; $(1;1)$; $(2;2)$; ...; $(69;69)$. Аналогично 68, т.е всего 136.



2) Значит ~~одну~~ их узел мы берём из 136. Второй же не должен лежать на прямых, как показано на рисунке. Посчитаем сколько узлов на них лежит.

$70+70-1-4=135$

1 — т. пересечения посчитали дважды

4 — на границе

Т.е. для каждой из 136 мы можем взять любой узел кроме 135. Всего узлов 68^2, т.к. ~~от~~ они составляют квадрат со стороной 67.

$136(68^2-135)=610504$.

Ответ: 610504.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$x^2+y^2 = m$

$x^2y^2 = n$

$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = m^2 - 2n$

$$\begin{cases} \frac{6}{m} + n = 10 \\ m^2 + 5n = 81 \end{cases}$$

$n = 10 - \frac{6}{m}$

$m^2 + 10 \frac{6}{m} = 81$

$m^2 + \frac{30}{m} = 31$

$m^3 - \cancel{31m + 30} = 0$

$\cancel{6 \quad 36 \quad m - 31m + 6}$

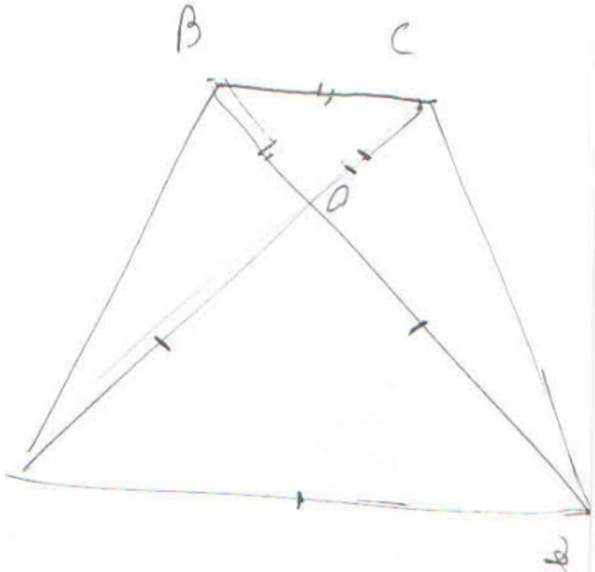
$\cancel{216}$

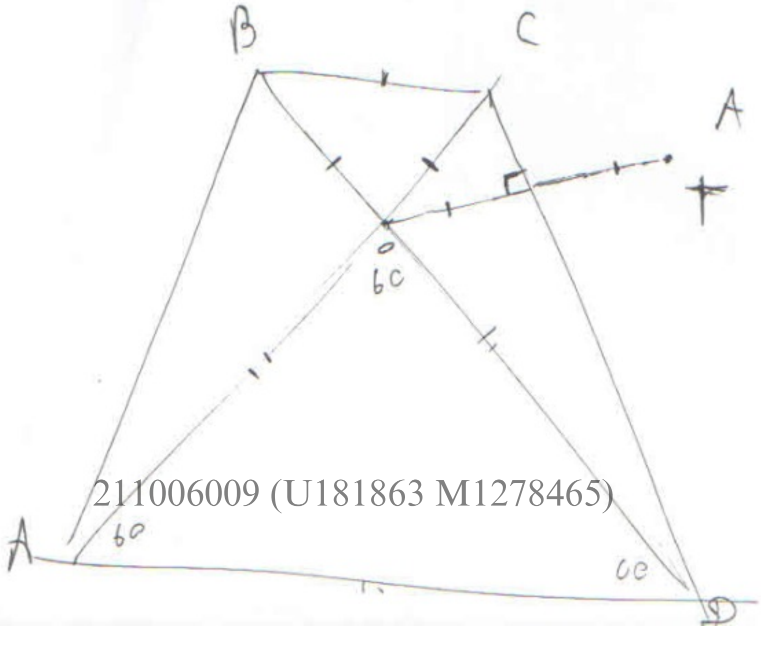
$+ 50 - \frac{30}{m} = 81$

$m^3 - 31m - 30 = 0$

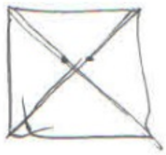
$m = -1$

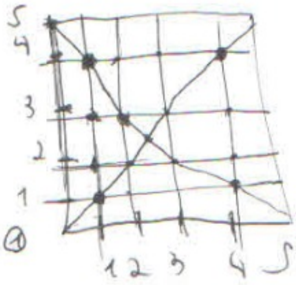
$m^3 - 31m - 30 \mid m+1$





5

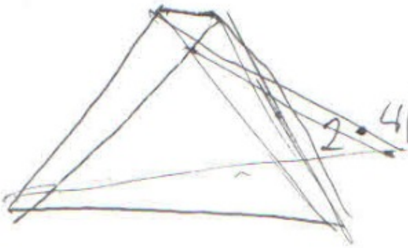




$2(n-1)(n-2)^2 \cdot 2$

$68 \cdot 68$

$2 \cdot 68 \cdot (68^2 - 2 \cdot 68 + 1) =$



$2 \cdot 4(4^2 - 7)^3$

$2 \cdot (n-1)(n^2 - 2n + 1) =$

$= 2(n^3 - 2n^2 + n - n^2 + 2n - 1) =$

$= n^3 - 3n^2 + 3n - 1$

$6 - n^2 +$

70
8
4900
4900
4210000
4 180
68 2,3,8 10,000

× 8
528

68
× 8
544

4136 · 1
6

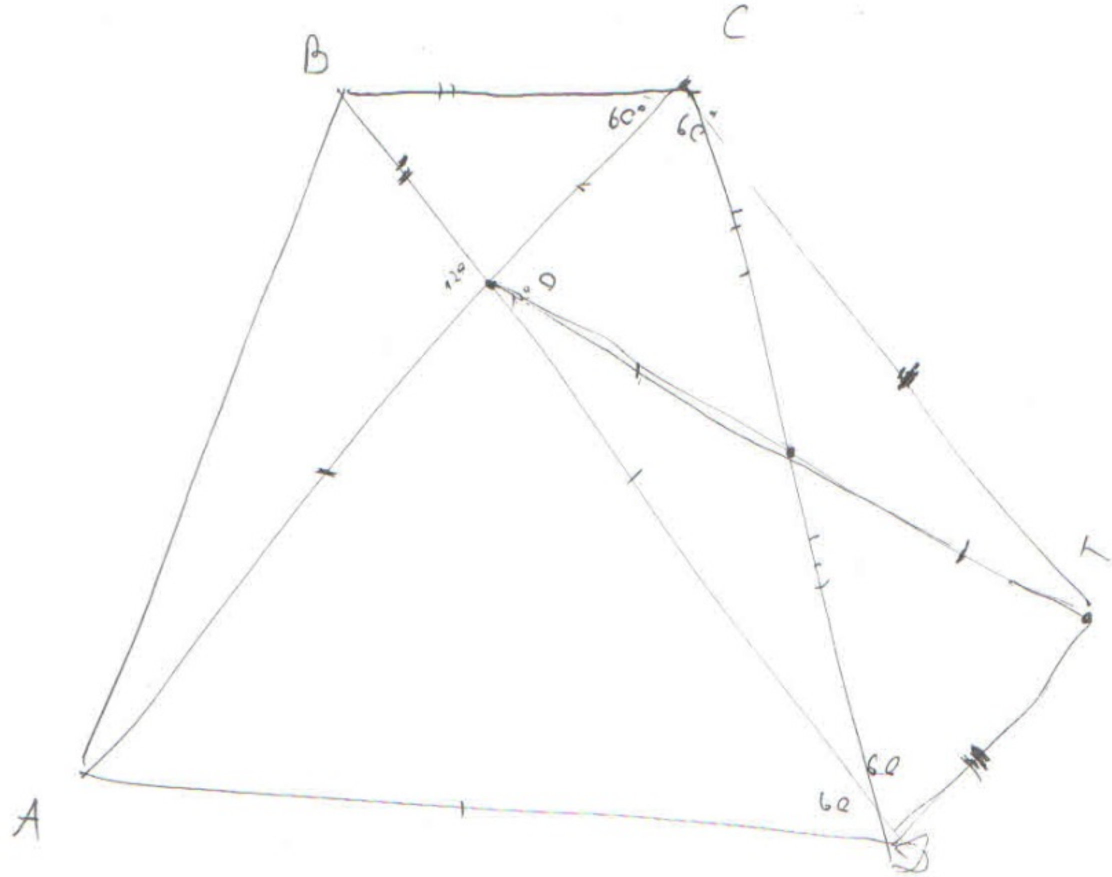
68^2
× 68
544
408
4624
1,3,2 5
4489
× 136
26934
13467
4489
610604

$2(n-1)^3$
68
× 68
544
408
4624
1 3 2 5
4489
× 68
35912
26934
305252
× 2
610504.

4439

211006009 (U181863 M1278465)

1



$S_{ABCD} = BD\,AC \sin 60$.

27 $BC = 2$.

$AD = 7$

$AT = 2^2 + 7^2 - 2\cos 120 \cdot 14 =$

$= \cancel{2^2+7^2}\ 53 + 14 = \cancel{\sqrt{67}}$

$\sqrt{67}$

$BD = AC = 9$

$AT = \sqrt{67} \cdot \sqrt{67} \sin 60$

$\dfrac{67 \sin 60}{81 \sin 60} = \dfrac{67}{81}.$