

# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

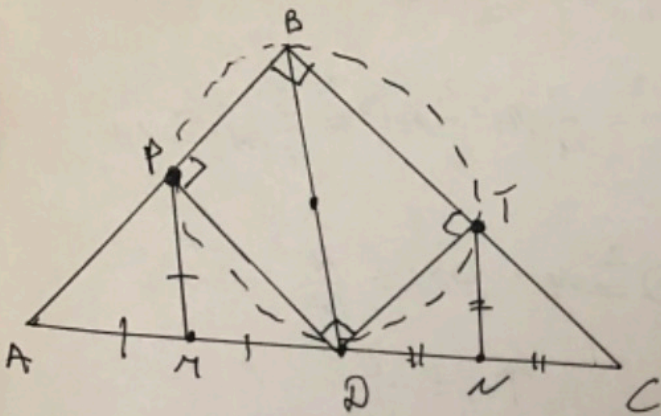
Шифр: **211005935**

ID профиля: **187163**

Вариант 10

Умножить.

N1



Дано:  $\triangle ABC$ :  $D \in AC$

$\omega (D = BD) \cap AB = P$

$\omega \cap BC = T$

$M$  - сеп.  $AD$   $N$  - сеп.  $CD$

$PM \parallel TN$

Найти:  $\angle ABC$

Найти:  $S_{ABC}$ , если  $MP = 1$

$NT = \frac{3}{2}$   $BD = \sqrt{5}$

Решение: а)  $\angle DTB = 90^\circ$  (т.к. опирается на  $AD$  диаметр)  $\Rightarrow$   
 $\angle DTC = 90^\circ$

аналогично  $\angle APD = 90^\circ$

т.к.  $PM$  - медиана, то  $AM = PM = MD$ .

аналогично  $DN = TN = NC$

т.к.  $PM \parallel TN$ , то  $\angle PMD = \angle TNC$

$\angle MDP = \angle MPD = \frac{180 - \angle PMD}{2}$   $\angle NTC = \angle NCT = \frac{180 - \angle TNC}{2}$

т.к.  $\angle PMD = \angle TNC$ , то  $\angle MDP = \angle MPD = \angle NTC = \angle NCT$

аналогично  $\angle MAP = \angle AMP = \angle NDT = \angle DTN$

$\angle APM + \angle MPD = 90^\circ = \angle PAD + \angle TCN \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

б) т.к.  $\angle BPD = \angle PDT = \angle DTB = \angle TBP = 90^\circ$ , то  $TD = BP$ ;  $DP = BT$

по теор. Пифагора:

$$BP^2 + PD^2 = BD^2 = 5 \quad (1)$$

$$TD^2 + TC^2 = CD^2 = 9 \quad (2)$$

$$AP^2 + PD^2 = AD^2 = 4 \quad (3)$$

$$\triangle APD \sim \triangle DTC \Rightarrow TD = \frac{3}{2} AP; TC = \frac{3}{2} PD$$

$$(1) - (3) = BP^2 - AP^2 = TD^2 - AP^2 = \frac{9}{4} AP^2 - AP^2 = \frac{5}{4} AP^2 = 1$$

$$AP = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad TD = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$(2) - (3) = TC^2 - PD^2 = \frac{5}{4} PD^2 = 4 \quad PD = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$TC = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$S_{ABC} = \frac{(AP + BP) \cdot (BT + TC)}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}}}{2} = 5.$$

Ответ:  $\angle ABC = 90^\circ$ ;  $S_{ABC} = 5$

$\sqrt{2}$

$$\sqrt{x+3} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2} + \sqrt{7-x} \quad \sqrt{21+4x-x^2} = \sqrt{(7-x)(x+3)}$$

Заметим, что в правой части функции возрастающие, а в левой убывающие.

Тогда у них может быть лишь один <sup>единственный</sup> корень.

Заметим, что  $x=6$  является корнем

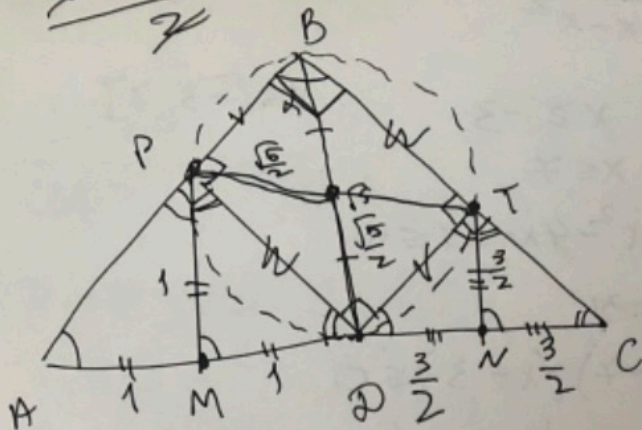
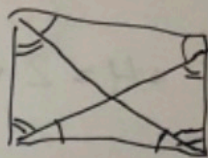
$$\sqrt{6+3} + 4 = 2\sqrt{(7-6)(6+3)} + \sqrt{7-6}$$

$$3 + 4 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$7 = 7.$$

$$\frac{\frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{105}{\sqrt{5}}}{2} = \boxed{5}$$

КЕРНОВУР.



(5)

$$TD^2 - AP^2 = 1$$

$$\frac{9}{4} AP^2 - AP^2 = 1$$

$$\frac{5}{4} AP^2 = 1$$

$$AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{6}{2}} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{1-1} = 1$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$TD^2 + PD^2 = 5$$

$$TD^2 + TC^2 = \frac{36}{4} = 9$$

$$PD^2 + AP^2 = 4$$

$$TD = \frac{3}{2} AP$$

$$TC = \frac{3}{2} PD$$

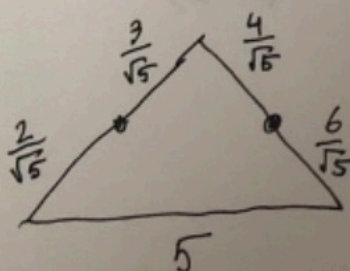
$$(AP + PB)^2 + (BT + TC)^2 = 25$$

$$AP^2 + 2AP \cdot TD + TD^2 + PD^2 + 2PD \cdot TC + TC^2 = 25$$

$$2(AP \cdot TD + PD \cdot TC) = 12$$

$$AP \cdot TD + PD \cdot TC = 6$$

$$TD = \frac{3}{\sqrt{5}}$$



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ x^2 + z^2 &= 9 \\ y^2 + a^2 &= 4 \\ (a + \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2} AP^2 + \frac{3}{2} PD^2 = 6 \cdot \frac{2}{3}$$

$$AP^2 + PD^2 = 4$$

$$TC^2 - PD^2 = 4$$

$$\frac{9}{4} PD^2 - PD^2 = 4$$

$$\frac{5}{4} PD^2 = 4$$

$$PD = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$TD = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

КЕРМОНБАК

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} + \frac{4}{uv} = 2$$

$$\frac{u - v + 4}{uv} = 2$$

$$u - v + 4 - 2uv = 0.$$

WE PRODUK

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$\sqrt{x+3} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)} + \sqrt{7-x}$$

~~$$x+19 + 8\sqrt{x+3} = 28x - 28\sqrt{x+3} + 21 - 4x^2 - 4x\sqrt{x+3} - 13x$$~~

~~$$36\sqrt{x+3} - 4x\sqrt{x+3} = 14x + 72 - 4x^2$$~~

~~$$4\sqrt{x+3} (x-9) = 2(36 + 7x - 2x^2)$$~~

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2(\sqrt{21+4x-x^2} - 2) \quad | \cdot (\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x})$$

$$x+3-7+x = 2 \cdot (\sqrt{(x+3)(7-x)} - 2) (\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x})$$

$$2x-4$$

$$x-2 = (x+3)\sqrt{7-x} + \sqrt{x+3} \cdot (7-x) - 2\sqrt{x+3} - 2\sqrt{7-x}$$

$$(x-2) = (x+1) \cdot \sqrt{7-x} + \sqrt{x+3} \cdot (5-x)$$

~~$$(2-\sqrt{7-x})(2+\sqrt{7-x}) = \sqrt{x+3} - (2\sqrt{7-x}-4)$$~~

$$\sqrt{x+3} (1-2\sqrt{7-x}) - \sqrt{7-x} (1+2\sqrt{x+3}) = -4$$

~~$$2\sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} \quad \sqrt{x+3} + 4$$~~

N2

УПРОБА

$$u - v + 4 = 2uv$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$$

$$\text{OD3: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ 21+4x-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \\ x^2 - 4x - 21 \leq 0 \end{cases}$$

$$x \in [-3; 7]$$

$$x^2 - 4x - 21$$

$$(x-7)(x+3) \leq 0$$



$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{-(x-7)(x+3)}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(x-7)(x+3)} - 4 \quad | \uparrow^2$$

$$x+3 - 7+x - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(x-7)(x+3) - 16\sqrt{(x-7)(x+3)}$$

$$\sqrt{x+3} \quad 7-x$$

$$x+3 = t$$

$$-x-3 = -t \quad 7-x = -t+10$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{10-t} + 4 = 2 \cdot \sqrt{(10-t) \cdot t}$$

$$\sqrt{x+3} + 4 = \sqrt{7-x} \cdot (2\sqrt{x+3} - 1) \quad | \uparrow^2$$

$$x+3 + 8\sqrt{x+3} + 16 = (7-x) \cdot (4\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x+3} + 1)$$

$$x+3 + 8\sqrt{x+3} = (7-x) \cdot (4\sqrt{x+3} + 13)$$

$$x+19 + 8\sqrt{x+3} = 28x - 28\sqrt{x+3} + 91 - 4x^2 + 4x\sqrt{x+3} - 13x$$

# 4 EPMO BUK

$$\sqrt{t} - \sqrt{10-t} + 4 = 2\sqrt{(10-t) \cdot t}$$

$$\sqrt{t} + 4 = \sqrt{10-t} \cdot (2\sqrt{t} - 1)$$

$$t + 8\sqrt{t} + 16 = (10-t) \cdot (4t - 4\sqrt{t} + 1)$$

$$t + 8\sqrt{t} + 16 = 40t - 40\sqrt{t} + 10 - 4t^2 + 4t\sqrt{t} - t$$

$$48\sqrt{t} - 4t\sqrt{t} = 38t + 10 - 4t^2$$

$$2(12\sqrt{t} - t\sqrt{t}) = 19t + 5 - 2t^2 \quad | \uparrow^2$$

$$4t(144 - 24t + t^2) = 361t^2 + 25 + 4t^4 + 190t - 76t^3 - 20t^2$$

$$x+3 - 7+x = 4(21+4x-x^2) + 16 - 16\sqrt{(x+3)(7-x)} - 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$14\sqrt{(x+3)(7-x)} = 84 + 16x - 4x^2 + 16 - 2x + 4$$

$$14\sqrt{(x+3)(7-x)} = -4x^2 + 14x + 104$$

$$7\sqrt{(x+3)(7-x)} = -2x^2 + 7x + 52$$

$$7\sqrt{-x^2+4x+21}$$

$$7-x = \frac{x+3+16+4\sqrt{x+3}}{4x+12+1-}$$

$$u - v + 4 = 2uv$$

$$u + 4 = v(2u-1)$$

$$v = \frac{u+4}{2u-1}$$



# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005935**

ID профиля: **187163**

Вариант 10

№4

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases} \Rightarrow (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81$$

пусть  $x^2+y^2 = u$      $x^2y^2 = v$ , тогда

$$\begin{cases} \frac{6}{u} + v = 10 \quad | \cdot 5 \\ u^2 + 5v = 81 \end{cases}$$

$$u^2 - \frac{30}{u} = 31 \quad | \cdot u (u \neq 0)$$

$$u^3 - 30 - 31u = 0$$

$u = -1$  - корень, но  $x^2+y^2 \geq 0 \Rightarrow u = -1$  - п.к.

$$\begin{array}{r} u^3 + 0 \cdot u^2 - 31u - 30 \quad | u+1 \\ \underline{u^3 + u^2} \phantom{- 31u - 30} \\ -u^2 - 31u - 30 \\ \underline{-u^2 - u} \phantom{- 30} \\ -30u - 30 \\ \underline{-30u - 30} \\ 0 \end{array}$$

$$u^2 - u - 30 = 0$$

$u = 6$      $u = -5$  - п.к.

$$36 + 5v = 81$$

$$v = 9$$

Чл е тобуа.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ x^2 y^2 = 9 \end{cases} \quad x \neq 0 \quad y \neq 0$$

$$x^2 = \frac{9}{y^2}$$

$$\frac{9}{y^2} + y^2 = 6$$

нума  $y^2 = t$

$$\frac{9}{t} + t = 6$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$t = 3$$

$$y^2 = 3$$

$$y = \sqrt{3}$$

$$y = -\sqrt{3}$$

$$x^2 = \frac{9}{y^2}$$

$$x^2 = \frac{9}{y^2}$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Оубеа:  $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (-\sqrt{3}; \sqrt{3}); (\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (\sqrt{3}; \sqrt{3})$

№5

Чистовик.

Всего узлов клетки внутри квадрата  $-(68-1)^2$

Всего узлов на его диагоналях  $- 68 \cdot 2$  (диагонали пересекаются не в узле)

Выберем точку на диагонали. Две же второй мы можем выбрать любую, кроме тех двух, которые с которыми параллельные оси.

Посчитаем кол-во вариантов выбрать так две точки  $- 68 \cdot 2 \cdot (68 - 2)$

здесь ещё и та, что уже выбрали.

Заметим, что мы два раза посчитали те варианты, где обе точки на диагоналях.

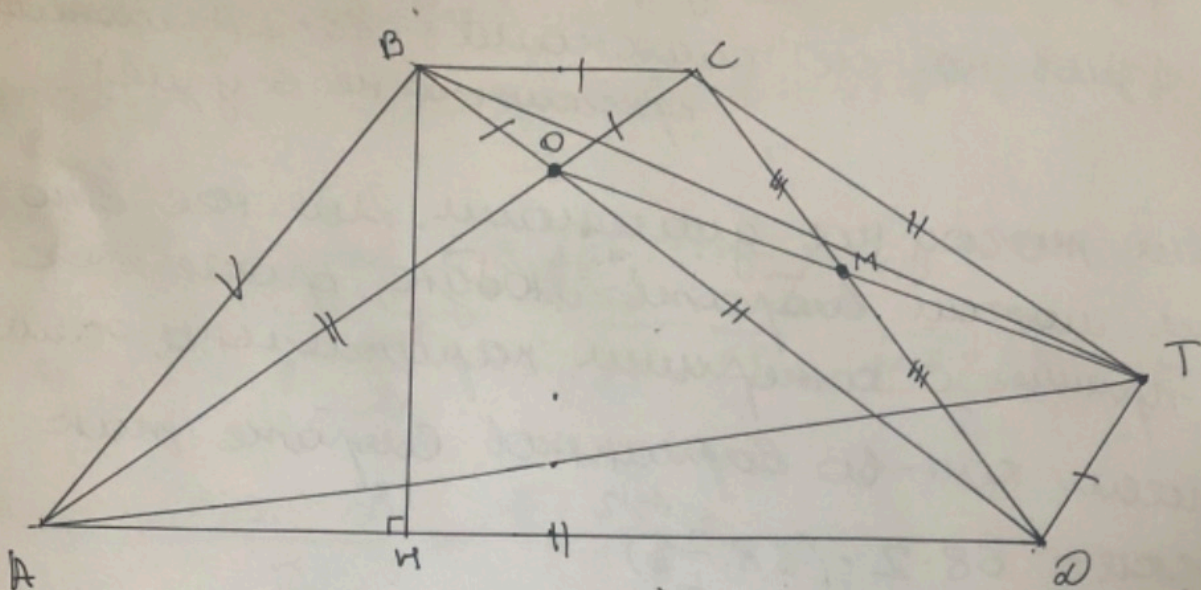
Посчитаем, сколько способов выбрать 2 точки на диагоналях  $- C_{68 \cdot 2}^2 = C_{136}^2$

Заметим, что при этом мы посчитали те две точки, что образуют параллельные, параллельные оси.

Посчитаем, сколько таких пар. В каждой строке узлов одна такая пара и в каждой строке тоже, значит всего их  $68 \cdot 2$

Тогда всего вариантов выбрать будет:

$$68 \cdot 2 (68^2 - 68 \cdot 2) - C_{136}^2 + 136 = 601324$$



Дано:

ABCD:

$AC \perp BD = O$

$\triangle BOC - \text{r/c}$

$\triangle AOD - \text{r/c}$

T симм. отн. M  
(M - середина OD)

D-ть,  $\triangle ABT - \text{r/c}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = ?$ , если

$BC = 2 AD = 7$

Решение: а)

$\angle AOD = \angle OAD = \angle OCD = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$

$\angle COD = \angle BOA = 120^\circ$

$BO = OC$

$AO = OD$

$\Rightarrow AB = CD$

т.к.  $CM = MD$  и  $OM = MT$ , то  $OC \parallel TD$  - параллелограмм.

$OC = TD$   $OD = CT$

$\angle BCO = 60^\circ$

$\angle OCT = 180^\circ - \angle COD = 60^\circ \Rightarrow \angle BCT = 120^\circ$

аналогично  $\angle ADT = 120^\circ$

$\angle BOA = \angle BCT = 120^\circ$

$AO = OD = CT$

$BO = OC = BC$

$\Rightarrow \triangle ABO = \triangle TBC \Rightarrow AB = BT$

аналогично  $AT = AB$

$AT = AB = BT \Rightarrow \triangle ABT - \text{r/c}$

№6 (проб.)

б) теорема косинусов  $\triangle BCT$ :

$$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2 \cdot \cos 120^\circ \cdot BC \cdot CT = 4 + 7 + 14$$

$$BT = \sqrt{67}$$

найдем высоту в  $\triangle ABT$ :  $\therefore$  к. п/с, тогда и равносильно

$$h_{ABT} = \sqrt{BT^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{67 - \frac{67}{4}} = \frac{\sqrt{67} \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABT} = \frac{h_{ABT} \cdot AB}{2} = \frac{67 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

проведем высоту трапеции  $BH$ .

$$AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{5}{2}$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{67 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{243}}{2} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{9 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{81 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67 \cdot \sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot 81 \cdot \sqrt{3}} = \frac{67}{81}$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$$

$$u^3 - 31u - 30 \Big|_{u^2} \frac{u+1}{u^2}$$

чЕРАМО ВИС.

$$\frac{u^3 + 0 \cdot u^2 - 31u - 30}{u^3 + u^2} \Big|_{u^2} \frac{u+1}{u^2 - u - 30}$$

$$\begin{array}{r} -u^2 - 31u \\ -u^2 - 30u \\ \hline -3u - 30 \end{array}$$

$$u^2 - u - 30 = 0$$

$$u_1 = 6$$

$$u_2 = -5 - \pi k$$

$$u = 6$$

$$x^2 + y^2 = 6$$

$$x^2 y^2 = 9$$

$$36 + 5v = 81$$

$$5v = 45$$

$$v = 9$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0$$

$$t = 3$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$y = \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 + y^2 = 6$$

$$x^2 y^2 = 9$$

$$y^2 = \frac{9}{x^2}$$

$$x^2 = 3$$

$$x = 3$$

$$x = -3$$

$$y = 1$$

$$y = -1$$

$$x^2 + \frac{9}{x^2} = 6$$

$$t + \frac{9}{t} = 6$$

$$\text{Омбем: } (-3; -1); (-3; 1); (3; 1); (3; -1)$$

$$t - 6t + 9 = 0$$

$$t = 3$$

N4

уЗРНОВУК.

$$\frac{6}{u} = 10 - v$$

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$$u = \frac{6}{10-v}$$

$$u^3 - 31u - 42 = 0.$$

$$(x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81$$

$$\begin{cases} \frac{6}{u} + v = 10 \quad | \cdot 7 \\ u^2 + 5v = 81 \end{cases}$$

$$\frac{42}{u} + 5v = 70$$

$$u^2 + 5v = 81$$

~~1~~  
~~10~~  
~~81~~

$$u^2 - \frac{42}{u} = 11$$

$$\frac{36}{100 - 20v + v^2} + 7v = 81$$

$$u^3 - 11u - 42 = 0.$$

$$u^3 - 11u - 42 = 0.$$

$$64 - 44 - 42 \quad 42 - 21 \cdot 2$$

$$86. \quad 3 \cdot 7 \cdot 2$$

$$\frac{6}{u} + v = 10 \quad | \cdot 5 \rightarrow 30 - 5v = 42$$

$$\frac{30}{u} + 5v = 50$$

$$u^2 + 5v = 81$$

$$u^2 + 5v = 81$$

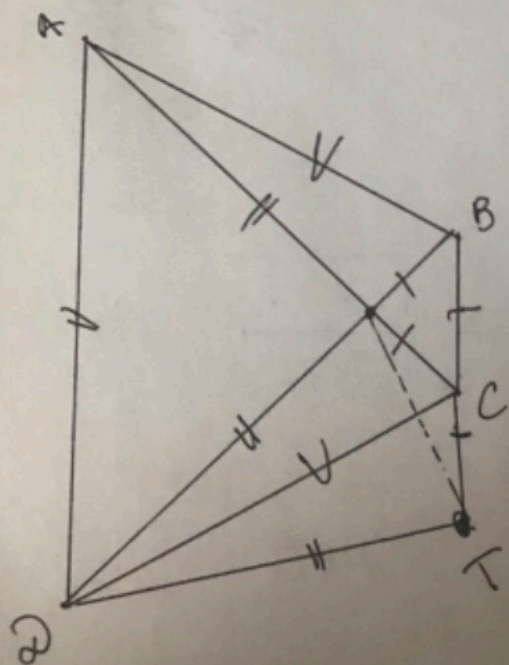
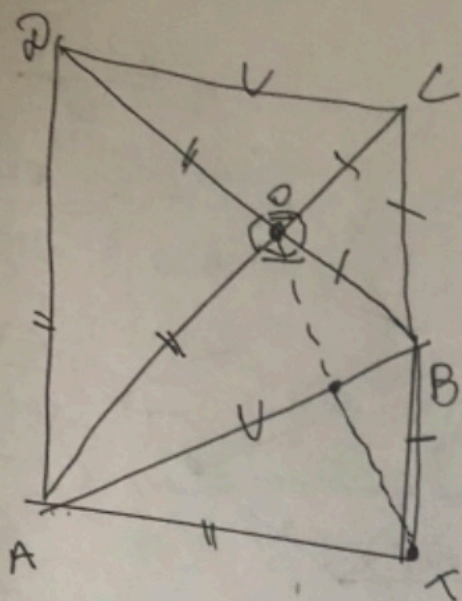
$$u^2 - \frac{30}{u} = 31$$

$$u^3 - 31u - 30 = 0.$$

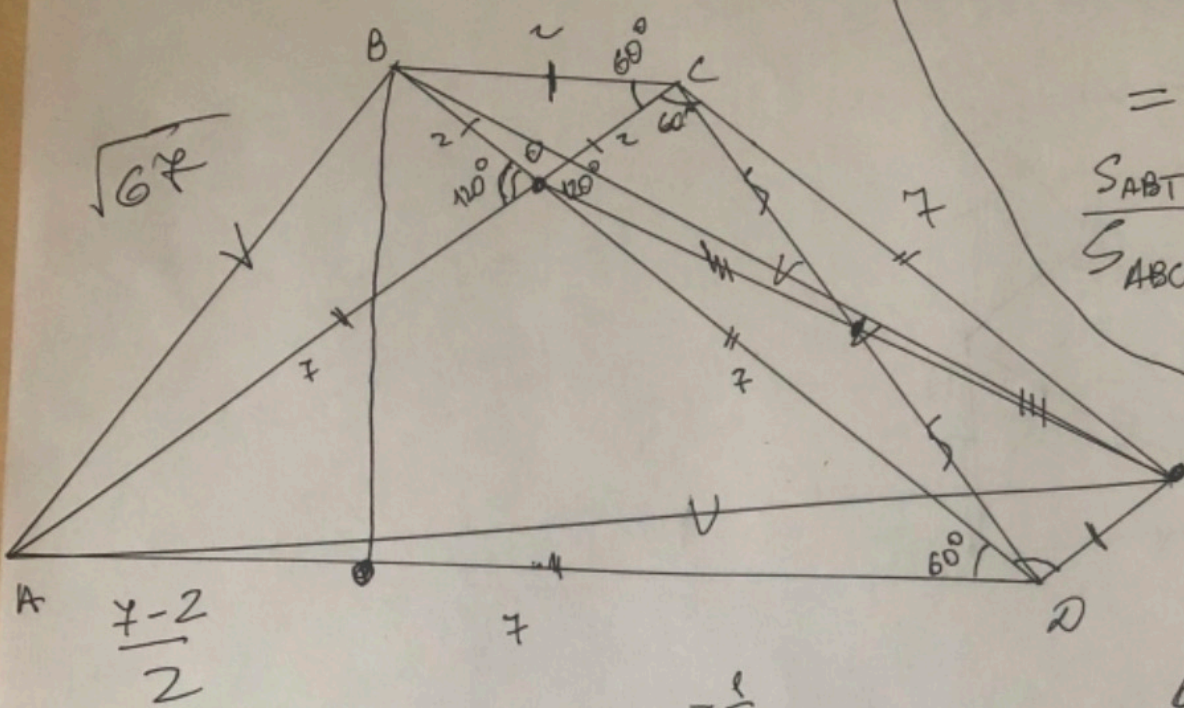
$$u = -1. \text{ не}$$



УПРЯМКУ.



Upprösk.



$$S_{ABCO} = \frac{9 \cdot \sqrt{3} \cdot 9}{2 \cdot 2} = \frac{81 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCO}} = \frac{67 \cdot \sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot 81 \cdot \sqrt{3}} = \frac{67}{81}$$

$$2^2 + 7^2 - 2 \cdot \cos 120^\circ \cdot 2 \cdot 7 = \sqrt{67}$$

$$4 + 49 + 14 = \sqrt{67}$$

$$\frac{67}{4} = 16.75$$

$$243 \overline{) 3}$$

$$81$$

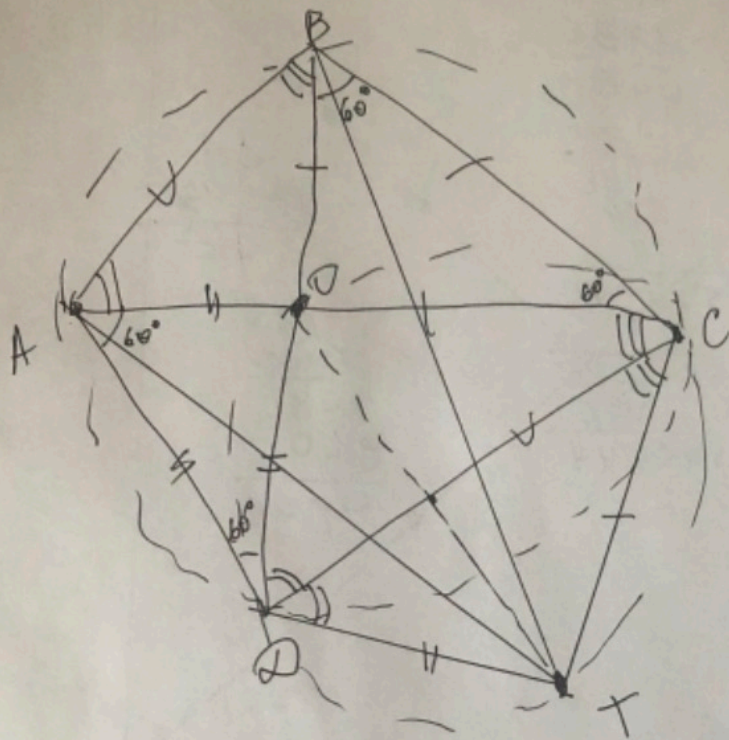
$$\sqrt{67 - \frac{67}{4}} = \frac{\sqrt{67 \cdot 4 - 67}}{2} = \frac{\sqrt{67 \cdot \sqrt{3}}}{2} = h$$

$$\frac{\sqrt{67} \cdot h}{2} = \frac{67 \cdot \sqrt{3}}{4} = S_{ABT}$$

$$\frac{2+7}{2} \cdot h \quad h_{\text{trapez}} = \sqrt{67 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{67 \cdot 4 - 25}}{2} = \frac{\sqrt{3 \cdot 9}}{2}$$

№6

ЧЕРТЕЖИ.



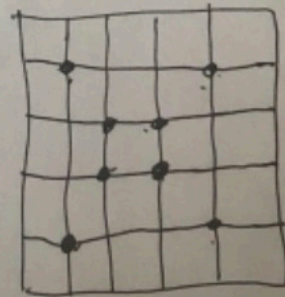
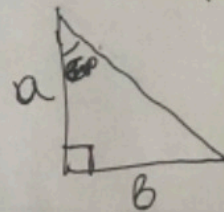
68 + 68.

$a \cdot b$

$b \cdot (a +$

~~$3 + 3$~~

$4 + 4$

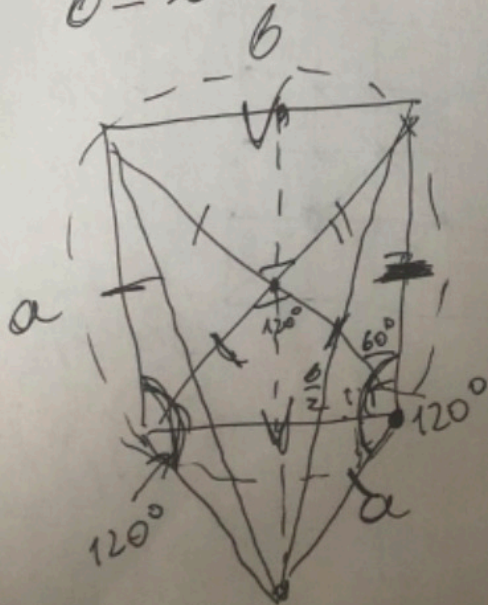


$$\frac{b}{a} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

$$b^2 = 3a^2$$

$$b^2 = \frac{1}{3} a^2$$

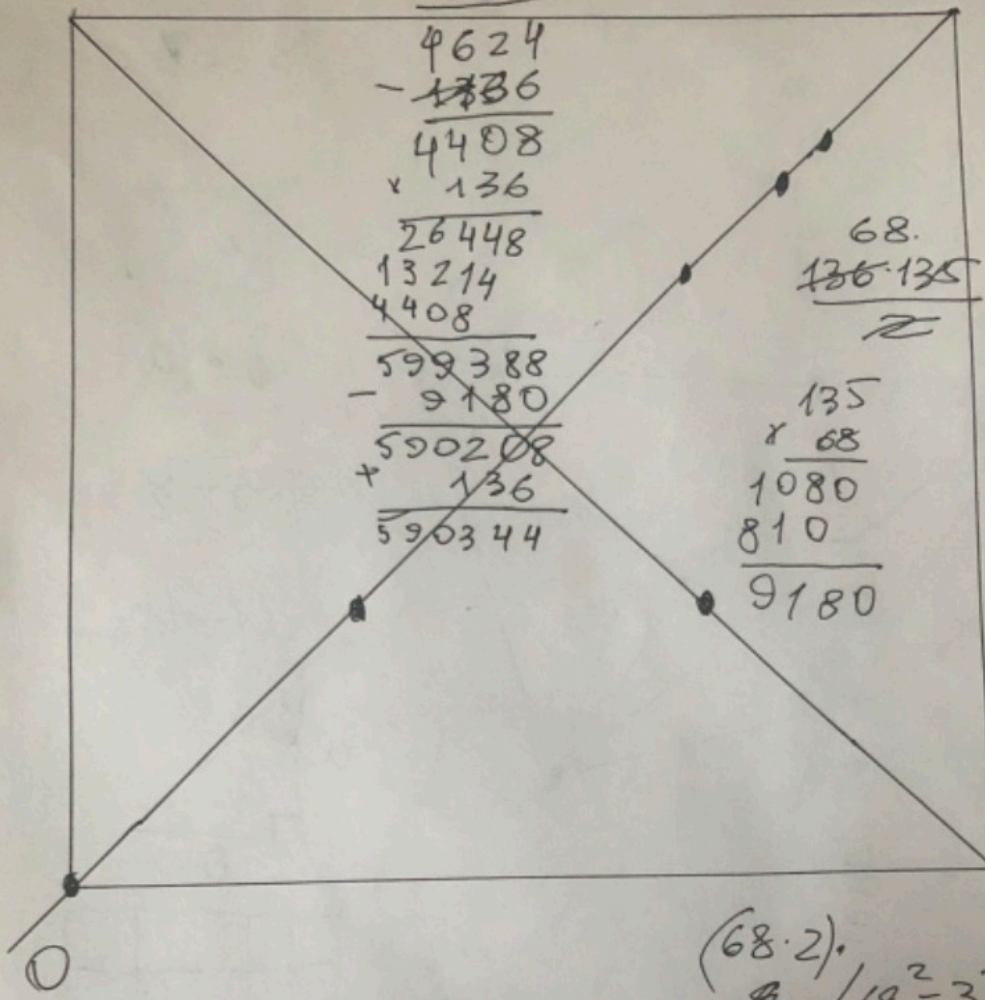


$$4^2 \cdot (4^2 - 3) = C_8^2 +$$

$$\frac{b}{2} \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2}$$

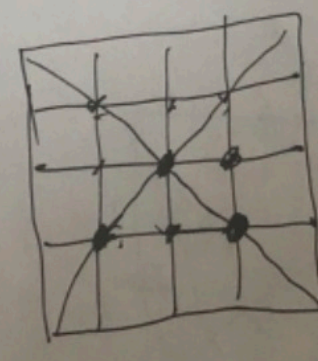
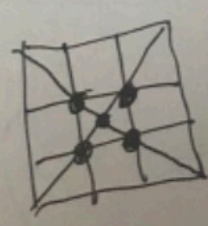
$$a \sqrt{\frac{13}{12}} + \dots \quad h = \sqrt{\frac{a^2}{12} + a^2} \neq a$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 68 \\ \hline 544 \\ 408 \phantom{0} \\ \hline \end{array}$$



$$(68 \cdot 2) \cdot (68^2 - 3) - C_{68 \cdot 2}^2 +$$

$$+ 68 \cdot 4$$



$$68^2$$

$$68^2$$

$$1 - 68^2 - 3$$

$$(68 \cdot 2) \cdot (68^2 - 3) - C_{68 \cdot 2}^2 + 68 \cdot 2$$

$$68 + 68 - 1 + 1 =$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 2 \\ \hline 136 \end{array}$$

ЧЕРНОВИК.

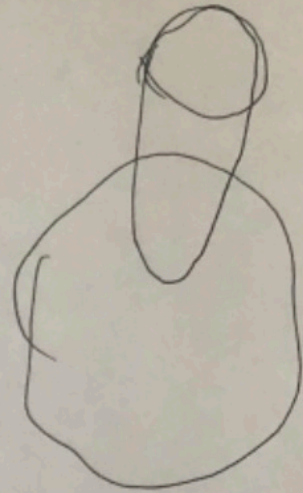
$$\begin{array}{r}
 68 \\
 \times 68 \\
 \hline
 544 \\
 408 \\
 \hline
 4624 \\
 - 136 \\
 \hline
 4488 \\
 \times 136 \\
 \hline
 28
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4488 \\
 \times 136 \\
 \hline
 4624
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4488 \\
 136 \\
 \hline
 26928 \\
 13464 \\
 4488 \\
 \hline
 610368
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 135 \\
 \times 68 \\
 \hline
 1080 \\
 810 \\
 \hline
 9180
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 610368 \\
 - 9180 \\
 \hline
 601188 \\
 + 136 \\
 \hline
 601324
 \end{array}$$



$$A - B + B$$

B

$$\begin{aligned}
 A + 2B - B - B + B &= \\
 &= A + B
 \end{aligned}$$