Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005887**

ID профиля: **838692**

Вариант 10

Чистовик

1

№2. $\sqrt{x+3}-\sqrt{-x+7}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

ОДЗ: $x\in[-3;7]$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2\sqrt{21+4x-x^2}-4 \quad |^2$

$\cancel{x}+3-2\sqrt{(7-x)(x+3)}+7-\cancel{x}=4(\sqrt{21+4x-x^2}-2)^2$

$10-2\sqrt{21+4x-x^2}=4((21+4x-x^2)-2\cdot2\cdot\sqrt{21+4x-x^2}+4) \quad |:2$

$5-\sqrt{21+4x-x^2}=2(21+4x-x^2)-8\sqrt{21+4x-x^2}+8$

Замена: $\sqrt{21+4x-x^2}=t,\ t\geq0$:

$5-t=2t^2-8t+8 \Rightarrow 2t^2-8t+t+8-5=0 \Rightarrow 2t^2-7t+3=0$

По теореме, обратной теореме Виета:

$\begin{cases}2t_1+2t_2=7;\\ 2t_1\cdot2t_2=6.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2t_1=6\\ 2t_2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t_1=3\\ t_2=\frac{1}{2}\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{21+4x-x^2}=3\\ \sqrt{21+4x-x^2}=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}21+4x-x^2=9\\ 21+4x-x^2=\frac{1}{4}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}1)\\2)\end{array}\left[\begin{array}{l}x^2-4x-12=0\\ 4x^2-16x-83=0\end{array}\right.$

1) По теореме, обратной теореме Виета:

$\begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_1x_2=-12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=6\\ x_2=-2\end{cases}$

2) $4x^2-16x-83=0$

$D_2=64+4\cdot83=64+332=396=6^2\cdot11$

$x_1=\frac{8-\sqrt{6^2\cdot11}}{4}=\frac{8-6\sqrt{11}}{4}=2-\frac{3}{2}\sqrt{11}$

$x_2=\frac{8+\sqrt{6^2\cdot11}}{4}=2+\frac{3}{2}\sqrt{11}$

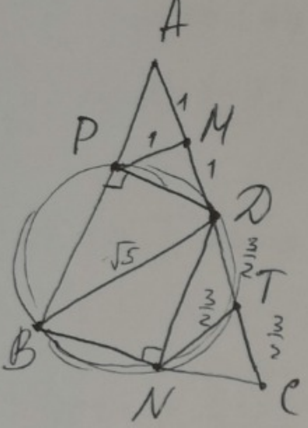
$\begin{array}{l}x=6\\x=-2\end{array}\in$ ОДЗ

Ответ: $-2;6$

211005887 (U838692 M1275755)

Чистовик

№1.



Дано: $MP = 1$, $NT = \frac{3}{2}$, $BD = \sqrt{5}$

Найти: $\angle ABC$, $S_{\triangle ABC}$ - ?

Решение

$\angle BPD = \angle BND = 90°$ (опираются на диаметр BD) $\Rightarrow$ и смежные с ними $\angle APD = \angle DNC = 90°$

Так как $MP \parallel NT$, то $\angle AMP = \angle DTN$ как соответственные углы при секущей AC. $\triangle APD$ и $\triangle DNC$ прямоуг. $(\Rightarrow)$ в них PM и NT - медианы, провед. к гипотенузе $\Rightarrow PM = \frac{1}{2}AD = AM$, а $NT = \frac{1}{2}DC = DT \Rightarrow \triangle AMP$ и $\triangle DTN$ равноб. $\Rightarrow \angle PAM = \angle NDT \Rightarrow$
$\Rightarrow AP \parallel DN \Rightarrow$ при секущей PD $\angle BPD + \angle PDN = 180° \Rightarrow \angle PDN = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = 90° \Rightarrow BPDN$ - прямоугольник.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$; $\triangle APD \sim \triangle DNC$ по 2-ум углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AP}{DN} = \frac{PD}{NC} = \frac{AD}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AP = \frac{2}{3}DN = \frac{2}{3}BP$, а $NC = \frac{3}{2}PD = \frac{3}{2}BN$

С $\triangle BPD$ по т. Пифагора $BP^2 + PD^2 = 5$, а т.к. $PD = BN$ то $BP^2 + BN^2 = 5$. С $\triangle ABC$ по т. Пифагора $AB^2 + BC^2 = 25$

$(AP+BP)^2 + (BN+NC)^2 = 25$

$AP^2 + 2AP \cdot BP + BP^2 + NB^2 + 2BN \cdot NC + NC^2 = 25$

$\frac{4}{9}BP^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}BP^2 + BP^2 + BN^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}BN^2 + \frac{9}{4}BN^2 = 25$

$\frac{4}{9}BP^2 + \frac{4}{3}BP^2 + BP^2 + BN^2 + 3BN^2 + \frac{9}{4}BN^2 = 25$

$\frac{25}{9}BP^2 + \frac{25}{4}BN^2 = 25 \quad |:25$

$\begin{cases} \frac{BP^2}{9} + \frac{BN^2}{4} = 1; \\ BP^2 + BN^2 = 5. \end{cases}$ $\begin{cases} BP^2 = 5 - BN^2 \\ 4(5 - BN^2) + 9BN^2 = 36 \end{cases}$

$20 - 4BN^2 + 9BN^2 = 36$

$5BN^2 = 16$

$BN^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow BN = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$BP^2 = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow BP = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\left[\begin{array}{l} PD^2 = 4 - AP^2 \\ PD^2 = 5 - BP^2 \end{array} \right. \Rightarrow AP^2 = BP^2 - 1$ $\quad \left[\begin{array}{l} DN^2 = 9 - NC^2 \\ DN^2 = 5 - NB^2 \end{array} \right. \Rightarrow NC^2 = BN^2 + 4$

$AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $NC = \frac{6}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$, $BC = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$

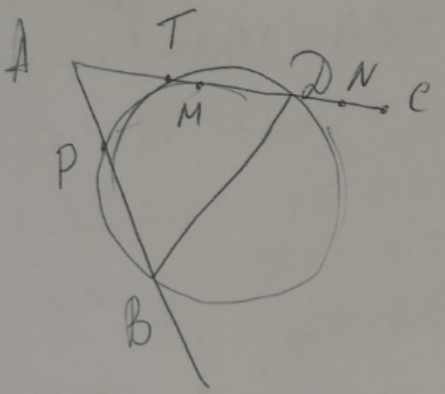
211005887 (U838692,M1275755)

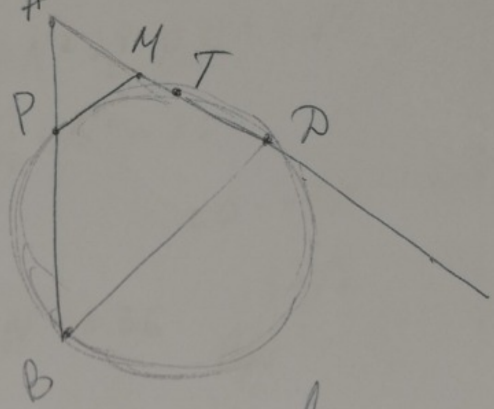
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{\cancel{5} \cdot 10}{2 \cdot \cancel{5}} = 5\ (см^2)$

Ответ: $\angle ABC = 90°$, $S_{\triangle ABC} = 5$ см²

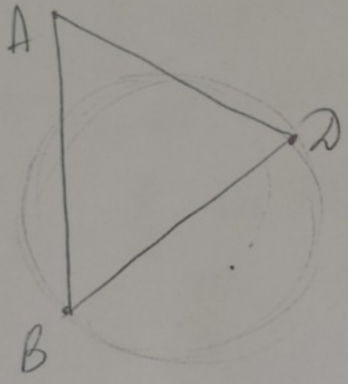
2

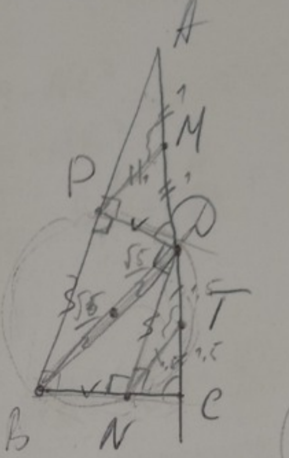
Черновик





$\frac{2}{3}$





$BP = DN$

$BN = PD$

$\frac{PD}{NC} = \frac{2}{3}$ $1{,}5 \cdot 2 = 3$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$

$$\begin{cases} PD^2 = 2^2 - AP^2 \\ PD^2 = 5 - BP^2 \end{cases}$$

$4 - AP^2 = 5 - BP^2$

$BP^2 - 5 + 4 - AP^2 = 0$

$BP^2 - AP^2$ $AP^2 = BP^2 - 1$

$(BP - AP)(BP + AP) = 1$

$(BP - AP) \cdot AB = 1$

$DN^2 = 9 - NC^2$

$\frac{AP}{DN} = \frac{2}{3}$

$DN^2 = 5 - BN^2$

BN^2 $5 + 9 - NC^2 = 0$

$9 - NC^2 = 5 - BN^2$

$(BN - NC)BC =$

$(NC - BN)BC = 4$

$BN^2 = 5 - BP^2$ $4 - AP^2$

$PB^2 = 5 - BA^2$ $9 - NC^2$

-4

$AP^2 = \frac{9}{5} - 1 =$

$= \frac{9-5}{5} = \frac{4}{5}$

$\frac{16}{5} + \frac{20}{5}$

$\frac{25-16}{5} =$

$= \frac{9}{5}$ $\frac{3}{\sqrt{5}}$

$$\begin{cases} 4 - AP^2 = 5 - (9 - NC^2) \\ 9 - NC^2 = 5 - (4 - AP^2) \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 4 - AP^2 = 5 - 9 + NC^2 \\ 9 - NC^2 = 5 - 4 + AP^2 \end{cases}$$

-4 1

$4 - AP^2 - 9 + NC^2 = -4 + NC^2 - 1 - AP^2$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \frac{1}{BP - AP} BP^2 \cdot \frac{4}{NC - BN}$

$\frac{PD}{NC} = \frac{BN}{NC} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\frac{36}{5}$

$\frac{AP}{DN} = \frac{AP}{BP} = \frac{2}{3} \Rightarrow AP = \frac{2BP}{3}$

$\Rightarrow NC = \frac{3BN}{2}$

$1 = (BP - \frac{2}{3}BP) \cdot AB$ $AB^2 + BC^2 = 25$ Черновик

$4 = (\frac{3BN}{2} - BN) \cdot BC$

$BP^2 + BN^2 = 5$

$1 = \frac{BP}{3} \cdot AB$ $AB = \frac{3}{BP}$ $(AP + BP)^2 + (BN + NC)^2 = 25$

$4 = \frac{1}{2} BN \cdot BC$ $BC = \frac{8}{BN}$ $AP^2 + 2BP \cdot AP + BP^2 + BN^2 + 2BN \cdot NC +$

$+ NC^2 = 25$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{BP} \cdot \frac{8}{BN}$

$$\begin{cases} \frac{4BP^2}{9} + 2BP \cdot \frac{2}{3}BP + BN^2 + 2BN \cdot \frac{3BN}{2} + \frac{9}{4}BN^2 = 25 \\ BP^2 + BN^2 = 5 \end{cases}$$

$+\frac{13}{12}$
25

$1^{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{3}^{13} = \frac{9 + 4 + 12}{9} = \frac{25}{9} BP^2$

$1^{4} + 3^{4} + \frac{9}{4} = \frac{4 + 12 + 9}{4} = \frac{16 + 9}{4} = \frac{25}{4} BN^2$

$4BP^2 + 9BN^2 = 36$

$BP^2 = 5 - BN^2$

$4 \cdot 5 - 4 \cdot BN^2 + 9BN^2 = 36$

$5BN^2 = 36 - 20 = 16$

$BN^2 = \frac{16}{5}$

$\sqrt{2 - \frac{3}{2}\sqrt{11}} + 3$

$\sqrt{5 - \frac{3}{2}\sqrt{11}} - \sqrt{7 + \frac{3}{2}\sqrt{11} - 2)}$

$\sqrt{5 - \frac{3}{2}\sqrt{11}} - \sqrt{5 + \frac{3}{2}\sqrt{11}} + 4 \cdot 2 \sqrt{25 - \frac{9}{4} \cdot 11}$

$25 - \frac{99}{4}$

$\frac{100 - 99}{4} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} - 4$

211005887 (U838692 M1275755)

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} \cancel{+4} = 2\sqrt{21+4x-x^2} - 4$ Черновик

$396 : 9 = 44$

36, 36

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ -x^2+4x+21 \geq 0 \end{cases}$ $\quad x \geq -3$, $\quad x \leq 7$, $\quad x^2-4x-21 \leq 0$ $\quad x \in [-3;7]$

$9 \cdot 11 - 4$

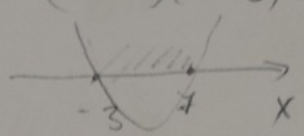
$4 \quad -21$

$7 \quad -3$

$(x-7)(x+3) \leq 0$ $\quad (7-x)(x+3) =$

$= 7x + 21 - x^2 - 3x$

$-x^2+4x+21$



$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(7-x)(x+3)} \quad | \cdot (\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x})$

$(\cancel{x}+3) - (7-x) + 4(\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x}) = 2(x+3)\sqrt{7-x} + 2(7-x)\sqrt{x+3}$

$x+3-7+x+4\sqrt{x+3} + 4\sqrt{7-x} - 2(x+3)\sqrt{7-x} - 2(7-x)\sqrt{x+3} = 0$

$2x - 4 + 2\sqrt{x+3}(2-(7-x)) + 2\sqrt{7-x}(2-(x+3)) = 0 \quad | : 2$

$x - 2 + \sqrt{x+3}(2-7+x) + \sqrt{7-x}(2-x-3) = 0$

$x - 2 + \sqrt{x+3}(x-5) + \sqrt{7-x}(-x-1) = 0$

$x - 2 + \sqrt{x+3}(x-5) + \sqrt{7-x}(x+1) = 0$

$33 : 13$, 78, 6, 5

$\cancel{x}+3 - 2\sqrt{21+4x-x^2} + 7 - \cancel{x} = (2(\sqrt{21+4x-x^2} - 2))^2$

18

$10 - 2\sqrt{21+4x-x^2} = 4(\sqrt{21+4x-x^2} - 2)^2 \quad | : 2$

$5 - \sqrt{21+4x-x^2} = 2((21+4x-x^2) - 2 \cdot 2\sqrt{21+4x-x^2} + 4)$

$37 \times 5 = 55$

$5 - \sqrt{21+4x-x^2} = 2(21+4x-x^2) - 8\sqrt{21+4x-x^2} + 8$

Замена $\sqrt{21+4x-x^2} = t$, $t \geq 0$

$5 - t = 2t^2 - 8t + 8$ $\quad 7 \quad 6$ $\quad D_2 = 64 - 4 \cdot (-83) =$

$2t^2 - 7t + 3 = 0$ $\quad \frac{6}{2} \quad \frac{1}{2}$ $\quad = 64 +$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{21+4x-x^2} = 3 \Rightarrow 21+4x-x^2 = 9 \Rightarrow x^2-4x-21+9=0 \\ \sqrt{21+4x-x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 21+4x-x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2-4x-21+\frac{1}{4}=0 \end{array}\right.$

$21 - 9 = 12$

$4x^2 - 16x - 84 + 1 = 0$

$\left[x^2 - 4x - 12 = 0 \right.$ $\quad 4 \quad -12$ $\quad 6 \quad -2$

$83 : 7$, 7, 1

211005887 (U838692 M1275755)

$83 \times 4 = 332$

16

$332 + 64 = 396$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005887**

ID профиля: **838692**

Вариант 10

Чистовик

№4. $\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10; \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81. \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10; \\ (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81 \end{cases}$

Замена: $x^2+y^2=a$, $x^2y^2=b$ $(a,b>0)$. Тогда

$\begin{cases} \frac{6}{a}+b=10; \\ a^2+5b=81. \end{cases}$ $\begin{cases} b=10-\frac{6}{a}; \\ a^2+50-\frac{30}{a}=81. \end{cases}$ $\begin{cases} b=10-\frac{6}{a} \\ a^2-31-\frac{30}{a}=0. \end{cases}$

$a^2-31-\frac{30}{a}=0 \mid \times a$

$a^3-31a-30=0$; $a=-1$ - корень уравнения

$$\begin{array}{r|l} a^3-31a-30 & a+1 \\ \underline{-\ a^3+a^2} & a^2-a-30 \\ -a^2-31a-30 & \\ \underline{-\ -a^2-a} & \\ -30a-30 & \\ \underline{-\ -30a-30} & \\ 0 & \end{array}$$

$(a+1)(a^2-a-30)=0$

$(a+1)(a-6)(a+5)=0$

$\left[\begin{array}{l} 1) \begin{cases} a=-1 \\ b=16 \end{cases} \\ 2) \begin{cases} a=-5 \\ b=11,2 \end{cases} \\ 3) \begin{cases} a=6 \\ b=9 \end{cases} \end{array}\right.$

1

1) $x^2+y^2=-1$
$x,y \in \varnothing$

2) $x^2+y^2=-5$
$x,y \in \varnothing$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=6; \\ x^2y^2=9. \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=6-x^2; \\ x^2(6-x^2)=9. \end{cases}$ $\begin{cases} 6x^2-x^4=9; \\ y^2=6-x^2. \end{cases}$ $\begin{cases} x^4-6x^2+9=0; \\ y^2=6-x^2. \end{cases}$

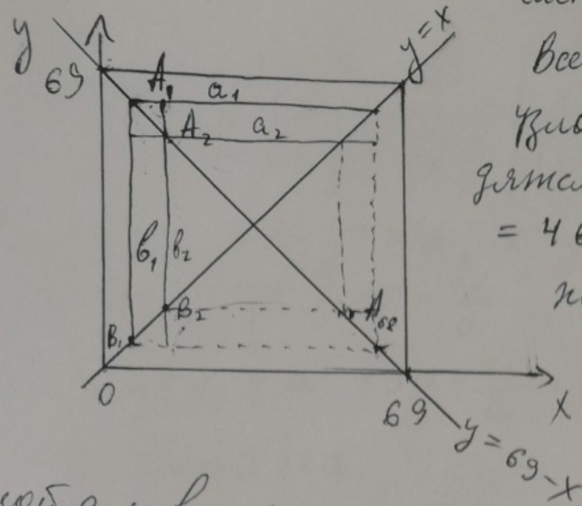
$(x^2-3)^2=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$y^2=6-3=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\sqrt{3})$.

211005887 (U838692 M1275756)

№5.



Чистовик

Всего в квадрате (в его сетке) $70 \cdot 70 = 4900$ узлов. Если не учитывать узлы, что находятся на границах квадрата, то их $68 \times 68 = 4624$. Прямые $y=69-x$ и $y=x$ содержат по 68 узлов (без учёта границ кв.)

Возьмём узел A_1 на прямой $y=69-x$. Мы можем выбрать любой узел, не принадлежащий прямым a_1 и b_1. Прямой a_1 и b_1 принадлежит по $68-1=67$ узлов $\Rightarrow$ из оставшихся 4623 узлов мы можем выбрать любой у $4623-67 \cdot 2 = 4489 = 67^2$ узлов. Возьмём узел $A_2 \in y=69-x$. Аналогично не можем выбрать по 67 узлов на каждой из прямых a_2 и b_2. Т. е. для точки A_2 можем также выбрать 67^2 узлов. Но вариант $A_1 - A_2$ мы уже посчитали $\Rightarrow$ для A_2 кол-во возможных вариантов равно (67^2-1). Для $A_3 - (67^2-2)$, для A_4 (67^2-3), ..., для A_{68} $-(67^2-67)$.

Только что было посчитано число пар узлов $(M-N)$, где M - узлы, что $\in$ прямой $y=69-x$, а N - из остальных узлов, причём N может $\in$ прямой $y=x$. Осталось выяснить комбинации узлов прямой $y=x$ и узлов, что $\notin$ прямой $y=69-x$.

Для узла B_1 можем выбрать (67^2-66) (66 поскольку A_1 и A_{67} уже не учитываются, т. к. $\in$ $y=-x+69$.)

Для B_2 $-(67^2-66-1)$, для B_3 $-(67^2-66-2)$, ..., для B_{68} $(67^2-66-67)$

Итого: $67^2 + (67^2-1) + (67^2-2) + \ldots (67^2-67) + (67^2-66) + (67^2-66-1) + (67^2-66-2) + \ldots + (67^2-66-67) = 67^2 \cdot 68 - (1+2+\ldots+67) + (67^2-66) \cdot 68 - (1+2+\ldots+67) = 68(67^2+67^2-66) - 2(1+2+\ldots+67) = 68(2 \cdot 67^2 - 66) - 2(1+\ldots+67)$

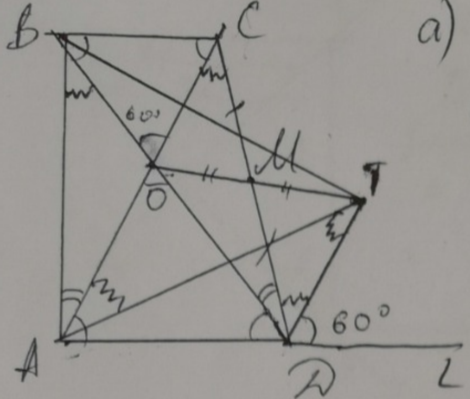
Ответ: кол-во способов: $68(2 \cdot 67^2 - 66) - 2(1+2+\ldots+67)$

2

211005887 (U838692 M1275756)

№6.

Чистовик



а) $\triangle CMO = \triangle DMT$ по двум сторонам и углу между ними $\Rightarrow \angle OCM = \angle TDM$ $\Rightarrow AC \parallel DT \Rightarrow \angle OAD = \angle TDL = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ODT = \angle ODM + \angle MDT = 60°$

Рассмотрим $\triangle DOC$ и $\triangle ADT$:

1) $CO = DT$ (т.к. $\triangle COM = \triangle MTD$)

2) $AD = OD$ ($\triangle AOD$ — правильный)

3) $\angle ADT = \angle COD = 120°$

($\angle COD = 180° - 60° = 120$; $\angle ADT$ — аналогично)

Значит $\triangle DOC = \triangle ADT \Rightarrow \angle ATD = \angle OCD \Rightarrow \angle OAT =$
$= \angle ATD$ (как накрест-лежащие при $AO \parallel DT$ и секущей TA)

Значит $\angle BAT = 60°$ $(= \angle ODM + \angle MDT)$

$\angle BOA = \angle TDA = 120°$

$\triangle BOA = \angle ATD$ по двум ст. и углу между ними

($BO = OC = BC = TD$; $AO = AD$ и $\angle BOA = \angle TDA = 120°$)

Значит $AB = AT \Rightarrow \triangle ABT$ — равноб. $\Rightarrow \angle ABT = \angle ATB =$
$= \dfrac{180° - 60°}{2} = 60° \Rightarrow \triangle ABT$ — равносторонний, что и требовалось доказать.

3

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Замена $x^2+y^2 = a$ $a, b > 0$

$x^2y^2 = b$

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

31

$$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \\ a^2 + 5b = 81 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 10 - \frac{6}{a} \\ a^2 + 5(10 - \frac{6}{a}) = 81 \end{cases}$$

$a^2 - \frac{30}{a} = 81 - 50$

$a^2 - \frac{30}{a} - 31 = 0 \mid \cdot a$

$a^3 - 31a - 30 = 0$ $(a+1)$

$-1 + 31 - 30 = 0$

$$\begin{array}{l|l} a^3 - 31a - 30 & a+1 \\ \hline -\underline{a^3 + a^2} & a^2 - a - 30 \\ \quad -a^2 - 31a - 30 & \\ \quad -\underline{-a^2 - a} & \\ \qquad -30a - 30 & \\ \qquad -\underline{-30a - 30} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$(a+1)(a^2 - a \cdot 30)$

~~$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = 121$~~

1 -30

-1 6 -5

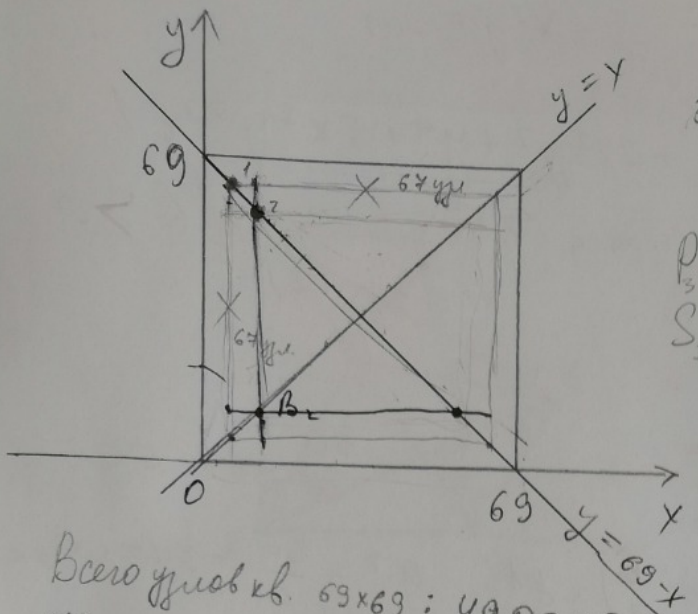
$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \end{cases} \quad a = -5 \quad b = 11.5$$

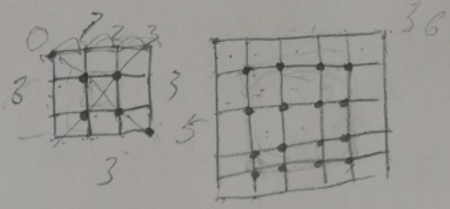
$10 + \frac{6}{5} = 11,2$

$10 - \frac{6}{6} = 9$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 18 \\ +63 \\ \hline 81 \end{array}$$

211005887 (U838692 M1275756)





$P_3 = 12$ $P = 20$

$S_3 = 9$ $S = 25$

69 кл.

70 узлов

68 узлов

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times\ 68 \\ \hline 544 \\ 408 \\ \hline 4624 \\ +\ 276 \\ \hline 4900 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 69 \\ \times\ 4 \\ \hline 276 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70 \\ \times\ 4 \\ \hline 280 \end{array}$$

Всего узлов кв. 69×69 : 4900 шт

Не считая границ кв.: 4624

~~В каждой~~ На прямой $y = x$: 68 узлов (не считая гр.)

На прямой $y = 69 - x$: 68 узлов (не сч. гр.)

$67^2 - 66 - 1$

1 * 67
2 67
3 67
⋮ 67
68 67

4624 уз.

1 выбр. ост. 4623 уз.

Нельзя 67 + 67

Можно: 4489

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times\ 2 \\ \hline 134 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4623 \\ -\ 134 \\ \hline 4489 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4489 \\ +\ 134 \\ \hline 4623 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67 \\ \times\ 67 \\ \hline 469 \\ 402 \\ \hline 4489 \end{array}$$

64.

1 − 4489

2 − 4488

3 4487

$67 \cdot 67 + 67^2 - 1 + 67^2 - 2 + \ldots + 67^2 - 67$

68 (67^2 (

68

1 $67^2 - 66$

2 $67^2 - 66 - 1$

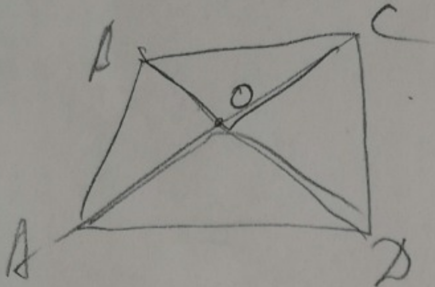
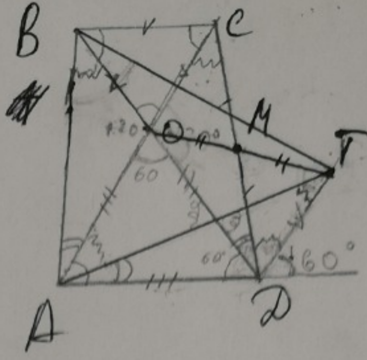
3 $67^2 - 66 - 2$

⋮

68 $67^2 - 66 - 67$

~~$67^2 \cdot (-1) \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 67)$~~

$$67^2 \cdot 68 - (1 + 2 + \ldots + 67) + (67^2 - 66) \cdot 68 - (1 + 2 + \ldots + 67)$$


B
C
O
A
D

B
C
O
M
T
A
D
60°