Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005782**

ID профиля: **320373**

Вариант 10

№ 2

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2\sqrt{(x+3)(7-x)}-4$$

ОДЗ: $x\in[-3;7]$

$$x+3+7-x-2\sqrt{(x+3)(x-7)}=4(x+3)(7-x)+16-16\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$4(x+3)(7-x)-14\sqrt{(x+3)(7-x)}+6=0.$$

$t=\sqrt{(x+3)(7-x)}$, $t\geq 0$.

$$\cancel{2t^3-14}\ 2t^2-7t+3=0.$$

$t_1=3$, $t_2=\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} 1.\ 21+4x-x^2=9 \\ 2.\ 21+4x-x^2=\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

(1) $x^2-4x-12=0.$

$x_1=6$, $\in$ ОДЗ $x_2=-2$, $\in$ ОДЗ.

(2) $84+16x-4x^2=1$

$4x^2-16x-83=0$

$D=16^2+16\cdot 83=16(16+83)=16\cdot 9\cdot 11$

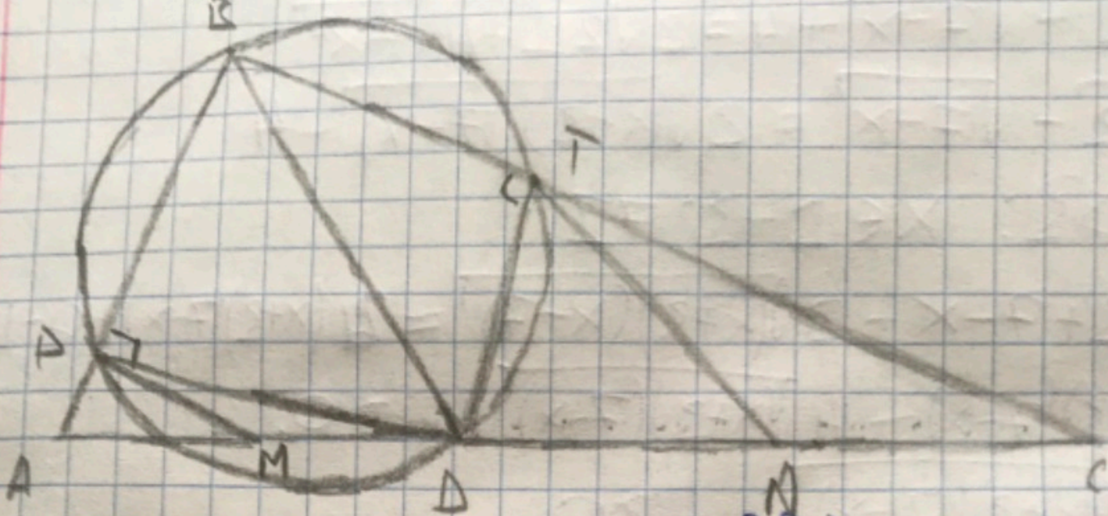
$x_{12}=\frac{16\pm 12\sqrt{11}}{8}=2\pm\frac{3}{4}\sqrt{11}\in$ ОДЗ.

Ответ: $6; -2; 2+\frac{3}{4}\sqrt{11}; 2-\frac{3}{4}\sqrt{11}$

1

211005782 (U320373 M1276450)

№ 1



Дано: $\triangle ABC$, окр$(O, \frac{BD}{2})$, $D \in AC$;
$AB \cap$ окр$(O, \frac{BD}{2}) = P$, $BC \cap$ окр$(O, \frac{BD}{2}) = T$.
M - середина AD, N - середина DC.
$PM \parallel TN$

1) $\angle ABC$ - ?;
2) $MP = 1$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = \sqrt{5}$,
$S_{\triangle ABC}$ - ?

(1) BD - диаметр, потому $\angle BPD = \angle BTD = 90°$
PM и TN - медианы $\triangle APD$, $\triangle DTC$,
$PM = MD$, $TN = NC$ (медианы в п/у треугольнике)
$\angle ABC + \angle PDT = 180°$.
$\angle ADP + \angle PDT + \angle TDC = 180°$
2. $\angle ABC = \angle ADP + \angle TDC$

$\angle PMD = \angle TNC$ (соот. углы при парл. прямых).

ΔPMD и ΔTNC – р/б.

$\angle PDM = \angle TCN$

$\angle TDC + \angle TCN = 90^\circ$

$\angle ABC = \angle ADP + \angle TDC = \angle TDC + \angle TCN = 90^\circ$

Ответ: 90°.

(2) $AD = AM + MD = 2PM = 2$

$BD = DN + BN = 2TN = 3$.

~~По теореме косинусов~~

Пусть $\cos\angle ADB = x$.

По теореме косинусов для ΔADB и ΔBDC

$AB^2 = 4 + 5 - 4\sqrt{5}x = 9 - 4\sqrt{5}x$

$BC^2 = 9 + 5 + 6\sqrt{5}x = 14 + \cancel{\ldots} + 6\sqrt{5}x$.

$AB^2 + BC^2 = AC^2$.

$23 + 2\sqrt{5}x = 25$

$2\sqrt{5}x = 2 \Rightarrow \cos\angle ADB = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$AB = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$.

$BC = \sqrt{14+6} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 5$.

Ответ: 5

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005782**

ID профиля: **320373**

Вариант 10

№4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$u = x^2+y^2$

$v = x^2y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{u} + v = 10 \\ u^2 + 5v = 81 \end{cases} \qquad u > 0$$

$u^2 - \dfrac{30}{u} = 31$

$u^3 - 31u - 30 = 0$

$u = 6$

$\cancel{u^3}\ (u-6)(u^2+6u+5) = 0$

$(u-6)(u+1)(u+5) = 0 \Rightarrow u = -1,\ u = -5 < 0$

$\underline{u = 6}$

$1 + v = 10$

$v = \underline{9}$

$\cancel{x^2+y^2=}$

4

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$$

$$y^2=\frac{9}{x^2}$$

$$x^2+\frac{9}{x^2}=6$$

$$x^4-6x^2+9=0$$

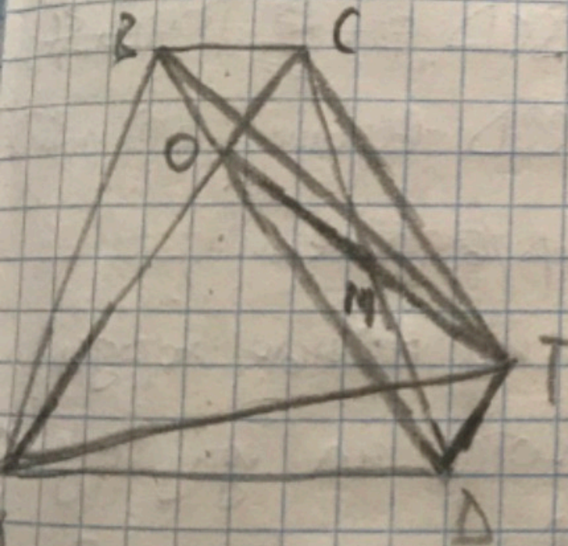
$$(x^2-3)^2=0$$

$$x=\pm\sqrt{3}$$

$$y=\pm\sqrt{3}$$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

№6.



Дано: ABCD – [illegible]

$BD\cap AC=\{O\}$

△BOC и △AOD – правильные

T симметрична O отн. сер. CD.

① Доказать △ABT – правильный

② BC=2, AD=7.

$\frac{S_{ABD}}{S_{ABCD}}$ – ?

5.

① ▷ Пусть $OT \cap CD = M$.

$OM = MT$, $CM = DM$

$CTMO$ – параллелограмм, ~~т.к. M~~

т.к M делит диагонали пополам.

$OC = DT$, $\Rightarrow DT = BC$

$CT \parallel BD$.

$ABCD$ – равнобокая трапеция

$BCTD$ – также равнобокая трапеция

~~ABCD~~ ~~можно~~ $ABCTD$ можно описать одной окружностью, из-за ΔBCD, ~~т.к. В точки BCD~~ ~~принадле~~ т.к точки B, C, D - вершины $ABCD$ и $BCTD$.

$BD = CT$ (диагонали р/б трапеции).

$\angle BAT = \angle CBD = 60^\circ$ (опираются на равные хорды).

$\angle BAT = \angle BDA = 60^\circ$ (опираются на одну хорд AB)

$\angle ABT = 60^\circ$, поэтому ΔABT – правильный.

6.

② $BO = BC = 2$, $DO = AD = 7$

$BD = 9$.

По теореме косинусов для ΔABD:

$AB = \sqrt{49 + 81 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{67}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2}\sqrt{67}\cdot\sqrt{67}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{63\sqrt{3}}{4}$

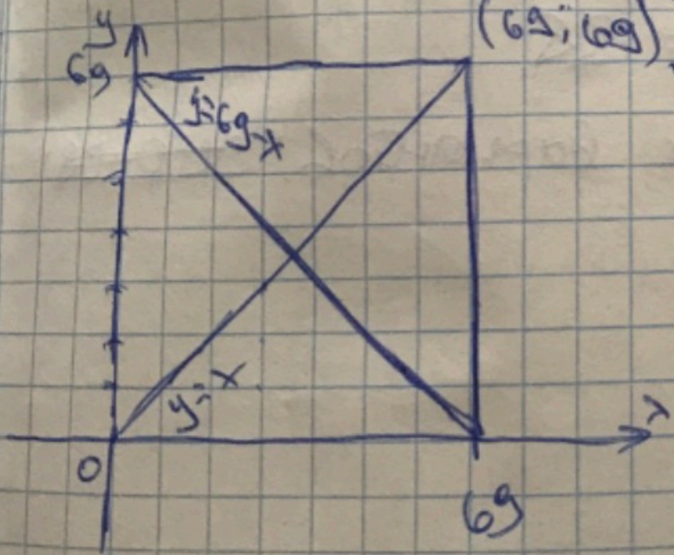
$S_{BDC} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{63\sqrt{3}}{4} + \frac{18\sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$

Ответ: $\frac{67}{81}$.

№5.



~~Мы должны~~ ~~На пря~~

На одной прямой находится 68 узлов.

~~На~~ Всего 136 узлов, т.к. эти две прямые в узле не пересекаются.

7

Над выбрать два узла из 136,

$$C_{136}^2 = \frac{136!}{2 \cdot 134!} = \frac{135 \cdot 136}{2} = 135 \cdot 68 = 9180.$$

Дальше надо ~~вычислить~~ вычесть варианты когда два узла параллельны одной из оси. На каждый один узел на одной прямой приходится два возможных узла из другой прямой, при котором они будут лежать на прямой параллельную одной из оси. ~~Все таких в 6~~

Всего вариантов расположения таких узлов - ~~9180~~ = 138.

Всего правильных вариантов: ~~9180 - 138~~

9180 - 138 = 9042

Ответ: 9042.