Часть 1

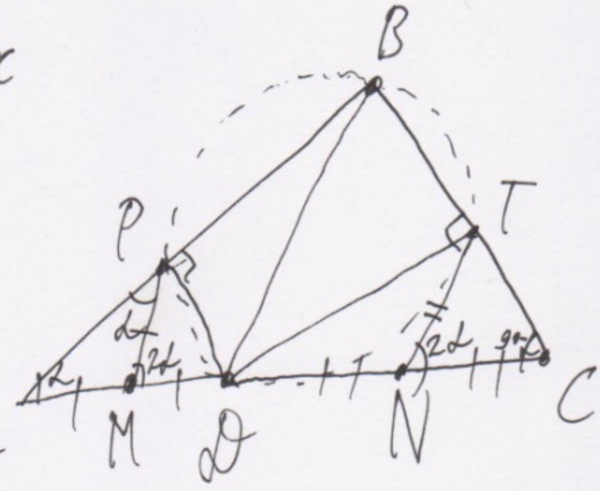
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005713**

ID профиля: **351839**

Вариант 10

1 Чистовик



1) т.к. BD – диаметр; P, T лежат на окружности с диаметром BD, то $\angle DPB = \angle DTB = 90^\circ$ впис, опир. на диаметр. $\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90^\circ$ – смежные тем углам. ~~PM медиана~~

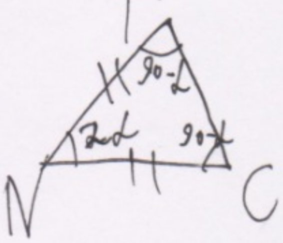
PM и TN – медианы $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ соответственно; $\angle APD = \angle DTC = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow PM = AM = MD$; $DN = TN = NC$. (медиана из прямого угла).

пусть $\angle PAM = \alpha \Rightarrow \angle APM = \alpha$ т.к. $\triangle APM$ – р/б, AP – основ.

$\Rightarrow \angle PMD = 2\alpha$ – внешний.

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD = \angle TNC$ – соответствующие.



$\triangle NTC$ – р/б. TC – основ. $\Rightarrow \angle NTC = \angle TCT \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\angle NTC + \angle TNC = 2\angle NTC + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NTC = 90^\circ - \alpha = \angle NCT$.

$\angle BAC = \angle PAM = \alpha$; $\angle BCA = \angle TCN = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

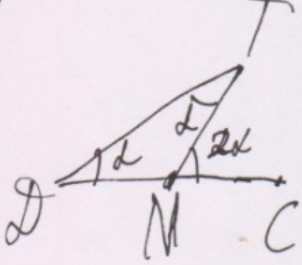
$\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ$.

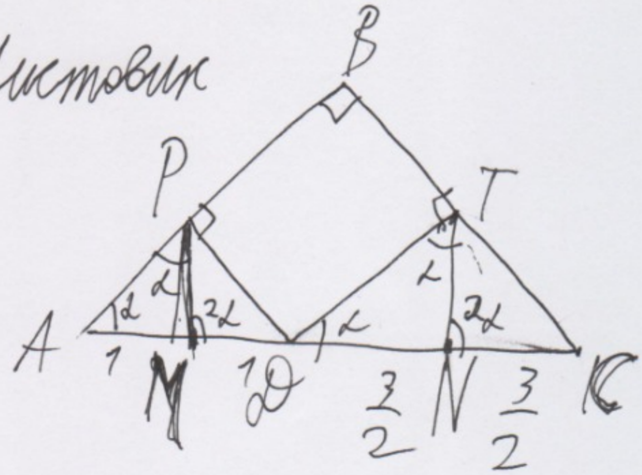
211005713 (U351839 M1277210)

Чистовик

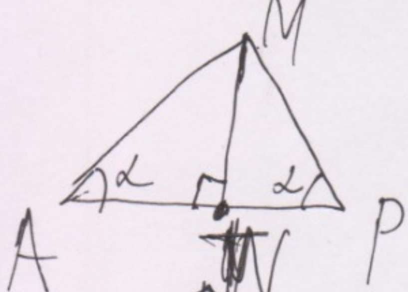
1) медиана из прямого угла.

2)

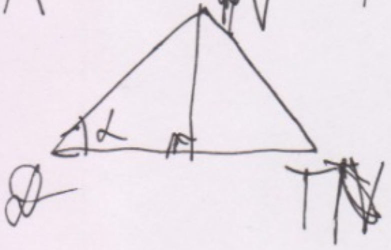




$\angle TNC$ – внешн $\Rightarrow \angle TDN = \angle DTN = \alpha$



$AP = 2AM\cos\alpha = 2\cos\alpha$



$DT = 2DN\cos\alpha = 3\cos\alpha$

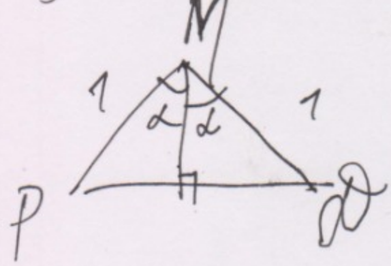
$PBTD$ – прямоуг $\Rightarrow$

$\Rightarrow PB = DT;\ PD = BT.$

$AB = AP + PB = 5\cos\alpha$

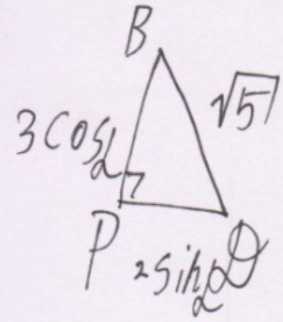
$BC = AB\,tg\,\alpha = 5\cos\alpha\,tg\,\alpha = 5\sin\alpha.$

$S(ABC) = \frac{AB\cdot BC}{2} = \frac{25\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2}$



$PD = 2\sin\alpha\cdot PM = 2\sin\alpha.$

1



Чистовик

$\Rightarrow 3\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\cos^2\alpha + 4 = 5$

$5\cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$S_{(ABC)} = \frac{25}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{25}{2}\cdot\frac{1\cdot 2}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{25\cdot 2}{2\cdot 5} = 5$

Ответ: а) 90°; б) 5.

Чистовик

(2) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\begin{cases} a=\sqrt{x+3}\geq 0 \\ b=\sqrt{7-x}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{21+4x-x^2}=\sqrt{(x+3)(7-x)}=ab \\ a^2+b^2=(x+3)+(7-x)=10 \end{cases}$

$a-b+4=2ab$

$-2ab+a-b+4=0$

прибавим к обеим частям $a^2+b^2=10$

$(a^2+b^2-2ab)+a-b+4=a^2+b^2=10$

$(a-b)^2+(a-b)+4=10$

$a-b=c$

$c^2+c+4=10 \Rightarrow c^2+c-6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (c+3)(c-2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=-3 \\ c=2. \end{array}\right.$ рассмотрим c:

$c=a-b=\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}$

$\sqrt{x+3}$ – возрастает; $-\sqrt{7-x}$ – возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ c – возрастающая функция от x. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $c=-3$ – не более одного решения

$c=2$ – не более одного решения.

1) пусть $x=6$, тогда $c=\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=\sqrt{6+3}-\sqrt{7-6}=3-1=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=6$ – корень.

2) $c=-3$: $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-3 \Rightarrow \sqrt{7-x}=\sqrt{x+3}+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7-x=(x+3)+9+6\sqrt{x+3}$

② Чистовик

$7 - x - x - 3 - 9 = 6\sqrt{x+3}$

$-5 - 2x = 6\sqrt{x+3}$

$6\sqrt{x+3} \geq 0 \Rightarrow -5 - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq -5 \Rightarrow x \leq -2{,}5.$

$\cancel{(5+2x)}$

$(-5-2x)^2 = (6\sqrt{x+3})^2$

$25 + 4x^2 + 20x = 36 \cdot (x+3) = 36x + 108$

$4x^2 - 16x + 25 - 108 = 4x^2 - 16x - 83 = 0$

$D = 16^2 + 4 \cdot 4 \cdot 83 = 16(\underbrace{16+83}_{99}) = 16 \cdot 99 = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 11 = (12\sqrt{11})^2$

$x = \frac{16 \pm 12\sqrt{11}}{\underbrace{2 \cdot 4}_{8}} = 2 \pm \frac{3\sqrt{11}}{2}.$

$x \leq -2{,}5 \Rightarrow x_2 = 2 - \frac{3\sqrt{11}}{2}$

проверим ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 7]$

$x_2 = 2 - \frac{3\sqrt{11}}{2} < 2 < 7$ ✓

$2 - \frac{3\sqrt{11}}{2} \vee -3$ подходит.

$5 \vee \frac{3\sqrt{11}}{2}$

$10 \vee 3\sqrt{11}$

$100 \vee 99$

Ответ: $x = 6$; $x = 2 - \frac{3\sqrt{11}}{2}$.

211005713 (U351839 M1277210)

Чистовик

(3) A: $5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=$

$=y^2-4y(a+x)+4(a^2+2ax+x^2)+(a^2+4ax+4x^2)=$

$=(y-2(a+x))^2+(a+2x)^2=0 \Rightarrow$

т.к. $(y-2(a+x))^2 \geq 0$ и $(a+2x)^2 \geq 0$

и их сумма $=0 \Rightarrow$ они оба равны $0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y-2(a+x)=0 \\ a+2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2(a+x) \\ x=-\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{a}{2} \\ y=2\left(a-\frac{a}{2}\right)=\frac{2a}{2}=a \end{cases}$

точка A имеет координаты $\left(-\frac{a}{2}; a\right)$.

B: $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$a(x^2-2ax+a^2)-ay+3=0$

$a(x-a)^2=ay-3.$

$\boxed{\text{при } a=0: \; 3=0 \text{ неверно} \Rightarrow a\neq 0}$

$x_B=a$; y_B: $0=ay_B-3 \Rightarrow y_B=\frac{3}{a}.$

B: $\left(a; \frac{3}{a}\right)$; прямая: $2x-y=5 \Rightarrow y=2x-5$

если точка C лежит выше прямой, то

$y_C>2x_C-5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_C-2x_C+5>0$ | если ниже, то $y_C<2x_C-5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_C-2x_C+5<0.$

т.к. A и B по одну сторону, то либо

211005713 (U351839 M1277210)

Чистовик

(3) ~~обе~~ ~~точки~~ выше, либо обе точки ниже прямой.

1) ~~обе~~ выше $\Rightarrow$ $y_A - 2x_A + 5 > 0$
$y_B - 2x_B + 5 > 0$ $\Rightarrow (y_A - 2x_A + 5)(y_B - 2x_B + 5) > 0$

2) обе ниже $\Rightarrow$ $y_A - 2x_A + 5 < 0$
$y_B - 5x_B + 5 < 0$ $\Rightarrow (y_A - 2x_A + 5)(y_B - 2x_B + 5) > 0$

условие выполнено тогда и только тогда, когда $(y_A - 2x_A + 5)(y_B - 2x_B + 5) > 0$

$y_A = a$; $x_A = -\frac{a}{2}$; $y_B = \frac{3}{a}$; $x_B = a$

$(a + a + 5)\left(\frac{3}{a} - 2a + 5\right) > 0$;

$(2a + 5)\left(-2a + 5 + \frac{3}{a}\right) > 0$;

$\frac{1}{a}(2a + 5)(-2a^2 + 5a + 3) > 0$; $-2a^2 + 5a + 3 = (3 - a)(2a + 1)$

$Y = \frac{(2a+5)(3-a)(2a+1)}{a} > 0$

метод интервалов:

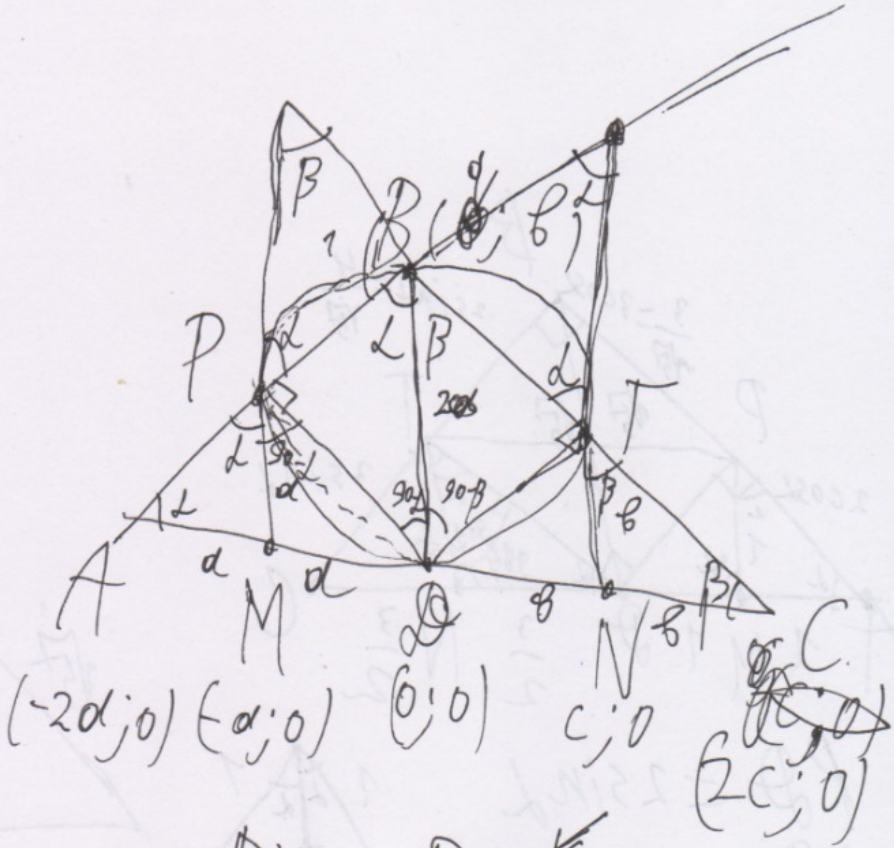
$$\underset{-\frac{5}{2}}{\circ} \quad \underset{-\frac{1}{2}}{\circ} \quad \underset{0}{\circ} \quad \underset{3}{\circ} \to a$$

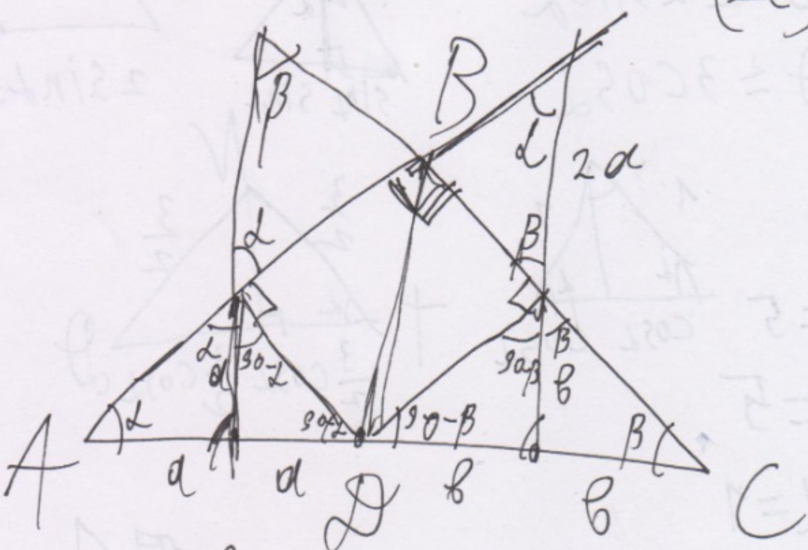
$-$ $+$ $-$ $+$ $-$

при оченьбольших a: $2a + 5 > 0$, $3 - a < 0$, $2a + 1 > 0$, $a > 0$ $\Rightarrow Y < 0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$a \in (-\frac{5}{2}$~~ $a \in \left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 3)$.

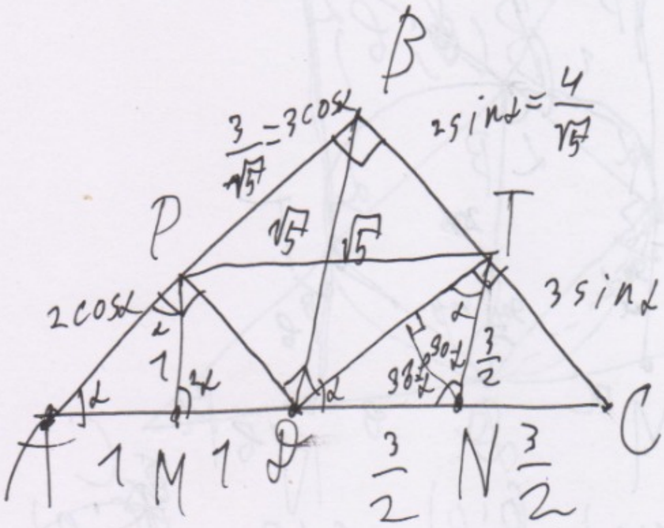
Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 3)$





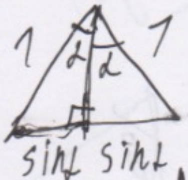
$180-2\alpha=2\beta$

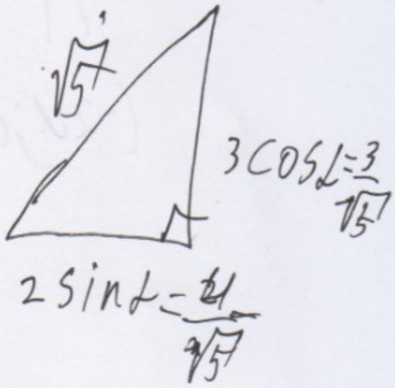
$\alpha+\beta=90$

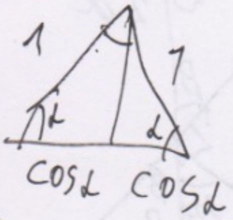


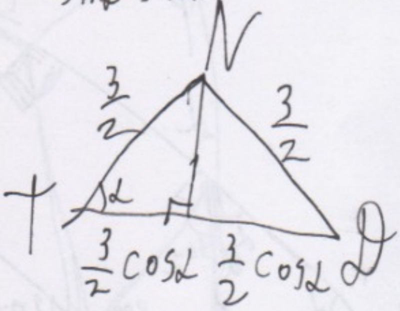
$PD = 2\sin\alpha$

$TD = 3\cos\alpha$









$4\sin^2\alpha+9\cos^2\alpha=5$

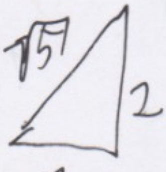
$4+5\cos^2\alpha=5$

$5\cos^2\alpha=1$

$\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$

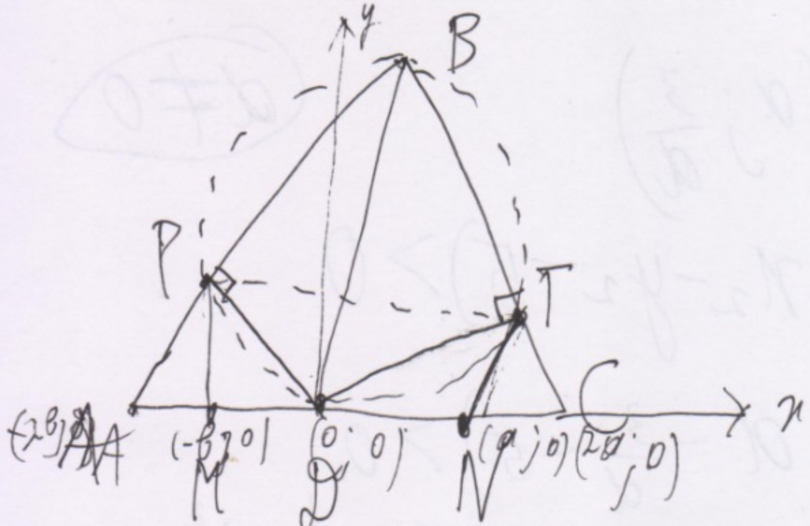
$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

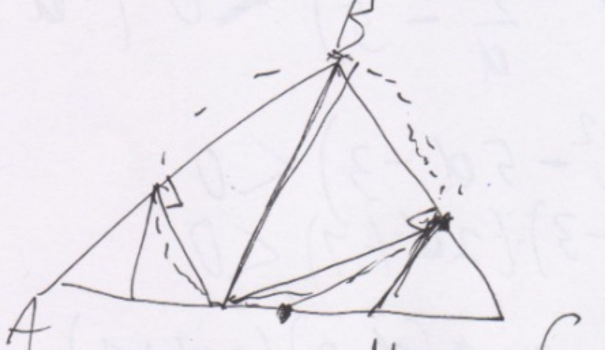
$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

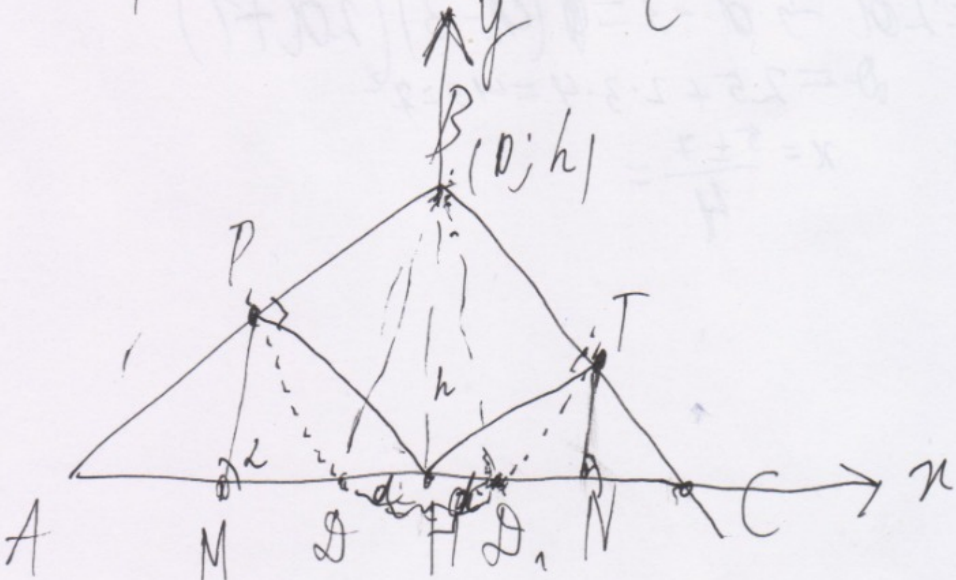


$\frac{4\cdot\overset{1}{5}+5}{5\cdot 5}$

211005713 (U351839 M1277210)







$$(x-a)^2+(y-h)^2=h^2+a^2$$

$$x^2-2ax+y^2-2hy=0$$

$\left(-\frac{a}{2}; a\right)$ $\left(a; \frac{3}{a}\right)$ $a \neq 0$

$(2x_1 - y_1 - 5)(2x_2 - y_2 - 5) > 0$

$(-a - a - 5)\left(2a - \frac{3}{a} - 5\right) > 0$

$(2a + 5)\left(2a - \frac{3}{a} - 5\right) < 0 \mid \cdot a^2 > 0$

$a(2a+5)(2a^2 - 5a - 3) < 0$

$a(2a+5)(a-3)(2a+1) < 0$

$0 = 2a^2 - 5a - 3 = (a-3)(2a+1)$

$D = 25 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 49 = 7^2$

$x = \frac{5 \pm 7}{4} =$

211005713 (U351839 M1277210)

A: $\boxed{\begin{matrix} y = a \\ x = -\frac{a}{2} \end{matrix}}$

$5a^2 - 4a^2 + 2a^2 - 2a^2 + a^2 - 6a^2$

$5 - 4 + 2 - 2 + 1 - 6$

$y^2 = a^2$

$\cancel{5a^2}$

$8x^2 = 8 \cdot \frac{a^2}{4} = 2a^2$

$-4ay = -4a^2$

$-4yx = -4a\left(-\frac{a}{2}\right) = 2a^2$

$12ax = 12a\left(-\frac{a}{2}\right) = -6a^2$

$1 + 5 + 2 - 4 + 2 - 6 = 0$

6 8 4 6

$\checkmark$

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$

$a(x^2 - 2ax + a^2) = ay - 3$

$a(x-a)^2 = ay - 3$

вершина при $x = a \Rightarrow ay - 3 = 0$

$y = \frac{3}{a}$

211005713 (U351839 M1277210)

$$\begin{cases} e = 3 = b - a = \sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} = \searrow \\ e = -2 = \sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} = \searrow \end{cases}$$

e – убывающая $\Rightarrow$ единств. решение

1) $\sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} = 3$

2) $\sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} = -2$

2) : $x = 6$ $\sqrt{7-6} = 1$

$\sqrt{6+3} = 3$ $1-3=-2$

~~2) : $x=$~~

1) .

$x=-2 \Rightarrow \sqrt{7+2} = 3$

$\sqrt{3-2} = 1$ $3-1=2$

$x=-3 \Rightarrow \sqrt{7+3} = \sqrt{10}$

$\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{10} > 3$

~~$3+x = 0{,}25 \Rightarrow x = -2{,}75$~~

$3{,}5^2 = \frac{49}{4}$

$$\begin{array}{r} \times\, 36 \\ 3 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\,108 \\ 25 \\ \hline 83 \end{array}$$

$\sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} = 3$

$7-x = (x+3) + (9) + 6\sqrt{x+3}$

$7-12-2x$

-5

$0 \leq -5-2x = 6\sqrt{x+3}$

$25+4x^2$ $36x+36\cdot 3$

$4x^2 - 16x + 25 - 36\cdot 3 = 4x^2 - 16x - 83 = 0$

211005713 (U351839-M1277210)

$x - \frac{3\sqrt{11}}{2} = x$

$\sqrt{5 - \frac{3\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{5 + \frac{3\sqrt{11}}{2}} + 4 = 2\sqrt{25 - \frac{9 \cdot 11}{4}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$

$\sqrt{5 + \frac{3\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{5 - \frac{3\sqrt{11}}{2}} = 3 \quad \Big| \cdot \sqrt{5 - \frac{3\sqrt{11}}{2}}$

$\sqrt{25 - \frac{9 \cdot 11}{4}} - 5 + \frac{3\sqrt{11}}{2} = 3\sqrt{5 - \frac{3\sqrt{11}}{2}}$

$\frac{1}{2} - 5 + \frac{3\sqrt{11}}{2} = 3\sqrt{5 - \frac{3\sqrt{11}}{2}}$

$\cancel{\sqrt{5 - a} - \sqrt{5 + a} + 4 = 2\sqrt{25 - a^2}}$

A) $5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$

$y^2 - 4y(a + x) + \underbrace{4(a + x)^2}_{4a^2 + 8ax + 4x^2} + \underbrace{a^2 + 4ax + 4x^2}_{} = 0$

$(\overbrace{y - 2(a + x)}^{y - 2a - 2x})^2 + (a + 2x)^2 = 0$

$y^2 + 4a^2 + 4x^2 - 4ay - 4yx + 8ax + a^2 + 4x^2 + 4ax =$
$= y^2 + 5a^2 + 8x^2 - 4ay - 4yx + 12ax = 0$

$\begin{cases} y = 2(a + x) \\ a + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2\left(a - \frac{a}{2}\right) = \frac{2a}{2} = a \\ x = -\frac{a}{2} \end{cases}$

211005713 (U351839 M1277210)

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}=$$

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$\sqrt{x+3}=a\geq 0$$

$$\sqrt{7-x}=b\geq 0$$

$$a-b+4=2ab$$

$$2ab+b-a-4=0$$

$$b(2a+1)-\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-4=0$$

$$2b\left(a+\frac{1}{2}\right)-\left(a+\frac{1}{2}\right)=4-\frac{1}{2}=\frac{8-1}{2}=\frac{7}{2}$$

$$(2b-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}\Rightarrow(2b-1)(2a+1)=7$$

$a=\sqrt{x+3}$ – возраст от x

$b=\sqrt{7-x}$ – убыв от x.

$x\geq -3$

$x\leq 7$ $\quad x\in[-3;7]$

$0\leq a\leq\sqrt{10}$

$0\leq b\leq\sqrt{10}$ $\quad a^2+b^2=x+3+7-x=10$

$0\leq 2a+1\leq 2\sqrt{10}+1$

$-1\leq 2b-1\leq 2\sqrt{10}-1$

$$a^2+b^2=10$$

$$2ab+b-a-4=0$$

$$-(a^2+b^2)+2ab+(b-a)-4=-10$$

$$-(a^2-2ab+b^2)+(b-a)-4=-10$$

$$-(b-a)^2+(b-a)+6=0 \qquad b-a=e$$

$$-e^2+e+6=0 \Rightarrow e^2-e-6=(e-3)(e+2)=0$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005713**

ID профиля: **351839**

Вариант 10

(4) $\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10; \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 = (x^4+2x^2y^2+y^4)+5x^2y^2 = (x^2+y^2)^2+5x^2y^2 \end{cases}$ Чистовик

$a = x^2+y^2 \geq 0$; $a \neq 0 \Rightarrow a > 0$. т.к. есть $\frac{6}{a}$.

$b = x^2y^2 \geq 0$

$\begin{cases} \frac{6}{a} + b = 10 \\ a^2 + 5b = 81 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{30}{a} + 5b = 50 \\ a^2 + 5b = 81 \end{cases}$

$\begin{cases} 5b = 50 - \frac{30}{a} \\ 5b = 81 - a^2 \end{cases} \Rightarrow 81 - a^2 = 50 - \frac{30}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - 31 - \frac{30}{a} = 0 \quad | \cdot a \neq 0$

$a^3 - 31a - 30 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+1)(a-6)(a+5) = 0 \Rightarrow a \in \{-5; -1; 6\}$;

$\cancel{a \Rightarrow 0}$ но $a > 0 \Rightarrow \boxed{a = 6.}$

$5b = 81 - a^2 = 81 - \underset{36}{6^2} = 45. \Rightarrow \boxed{b = 9.}$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 6 \\ x^2y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=6 \\ xy=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=6 \\ xy=-3 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-2xy=(x-y)^2=6-2\cdot3=0 \\ xy=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2+2xy=(x+y)^2=6-2\cdot3=0 \\ xy=-3 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ xy=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-y \\ xy=-3 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow (x;y) \in \{(\sqrt{3};\sqrt{3}); (-\sqrt{3};\sqrt{3}); (\sqrt{3};-\sqrt{3}); (-\sqrt{3};-\sqrt{3})\}$

Чистовик.

4 Ответ: $(x;y) \in \{(\sqrt{3};\sqrt{3}); (\sqrt{3};-\sqrt{3}); (-\sqrt{3};\sqrt{3}); (-\sqrt{3};-\sqrt{3})\}$

211005713 (U351839 M1277211)

⑤ Чистовик

Будем считать по частям:

1) оба узла на $(y = x)$: надо выбрать 2 из 68 точек; это $C_{68}^2 = \frac{68 \cdot 67}{2}$.

2) оба узла на $(y = 69 - x)$: столько же, сколько и в 1) т.к. поворотом на $90°$ получим первый случай из 2. (то есть оба узла на $y = x$)

3) один узел на $(y = x)$, а другой не на $(y = x)$: первую выберем 68 способами, а вторую: было 68^2 узлов, один выбрали, и ещё 67 на одной вертикали и ещё 67 на одной горизонтали $\Rightarrow$ кол-во способов второй точки $68^2 - 2 \cdot 67 - 1 = 68^2 - 2 \cdot 68 + 1 = 67^2$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Кол-во способов $= 68 \cdot 67^2$

4) один узел на $(y = 69 - x)$, а другой не на $(y = 69 - x)$: столько же, сколько и в 3) т.к. поворотом на $90°$ всей картины получим, что один узел на $(y = x)$, а другой не на $(y = x)$.

Но посчитав 3) и 4) мы дважды учли случаи, когда один узел на $(y = x)$, а другой на $(y = 69 - x)$

211005713 (U351839 M1277211)

Чистовик

5) (5) один узел на $(y=x)$; а другой на $(y=69-x)$:
первый узел 68 способов $(x_1; x_1)$, а второй:
на другой прямой можно выбрать любую точку, кроме точки на одной горизонтали, или одной вертикали с первой. Это точки $(x_1; 69-x_1)$ и $(69-x_1; x_1)$, где $(x_1; x_1)$ - координаты первого узла $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ второй узел можно выбрать $68-2=66$ способами. $\Rightarrow$ $\underline{68\cdot 66}$.

~~x_1~~ точки $(x_1; 69-x_1)$ и $(69-x_1; x_1)$ - различны, т.к. $x_1 = 69-x_1$ ~~только~~ при $x_1 = 34{,}5$ - нецелое.

Количество способов равно $1)+2)+3)+4)-5)=$

$$= \frac{68\cdot 67}{2} + \frac{68\cdot 67}{2} + 68\cdot 67^2 + 68\cdot 67^2 - 68\cdot 66 =$$

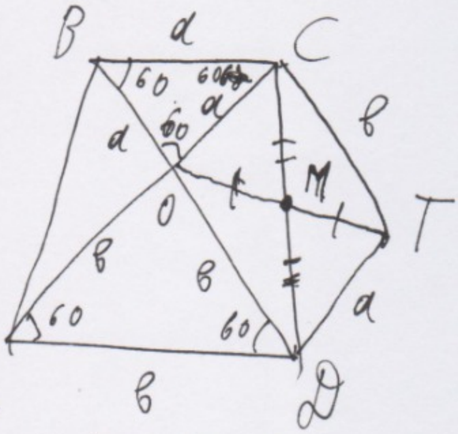
$$= 68\cdot 67 + 2\cdot 68\cdot 67^2 - 68\cdot 66 = 2\cdot 68\cdot 67^2 + 68 =$$

$$= 68(2\cdot 67^2 + 1) = 68\cdot 8979 = 610572$$

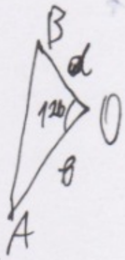
$$\begin{array}{r} \times\ 67 \\ 67 \\ \hline 469 \\ +402 \\ \hline 4489 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 4489 \\ 2 \\ \hline 8978 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 8979 \\ 68 \\ \hline 71832 \\ 53874 \\ \hline 610572 \end{array}$$

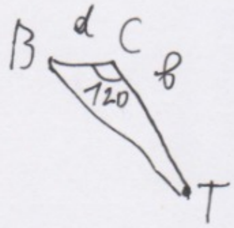
Ответ: $68\cdot(2\cdot 67^2+1) = 610572$.

⑥ а) Чистовик

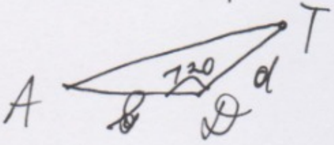


$\triangle BOC$; $\triangle AOD$ – правильные $\Rightarrow \angle BCO = \angle OAD = 60^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow BC \parallel AD$ т.к. накрест леж. углы равны. $\Rightarrow ABCD$ – трапеция. Пусть $BC = a$; $AD = в \Rightarrow BC = BO = CO = a$; $AD = AO = DO = в$;
т. к. T симметрична O отн середины CD (M), то $CM = DM$; $OM = MT \Rightarrow CTDO$ – параллелограмм.
$\Rightarrow OD = CT = в$; $CO = DT = a$; $\angle COD = \angle CTD$;
$\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ = \angle CTD$.
$CO \parallel DT \Rightarrow \angle BOC = \angle BDT = 60^\circ$ – соответствующие.
$\angle ADT = \angle ADO + \angle BDT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$;
$\angle BOA = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$.





1) $a = BO = DT = BC$.
2) $в = AO = AD = CT$
3) $\angle BOA = \angle ADT = \angle BCT = 120^\circ$



т.к. $\angle BCT = \angle BCO + (\angle OCT) = 60^\circ + (180^\circ - \angle CTD) = 60^\circ + (180^\circ - 120^\circ) = 120^\circ$.
из 1) 2) 3) $\Rightarrow \triangle BOA = \triangle BCT = \triangle TDA$ по 1 пр. $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный.

~~б) известно $BC = 2$; $BC = a \Rightarrow a = 2$;~~

211005713 (U351839 M1277211)

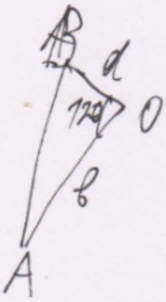
6

Чистовик

Известно, что $a=BC=2$; $b=AD=7 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=2; b=7.$

$\triangle BOA$:



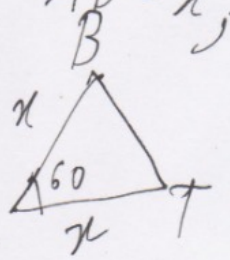
по теореме косинусов:

$AB^2 = a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ = a^2+b^2+ab \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 = a^2+b^2+a\cdot b = \underbrace{4+49}_{53}+14 = 67.$

~~S_{ABT}~~

$AB = x; x^2 = 67$

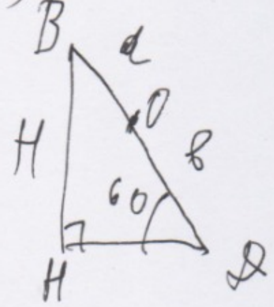


$S_{ABT} = \frac{1}{2} AB\cdot AT \sin 60$

$\Rightarrow S_{ABT} = \frac{1}{2} x^2 \sin 60 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{67\sqrt{3}}{4}.$

~~S_{ABCD}~~ ABCD – трапеция $\Rightarrow S_{ABCD} = \left(\frac{AD+BC}{2}\right)\cdot H$

$H = (a+b)\cdot \sin 60 = 9\sin 60 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$



$S_{ABCD} = \left(\frac{AD+BC}{2}\right) H = \frac{9}{2}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3}\cdot 4}{4\cdot 81\cdot\sqrt{3}} = \frac{67}{81}$

Ответ: $\frac{67}{81}$.

211005713 (U351839 M1277211)

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81$$

$$x^2+y^2=a$$
$$x^2y^2=b$$

$$\begin{cases} a^2+5b=81 \\ \dfrac{6}{a}+b=10 \end{cases}$$

$a \neq 0$

$a > 0$

$$\frac{30}{a}+5b=50$$

$$a^2-\frac{30}{a}=31 \quad |\cdot a$$

$$a^3-30=31a$$

$$a^3-31a-30=0$$

$a=-1$: $-1+31-30=0$

$$(a+1)(a^2-a-30)=0$$

$$(a+1)(a-6)(a+5)=0$$

$$a=\{6;-5;-1\}$$

$$a>0 \Rightarrow a=6$$

$$36+45=81$$

$x^2+y^2=6$

$x^2y^2=9$

1) $xy=3$

~~$(x+y)^2=12$~~

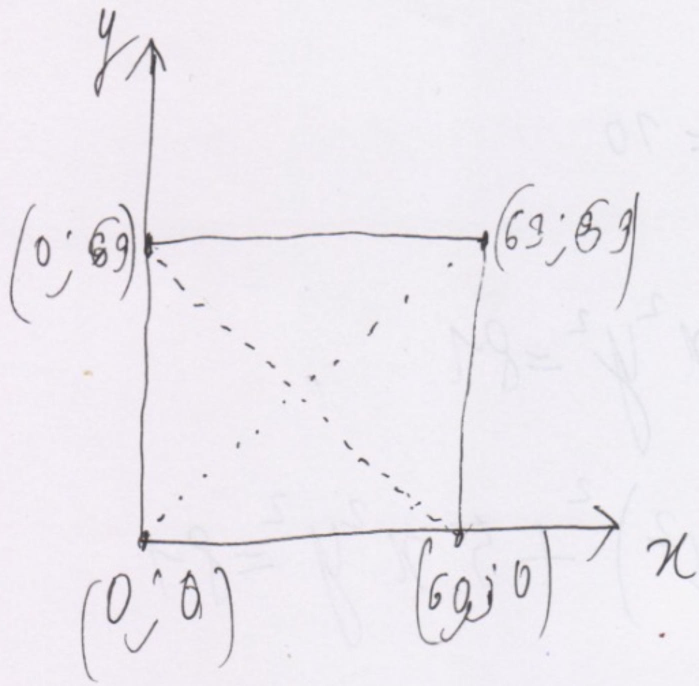
$(x-y)^2=0$

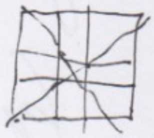
2) $xy=-3$

$(x+y)^2=0$

$\frac{6}{6}+b=10$ $\quad b=9$

211005713 (U351839 M1277211)





~~1) Их 2 точки на прямой~~

1) На главной диагонали 2 точки: C_{68}^2; на побочной столько же. C_{68}^2

2) на разных: $68 \cdot 66$

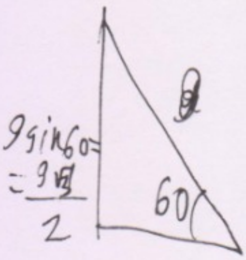
3) На главн одна точка: $68 \cdot (68^2 - 1 - 3 \cdot 67)$

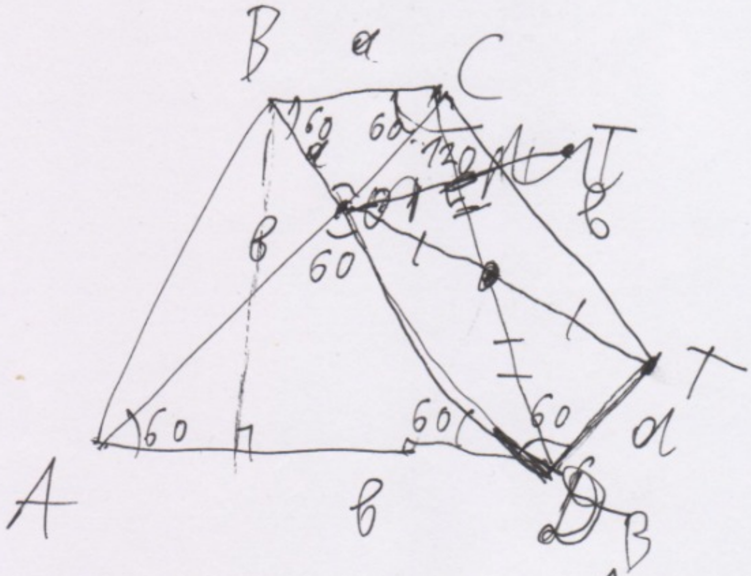
(60) Будем считать отдельно для каждого случая.
1) если оба узла на ~~прямой~~ прямой $y = x$:
~~нер~~ просто выберем 2 из 68 возможных точек, это
$C_{68}^{2} = \frac{68 \cdot 67}{2}$.

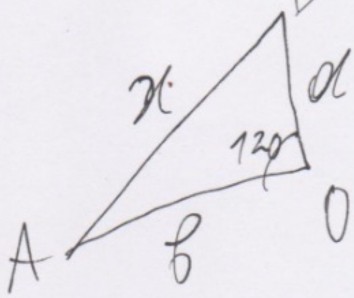
2) если оба узла на прямой $y = 69 - x$:
столько же, сколько и в 1) т.к. поворотом на 90° ~~пол~~ квадрата эта прямая перейдёт в $y = x$:
$C_{68}^{2} = \frac{68 \cdot 67}{2}$.

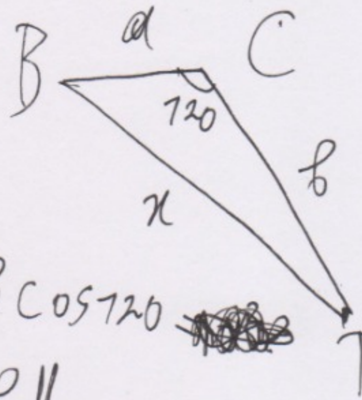
3) если узлы на разных прямых:
68 способов выбрать на прямой $x = y$;
на второй прямой при этом мы не можем выбрать 2 точки ($x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1 = x_1$) (это различные точки очевидно, т.к. $y = 69 - x$ $x + y = 69 \Rightarrow$ x, y разной чётности) $\Rightarrow$ на второй прямой 66 способов выбрать точку $\Rightarrow$ $68 \cdot 66$.

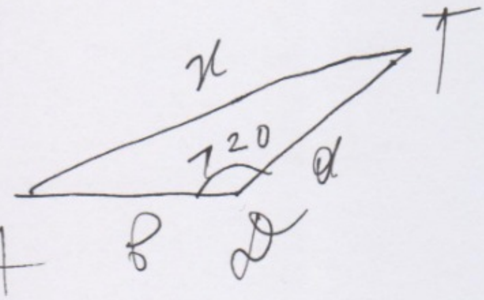
4) если одна точка на прямой $x = y$, а другая не на прямых этих.











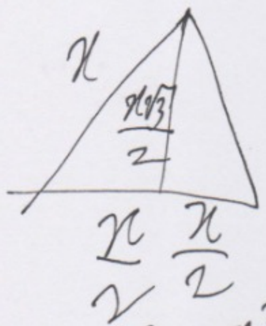
$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120$

$x^2 = a^2 + b^2 + ab$

2) $a = 2;\ b = 7$

$x^2 = \underbrace{4 + 49}_{53} + 14 = 67$

$\frac{}{67}$



$S_x = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \left(\frac{2+7}{2}\right) h = \frac{9 \cdot 9\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_x}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot 81\sqrt{3}} = \frac{67}{81}$