Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

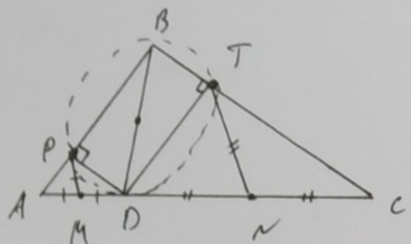
Шифр: **211005703**

ID профиля: **808016**

Вариант 10

Чистовик

№1



Решение: Т.к. BD – диаметр, то $\angle BPD = \angle DTB = \angle DTC = \angle APD = 90^\circ$

Пусть $\angle BAD = x$, а $\angle ACD = y$

Т.к. $\angle APD$ – прямоугольный, $AM = MD = PM$ и PM – медиана, пров. к гипотенузе,

Значит $\angle APM = \angle PAM = x$, а $\angle AMP = 180 - 2x$

Аналогично получим, что $\angle DNT = 2y$

Т.к. $PM \parallel TN$, то $\angle AMP = \angle DNT$, т.е. $180 - 2x = 2y$

$x + y = 90^\circ$

откуда $\angle ABC = 90^\circ$

По т. косинусов в $\triangle PMD$: $PD^2 = 2PM^2 - 2PM^2\cos(2x)$

в $\triangle DTN$: $DT^2 = 2NT^2 - 2NT^2\cos 2y$

Т.к. $\triangle PTD$ – прямоугольный (также $PT = BD$, т.к. $BTDP$ – прямоугольник),

то по т. Пифагора $PT^2 = PD^2 + DT^2$ $(\cos 2y = -\cos(2x))$

$$BD^2 = 2PM^2 - 2PM^2\cos 2x + 2NT^2 - 2NT^2\cos 2y$$

$$BD^2 - 2PM^2 - 2NT^2 = \cos 2x(2NT^2 - 2PM^2)$$

$$\cos 2x = \frac{\cancel{2NT^2}\ BD^2 - 2PM^2 - 2NT^2}{2NT^2 - 2PM^2}$$

$$\cos 2x = \frac{5 - 2 - \frac{9}{2}}{\frac{9}{2} - 2} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}$$

x – острый, т.к. $\cos x > 0$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Тогда $PB = DT = \sin x \cdot DC$ $\quad PB = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$PD = BT = \cos x \cdot AD$ $\quad BT = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$AP = \sin x \cdot AD$ $\quad AP = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$TC = \cos x \cdot DC$ $\quad TC = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$S = \frac{1}{2}(AP + PB)(BT + TC)$

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = 5$

Ответ: а) 90° б) 5

Чистовик

ОДЗ: $x+3 \geq 0$, $7-x \geq 0$ $\Rightarrow -3 \leq x \leq 7$

№2 $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

Пусть $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = t$,

тогда $2\sqrt{21+4x-x^2} = 10 - t^2$

$t + 4 = 10 - t^2$

$t^2 + t - 6 = 0$

$t_1 = -3$

$t_2 = 2$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$

$x+3 = 4+7-x+4\sqrt{7-x}$

$2x-8 = 4\sqrt{7-x}$

$x-4 = 2\sqrt{7-x}$

$x^2-8x+16 = 28-4x$

$x^2-4x-12=0$

$x_1 = 6$

$x_2 = -2$

$x_1, x_2 \in [-3; 7]$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = -3$

$x+3 = 9+7-x-6\sqrt{7-x}$

$2x-13 = -6\sqrt{7-x}$

$36(7-x) = 169-52x+4x^2$

$252-36x = 169-52x+4x^2$

$4x^2-16x-83=0$

$\frac{D}{4} = 64+332 = 396$

$x_3 = \frac{8 \pm \sqrt{396}}{4}$ $5,57$ $x_3 > 5$

$x_4 = \frac{8-\sqrt{396}}{4}$ $x_4 \in [-3; 7]$

Ответ: $x_1 = 6$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{8+\sqrt{396}}{4}$; $x_4 = \frac{8-\sqrt{396}}{4}$

211005703 (U808016 M1277980)

Чистовик

№3 $5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$

$(2x+2a-y)^2 + (2x+a)^2 = 0$

$\begin{cases} 2x+2a-y=0 \\ 2x+a=0 \end{cases} \Rightarrow y=-4x$ это ГМТ всех таких точек (здесь $a=-2x$)

$ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$

абсцисса верш. – a, ордината – $\frac{3}{a}$,

зн. ГМТ таких точек $y = \frac{3}{x}$ (здесь $a = x$)

$\frac{3}{x} = 2x-5$

$2x^2 - 5x - 3$

$D = 25 + 24$

$x_1 = \frac{5+7}{4} = 3$

$x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$

$-4x = 2x-5$

$6x = 5$

$x_3 = \frac{5}{6}$

Значит

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} 0<x<x_1 \\ x<x_2 \\ x<x_3 \end{cases} \\ &\begin{cases} x>x_1 \\ x_2<x<0 \\ x_4>x_3 \end{cases} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} 0<a<3 \\ a<-\frac{1}{2} \\ -\frac{a}{2}<\frac{5}{6} \end{cases} \\ &\begin{cases} a>3 \\ -\frac{1}{2}<a<0 \\ -\frac{a}{2}>\frac{5}{6} \end{cases} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &a \in \left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup (0;3) \\ &a \in \varnothing \end{aligned}\right.$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup (0;3)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005703**

ID профиля: **808016**

Вариант 10

Чистовик

Чистовик

№4. $\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$ Пусть $x^2+y^2=t$, а $x^2y^2=k$, тогда исходная система ~~примет~~ ~~вид~~ будет выглядеть: $\begin{cases} \frac{6}{t}+k=10 \\ t^2+5k=81 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow k=10-\frac{6}{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2+5(10-\frac{6}{t})=81$

$t^2+50-\frac{30}{t}=81$

$t^2-\frac{30}{t}-31=0$

$t^3-31t-30=0$

Очевидно, что $t_1=-1$ – решение

$(t+1)(t^2-t-30)=0$

$(t+1)(t-6)(t+5)=0$

Но т.к. $x^2+y^2\geq0$, то $t=6$, $k=9$

Итого мы перешли к новой системе

$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases} \Rightarrow x^2(6-x^2)=9$

$x^4-6x^2+9=0$

$(x^2-3)^2=0$

$x^2=3$

$x=\sqrt{3}$ или $x=-\sqrt{3}$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$y=\pm\sqrt{3} \qquad y=\pm\sqrt{3}$

Решением являются четыре пары: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

1

211005703 (U808016 M1277981)

Чистовик

Чистовик

№5 Всего в ~~таблице~~ сетке 68^2 узлов. Общее кол-во способов выбрать 2:

$$\frac{68^2(68^2-1)}{2}$$

Посчитаем сколько пар не подходит и вычтем из общего кол-ва. Это и будет ответ на задачу

Всего на прямых $y=x$ и $y=69-x$ в сетке лежит $68\cdot 2$ узлов. Для каждого из них есть $67\cdot 2$ ~~узла~~ таких узла, чтобы полученная прямая была параллельна одной из осей. ~~Ко...~~ Значит всего таких пар: $68\cdot 2\cdot 67\cdot 2$, но пары, в которых оба узла лежат на одной из прямых, мы посчитали дважды, т.е. нужно вычесть их кол-во $(68\cdot 2)$

Итого: $68\cdot 2\cdot 67\cdot 2 - 68\cdot 2 = 136\cdot 134 - 136 = 136\cdot 133 = 18088$ лишних прямых (пар).

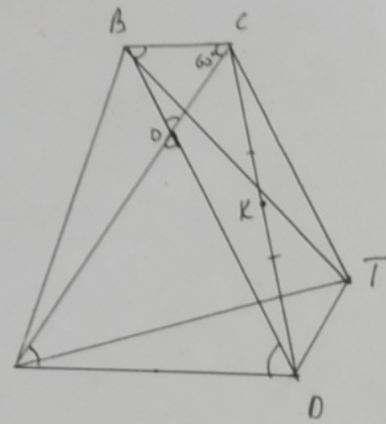
$$\frac{68^2(68^2-1)}{2} - 18088 = \cancel{82515 4376}\ 10688376 - 18088 = \cancel{825136288}\ 10670288$$

Ответ: ~~825136288~~ 10670288 (десять миллионов шестьсот семьдесят тысяч двести восемьдесят восемь)

2

Чистовик

№6



Т.к. $\angle BCA = \angle CAD = 60°$, то $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ - трапеция (очевидно, он не может быть параллелограммом)

$\angle AOB = \angle COD = 120°$
$BO = CO$ и $AO = OD$ $\Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD \Rightarrow AB = CD \Rightarrow$
$\Rightarrow ABCD$ - равнобедренная трапеция

Из условия (Пусть К - середина CD) $KO = KT$ и $KC = KD$

Это значит, что OCTD - параллелограмм

$AO = OD = CT$ (т.к. $\triangle AOD$ - правильный, ~~ABCT~~ DOCT - параллелограмм)

$BO = BC$

~~$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = \angle BCO$~~ т.к. BCTD - параллелограмм, то $OD \parallel CT \Rightarrow BD \parallel CT$,

зн. $\angle OCT = \angle BOC = 60°$, зн. $\angle BCT = 120°$, следовательно $\triangle BOA = \triangle BCT$ по двум сторонам и углу между ними, значит $BA = BT$

В OCTD $\angle BOT = \angle OCT = 60° \Rightarrow \angle ADT = 120°$

$DT = OC = BO$ и $AD = AO$, значит $\triangle ATD = \triangle ABO$ по двум сторонам и углу между ними, значит $AT = AB = BT \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный

Пункт а) доказан

По т. косинусов в $\triangle ABO$: $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos 120° = BC^2 + AD^2 - 2 \cdot BC \cdot AD \cdot \cos 120°$

$AB^2 = 4 + 49 + 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 53 + 14 = 67$

$S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{ABT} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

Очевидно, высота трапеции ABCD равна сумме высот $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$

Пусть эта высота - это H, $H = \frac{BC\sqrt{3}}{2} + \frac{AD\sqrt{3}}{2}$ $H = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot H$

$S_{ABCD} = \frac{2+7}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{67\sqrt{3}}{4}}{\frac{81\sqrt{3}}{4}} = \frac{67}{81}$

Ответ: б) $\frac{67}{81}$

3

211005703 (U808016 M1277981)