Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005676**

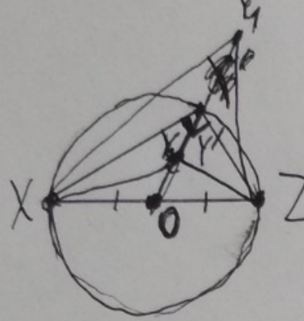
ID профиля: **172048**

Вариант 10

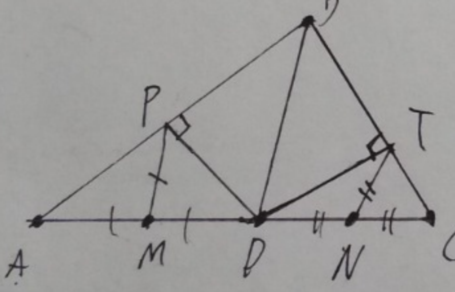
N-1.

Будем пользоваться леммой: ~~в п~~ медиана, проведённая из прямого угла вдвое меньше стороны треуг., противоположной углу

Д-во: Пусть $\angle XYZ = 90°$. Построим окр-ть ω, ~~описанную около $\triangle XYZ$. Заметим, что при~~



~~Y отн. середины что~~ на XZ как на диаметре; известно, что угол, опирающийся на диаметр, прямой; Допустим, $Y \notin \omega$; тогда, пусть пересеч. луча OY с ω будет Y'; $\angle XY'Z = 90$; а $\angle XYZ = \angle XYO + \angle OYZ$, $\angle XY'Z = \angle XY'O + \angle OY'Z$, O - середина XZ; но Y либо вне круга, $\angle XYO < \angle XY'O$, $\angle OYZ < \angle OY'Z$?!, либо внутри, $\angle XYO > \angle XY'O$, $\angle OYZ > \angle OY'Z$?!



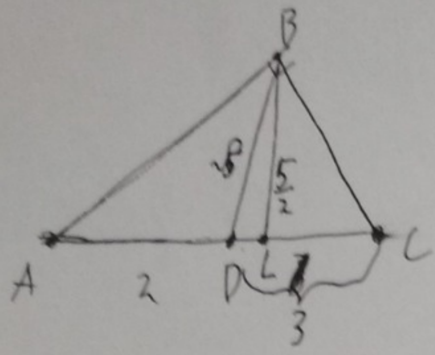
$\angle BPD = 90° = \angle BTD$ как опир. на диаметр; $\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90°$; по лемме ~~AM=~~ $PM = MD$, $NT = NC = ND$; из равноб. $\triangle MPD$ и $\triangle TNC \Rightarrow \angle MPD = \angle MDP$; $\angle NTC = \angle NCT$; из $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD = \angle TNC$; из того, что суммы углов треуг. MPD и TNC равны $180° \Rightarrow \angle MDP = \angle NCT \Rightarrow PD \parallel CT$; $\Rightarrow \angle DPB + \angle PBT = 180°$, $\angle PBT = 180° - 90° = 90°$ (как внутр. одностор.) $\Rightarrow \angle ABC = 90°$

$(\angle PMD + \angle MDP + \angle DPM = \angle TNC + \angle CTN + \angle NCT$; $\angle PMD + 2\angle MPD = \angle TNC + 2\angle NCT \Rightarrow \angle MPD = \angle NCT)$

См. стр. 2.

Чистовик 1

№1 (прод.)



Из леммы, (см. рав-ва выше)

$DN = NC = \frac{3}{2}$, $AM = MD = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = 2$, $CD = 3$; Рассмотрим

также т. L — середину AC; $DL = \frac{1}{2}$; BL по лемме равно

$AL = LC = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ ($DL = \frac{1}{2}$ из тех же соображ.); по т. косин.

для $\triangle LDB$: $\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\angle DLB = (\sqrt{5})^2$, откуда $25 + 1 - 10\cos\angle DLB = 20$,

$\cos\angle DLB = \frac{3}{5}$, $\sin\angle DLB = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$; а значит, высота провед.

из B в $\triangle ABC$ равна $\frac{5}{2} \cdot \sin\angle DLB = 2$; $S_{ABC} = \frac{AC \cdot \overset{\text{высота}}{2}}{2} = 5$

Ответы: $90°$; 5

Чистовик 2

N-2.

Заметим, что корни $\sqrt{x+3}$ и $\sqrt{7-x}$ определены (есть в условии)

и $\sqrt{21+4x-x^2}=\sqrt{(7-x)(x+3)} \Rightarrow \sqrt{21+4x-x^2}=\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x+3}$; пусть $u=\sqrt{x+3}$,

$v=\sqrt{7-x}$ и исходное урав. принимает вид: $u-v+4=2uv$;

еще $u^2+v^2=(x+3)+(7-x)=10$, т. е. $\begin{cases} u^2+v^2=10 \\ 2uv=u-v+4 \end{cases}$, вычитая имеем:

$u^2-2uv+v^2=v-u+10-4 \Leftrightarrow (v-u)^2=(v-u)+6$; пусть $v-u=t$; $t^2-t-6=0$

$(t-3)(t+2)=0$, т. е. или 1) $v-u=-2$; $u^2+(u-2)^2=10 \Leftrightarrow 2u^2-4u-6=0 \Leftrightarrow$

$(u-3)(u+1)=0$; заметим также, что $u>0$ ($u=\sqrt{x+3}$), т. е. если

$t=-2$, то $u=3$, $x=$ $u^2-3=6$; $\sqrt{6+3}-\sqrt{7-6}+4=3-1+4=6$; $2\sqrt{21+4\cdot6-6\cdot6}=$

$=2\sqrt{21+24-36}=2\sqrt{9}=6$, т. е. $x=6$ - корень; или 2) $v-u=3$;

$u^2+(u+3)^2=10$; $2u^2+6u-1=0$; $u=\frac{-6\pm\sqrt{6^2+8}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{2}$; $\frac{-3-\sqrt{11}}{2}<0$, т. е. при $t=3$,

$u=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$; $x=u^2-3=\frac{9+11-6\sqrt{11}}{4}-3=5-3-\frac{3}{2}\sqrt{11}=2-\frac{3}{2}\sqrt{11}$; $x\geqslant-3$

$2-\frac{3}{2}\sqrt{11} \vee -3$ $\quad$ $10 \vee 3\sqrt{11}$ $\quad$ ∃!x.o. для данного x все условия выполнены;

$5 \vee \frac{3}{2}\sqrt{11}$ $\quad$ $100 > 99 \rightarrow x\geqslant-3$

Ответ: $x_1=6$; $x_2=2-\frac{3}{2}\sqrt{11}$

Чистовик 3

211005676 (U172048 M1277292)

N-3.

Найдём коорд. т. A: пусть $u=\frac{y}{a}, v=\frac{x}{a}$:

$5-4u+8v^2-4uv+u^2+12v=0$

$u^2-4(v+1)u+5+8v^2+12v=0$

$u=\frac{4(v+1)\pm\sqrt{16(v^2+2v+1)-4(5+12v+8v^2)}}{2}=\frac{4(v+1)\pm\sqrt{-16v^2-16v-4}}{2}=$

$=\frac{4(v+1)\pm\sqrt{-(4v+2)^2}}{2}$; выражение под корнем не превосходит нуля, а корень определён (т. A сущест.), значит,

$-(4v+2)^2=0 \Rightarrow v=-\frac{1}{2}$; $u=\frac{4(v+1)\pm 0}{2}=2\cdot\frac{1}{2}=1$, т. е.

$x_A=-\frac{a}{2}$; $y_A=a$; Теперь B: $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$y=(x^2-2ax+a^2)+\frac{3}{a}=(x-a)^2+\frac{3}{a}$; $x_B=a$, т. к. в этой т. y наименьший ($(x-a)^2\geq 0$, $\frac{3}{a}$ – const); $y_B=\frac{3}{a}$; Вспомним, что полупл-ти, на которые делит пл-ть прямая $2x-y-5$ отличаются знаками выраж. $2x-y-5$, т. е. если A и B удов. усл., то $2x_A-y_A-5$ и $2x_B-y_B-5$ имеют один знак (д-во: пусть т. лежит в правой полупл.: проведём горизонт. прям. до пересеч. с $2x-y-5$; т. к. ~~она~~ т. перес. левее исходной, то для неё $2x-y-5$ будет меньше, но с другой стороны – равно 0, т. е. во всех т. правой полупл. $2x-y-5>0$, аналог., для левой – $2x-y-5<0$

см. стр. 5.

Чистовик 4

N-3 (прод.)

$2x_A - y_A - 5 = -a - a - 5 = -2a - 5;\ 2x_B - y_B - 5 = 2a - \frac{3}{a} - 5;$

т.е. $(-2a-5)(2a-\frac{3}{a}-5) > 0;\ (2a+5)(2a-\frac{3}{a}-5) < 0;\ (2+\frac{5}{a})(2a^2-5a-3) < 0;$

$2a^2-5a-3=0 \Leftrightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{25+4\cdot 6}}{4}=\frac{5\pm 7}{4};\ (2+\frac{5}{a})(a-3)(2a+1)<0;\ 2+\frac{5}{a}=0 \Rightarrow$

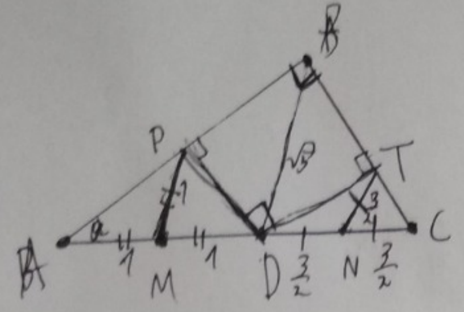
$\Rightarrow a=-\frac{5}{2}$; выраж. не опред. при $a=0$;

$+ \quad -\frac{5}{2} \quad - \quad -\frac{1}{2} \quad + \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$

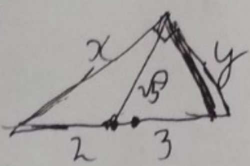
~~пользуясь методом интервалов~~ устанавливаем, что в каждой точке $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 3$ выраж. меняет знак, получаем, что требуемые значения a – от $-\frac{5}{2}$ до $-\frac{1}{2}$ и от 0 до 3; если $a=3$ или $a=-\frac{1}{2}$, или $a=-\frac{5}{2}$, то A или B лежат на прямой; a не м.б. равно 0 (y_B не определён), $\cancel{a \neq -\frac{5}{2}}$

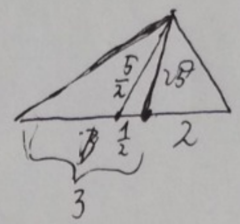
Ответ: $a \in (-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}) \cup (0, 3)$

Чистовик 5

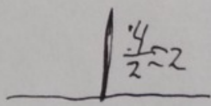


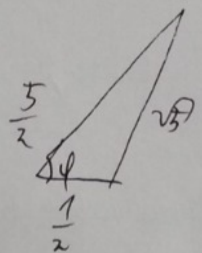
$MP=1,\ NT=\frac{3}{2},\ BD=\sqrt{5}$





$x^2+y^2=25$





1) $t_2,\ x=6$

2) $t_1,$

$\frac{2\cdot 5}{2}=5$

$\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\varphi=5$

$7\geq x\geq -3$

$25+1-10\cos\varphi=20$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\cos\varphi=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$\sin\varphi=\frac{4}{5}$

$x^2-4x-21=(x-7)(x+3)$

$u=\sqrt{x+3}$

$v=\sqrt{7-x}$

$\cancel{x=6}$

$\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$\begin{cases} u-v+4=2uv \\ u^2+v^2=10 \end{cases}$

$u^2+v^2-2uv=6+(v-u)$

$u^2+(u+3)^2=10$

$(v-u)^2=6+(v-u)$

$2u^2+6u+9=10$

$2u^2-4u+4-6=10$

$t^2-t-6=0$

$t_1=3$

$t_2=-2$

$2u^2+6u+1=0$

$(t-3)(t+2)=0$

$u^2+(u-2)^2=10$

$u=3;\ v=1$

$u=-1,\ v=-3$?!

$\cancel{u=\frac{-6\pm\sqrt{36-8}}{4}=\frac{-6\pm2\sqrt{7}}{4}=}$

$=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}$

211005676 (U172048 M1277292)

$ax^2 - 2a^2x - a^3 + a^2 + 3 = 0$

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a^2}$

$(x-a)^2 + \frac{3}{a^2}$

$x_B = a$

$y_B = \frac{3}{a^2}$

$x_A = -\frac{a}{2}$

$y_B = a$

$2x - y - 5$

$2a - \frac{3}{a^2} - 5$

$-a - a - 5$

$\left(2a - \frac{3}{a^2} - 5\right)(-2a - 5)$

Часть 2

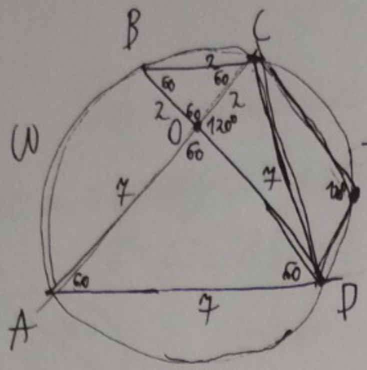
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005676**

ID профиля: **172048**

Вариант 10

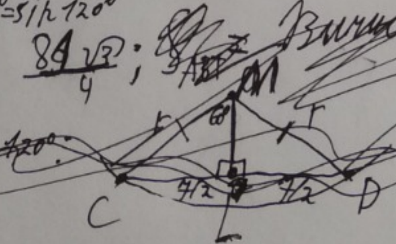
N-6.



Пусть ω – ок-ть, описанная около △BCD; Тогда ◡$CD = 120° = 2\cdot\angle CBD$; $\angle CAD = 60°$; из нумерации вершин ABCD и его выпуклости ⇒ A и B лежат по одну сторону от прямой CD; $\angle CAD = \angle CBD = 60°$ (это следует из того, что все углы равносторонних треугольников, в частности AOD и BOC равны 60°), т. е. $A \in \omega$; ~~с другой стороны~~ в ту же сторону находится т. O, которая при симметрии, отн. пр. на CD переходит в т. в другой полуплоск. (отн. CD). Заметим, что при той же симметрии, $C \to D$, $D \to C$, симметрия сохраняет углы и расстояния ⇒ $\triangle DTC = \triangle COD$; $\angle CTD = \angle COD = 180° - \angle AOD = 180° - 60° = 120°$; $\angle CBD + \angle CTD = 180° \Rightarrow T \in \omega$. ◡$BC = 2\cdot\angle BDC = 2\cdot\angle ODC = 2\cdot\angle DCT =$ ◡DT; ◡$AT =$ ◡$AD +$ ◡$TD =$ ◡$AD +$ ◡$BC = 2\cdot 60°$ как
◡$CT =$ ◡$CDT = 2\cdot\angle DCA =$ ◡AD; ◡$AB = 2\cdot\angle ADB = 2\cdot 60° = 120°$,
угол между прямыми BD и CA; (все его стороны стяг. одинак. дуги в ω)
◡$BT = 360° - 2\cdot 120° = 120°$, т.о. ABT равносторонний. Площадь ABCD вычислим как $S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{DOA} = \frac{7\cdot 2\sin 120°}{2} + \frac{2\cdot 2\sin 60°}{2} + \frac{7\cdot 2\sin 120°}{2} + \frac{7\cdot 7\sin 60°}{2} =$

$\sin 60° = \sin 120°$

$= \frac{(7+2)^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$; ~~Вычислим радиус ω: хорда CD = 7 стягивает дугу 120°.~~ ~~Рассмотрим~~



см. стр. 2.

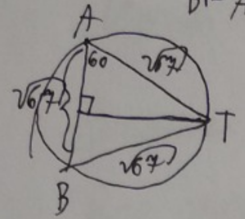
Чистовик 1

N-6 (прод.)

Рассмотрим $\triangle AOB$: $BO=2$; $AO=7$; $\angle AOB = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$;

по т. косинусов для него: $AB^2 = 7^2+2^2-2\cdot 7\cdot 2\cdot \cos 120^\circ = 49+4+14=67$;

$BT=AT=AB=\sqrt{67}$; Высота опущ. из T к AB есть $\sqrt{67}\cdot \sin 60^\circ =$



$= \sqrt{67}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABT} = \dfrac{AB\cdot\sqrt{67}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{67\sqrt{3}}{4}$;

$S_{ABT}/S_{ABCD} = \dfrac{67\sqrt{3}}{4} \Big/ \dfrac{81\sqrt{3}}{4} = \dfrac{67}{81}$

Ответ: доказано; $\frac{67}{81}$

Чистовик 2

№5.

Выбрать узел $\Leftrightarrow$ выбрать упорядоченную пару чисел из $\{1, 2, \ldots, 68\}$; Без огранич. общности, первый узел лежит на прямой $y=x$ или $y=69-x$, т.е. $y_1=x_1$ или $y_1=69-x_1$;

Заметим, что тогда ~~число~~ способы разместить второй узел - все способы выбрать узел из квадрата 68×68 (с границами), с вычеркнутыми 1 строкой и 1 столбцом, т.е. при подсчёте <u>кол-ва</u> способов их расположение не важно; передвинем их на границу квадрата, и будем иметь целый квадрат $67\cdot67$, в котором есть $67\cdot67$ способов выбрать узел (67 способов независимо выбрать координаты); кол-во же способов расположить первый узел есть $2\cdot68$: для каждого $x\in\{1,\ldots,68\}$ подойдут $y_A=x$ и $y_B=69-x$; из $x, y\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x и $69-x$ имеют разную чётность (иначе их сумма была бы чётна), т.е. y_A и y_B всегда различны. При подсчёте мы дважды учли такие положения, при которых оба узла лежат на этих прямых, ~~это~~ их число надо вычесть; таких точек, как мы выяснили, $2\cdot68$ $\Rightarrow$ число способов выбрать две т.к. вторая прямая (пересекает в 2 т. прямые парал. осям и проход. ч-з 1 узел и сам узел не учитываем, всего -3 т.

$\frac{2\cdot68(2\cdot68-3)}{2}=68\cdot(2\cdot68-3)$. Значит, ответ будет, $2\cdot68\cdot67^2-68(2\cdot68-3)=$

$=68(2\cdot67^2-2\cdot68+3)=$

Ответ: ~~$68(2\cdot67^2-2\cdot68+1)=601324$~~ $68(2\cdot67^2-2\cdot68+3)=601460$

Чистовик 3

N-4.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Пусть $x^2=a$, $y^2=b$; $a, b \geq 0$;

$$\begin{cases} \frac{6}{a+b} + ab = 10 \\ a^2+b^2+7ab=81 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6\cdot 5}{a+b} + 5ab = 50 \\ (a+b)^2+5ab=81, \end{cases}$$

вычитая, $(a+b)^2 - \frac{30}{a+b} = 31$; ~~...~~ $a+b \neq 0$, т.к. есть в знаменателе исх. уравнения; пусть $s=a+b$;

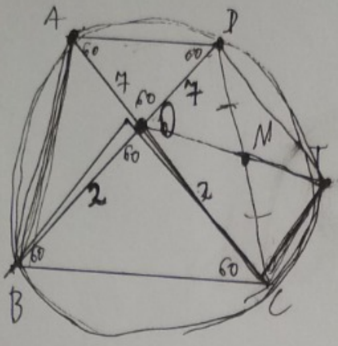
$s^3-31s-30=0 \Leftrightarrow (s+1)(s+5)(s-6)=0$; $s=a+b \geq 0+0 \geq 0$; $s+1>0$, $s+5>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow s=6$; тогда $\frac{6}{6}+ab=10$; $\begin{cases} ab=9 \\ a+b=6 \end{cases}$ $(a-b)^2 = a^2+2ab+b^2-4ab =$

$= (a+b)^2 - 4ab = 6^2 - 4\cdot 9 = 0 \Rightarrow a=b=\frac{6}{2}=3$; $x=y=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$\boxed{\text{Чистовик 4}}$



$\frac{2\cdot 7\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2\cdot 7\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

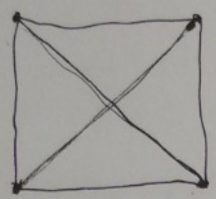
$\frac{2\cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$

$\frac{7\cdot 7\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{49}{4}\sqrt{3}$

$\left(\frac{7}{2}+1\right)^2\sqrt{3}$

$K(2(k-1)^2-2k+3)$

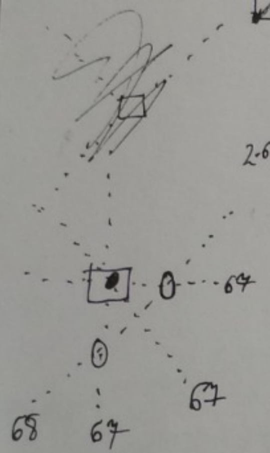
$2(2\cdot 1-2\cdot 2+3)=2$



$y \neq x$

x_1, x_2, y_1, y_2:

$x_1 = y_1$ или $x_2 = y_2$ или $x_1+y_1=69$ или $x_2+y_2=69$



68^2

$2\cdot 68\left(+\frac{2\cdot 68-1}{2}\right)$

$1, 2, \dots, 68$ $\quad 2\cdot 68+$

$68(2\cdot 67^2-2\cdot 67-1) = 68(2\cdot 67\cdot 66-1)$

$\times\, 67$; $\quad 469$; $\quad 402$; $\quad 4489$

$\cdot 67 \cdot 66$; $\quad 402$; $\quad 402$; $\quad 4422$

8893×68; $\quad 70744$; $\quad 53058$

$68^2-2\cdot 68\cdot 2\cdot 67+\frac{2\cdot 68-1}{2} = 67^2+1+\frac{2\cdot 68-1}{2} < 2\cdot 68 = 67^2-\frac{2\cdot 68-1}{2}$

601324

$+\ 601324$; $\quad 136$; $\quad 601460$ $\quad 13$

68; $\quad 68$; $\quad 136$

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{a+b}+ab=10 \\ a^2+b^2+7ab=81=(a+b)^2+5ab \end{cases}$$

$\frac{30}{a+b}+5ab=50$

$31=(a+b)^2-\frac{30}{a+b}$

~~N 6 (прод.)~~

$\triangle MCD$, где M – центр ω; он равнобедренный ($MC=CD$ как радиусы), а потому, его медиана – высота и биссектриса; пусть L – середина CD; $\angle CML = \frac{\angle CMD}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$; $\angle MLC = 90^\circ$ ($ML \perp CD$) $\Rightarrow$ $CL = \frac{7}{2}$, $MC = \frac{7}{2} / \sin 60^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

~~Не имеет значения, как располагается равносторонний треугольник, вписанный в заданную ок-ть ω (все они отличаются поворотом, поэтому вместо ATB рассмотрим~~

$\cancel{31 = S^3 - 30}$

$31S = S^3 - 30$

$S^3 - 31S - 30 = 0$

$\cancel{S^3 - 31S - 30 \mid S+1}$

$\cancel{S^2}$

$$\begin{array}{l|l} S^3 + 0\cdot S^2 - 31S - 30 & S+1 \\ \hline S^3 + 1\cdot S^2 & S^2 - S - 30 \\ \quad -S^2 - S & \\ \qquad -30S - 30 & \end{array}$$

$S = -1 ;\ -5 ;\ 6$

$S = 6$

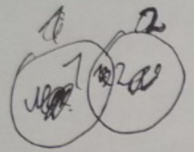
$\cancel{ab=9}$

$a+b=6$

$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 = 0$

$(S-6)(S+5)$

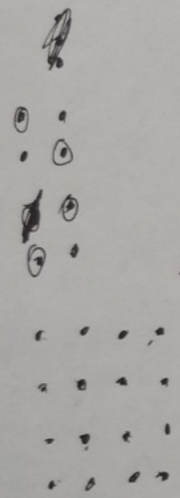
Черновик



$3(\cancel{2\cdot 2^2-2\cdot 3+1})=9$

$2(2\cdot 1^2-2\cdot 2+1)$

$4(2\cdot 3^2-2\cdot 4+1)$



$2\cdot 2\cdot 1^2$

Черновик