Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

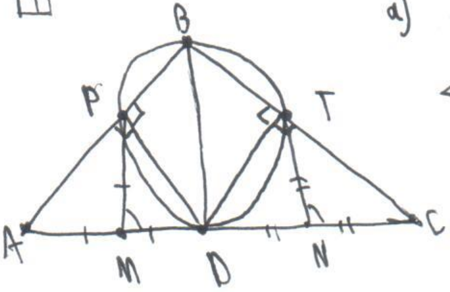
Шифр: **211005634**

ID профиля: **105552**

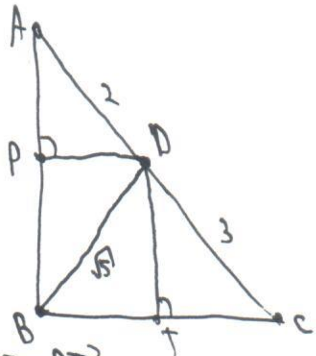
Вариант 10

Чистовик | Лист 1 | Математика, 10 класс, Вариант 10

1



а) $\diamond PBTD$ вписан, $\Rightarrow \angle APD = 180^\circ - \angle BTD$. Так как BD – диаметр, то $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ как смотрящие на него, $\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90^\circ$.
Тогда PM и TN – медианы в прямоугольных треугольниках APD и DTC соответственно, $\Rightarrow AM = MP = MD$ и $DN = NT = NC$.
$PM \parallel TN$, $\Rightarrow \angle PMC = \angle TNC$, $\Rightarrow \angle TCN = \angle PDM$. Также $\angle PMA = \angle TNA = 180^\circ - \angle PMD$, $\Rightarrow \angle TDN = \angle PAM = 90^\circ - \angle PDM$. Тогда $\angle PDT = 180^\circ - (\angle PDM + \angle TDN) = 90^\circ$, $\Rightarrow \boxed{\angle ABC = 90^\circ}$ и $\diamond PBTD$ – прямоугольник.



б) $AC = AM + MD + DN + NC = 2PM + 2TN = 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 5$.
$BD = \sqrt{5}$.
ΔCDT подобен $\angle CAB$, $\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{CT}{CT + BT} = \frac{\sqrt{9 - DT^2}}{BT + \sqrt{9 - DT^2}}$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow 3BT = 2\sqrt{9 - DT^2}$, $\Rightarrow 9BT^2 = 4 \cdot (9 - DT^2)$.
Также по теореме Пифагора для ΔBDT: $BT^2 + DT^2 = 5$, $\Rightarrow BT^2 = 5 - DT^2$
$45 - 9DT^2 = 36 - 4DT^2$, $\Rightarrow 5DT^2 = 9$, $\Rightarrow DT = \frac{3}{\sqrt{5}} = PB$, $\Rightarrow BT = \sqrt{5 - \frac{9}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = DP$
Также $CT = \sqrt{9 - DT^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ и $AP = \sqrt{4 - DP^2} = \sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB = AP + PB = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ и $BC = BT + CT = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$. Значит, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = \boxed{5}$

Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$; б) $S_{ABC} = 5$.

Чистовик

Лист 2

математика, 10 класс
Вариант 10

2) $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

Пусть $a = \sqrt{x+3}$ и $b = \sqrt{7-x}$. Тогда:

$$\begin{cases} a - b + 4 = 2ab \quad (1) \\ a^2 = 10 - b^2 = x+3 \end{cases} \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 10 \quad (2)$$

(1)+(2): $a^2 + b^2 + a - b + 4 = 2ab + 10$

$(a-b)^2 + a - b - 6 = 0$

$(a-b-2)(a-b+3) = 0 \Rightarrow a-b = -3; 2 \Rightarrow a = b-3; b+2 \quad (3)$

(3) → (2): $\left[\begin{array}{l} (b-3)^2 + b^2 = 10 \\ (b+2)^2 + b^2 = 10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2b^2 - 6b - 1 = 0 \quad D = 36 + 8 = 44 \\ 2b^2 + 4b - 6 = 2(b^2 + 2b - 3) = 2(b+3)(b-1) = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} b = \frac{6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = 3 + \sqrt{11}; 3 - \sqrt{11} \\ b = -3; 1 \end{array}\right.$

$b = -3$ и $3 - \sqrt{11}$ не подходят, т.к. $b \geq 0$

$b = 1; 3 + \sqrt{11} = \sqrt{7-x}$

$7 - x = 1; 20 + 6\sqrt{11} \Rightarrow x = 6; -13 - 6\sqrt{11}$

Также должно выполняться ОДЗ для $\sqrt{x+3}$: $x \geq -3$. Под это условие подходит только $\boxed{x = 6}$.

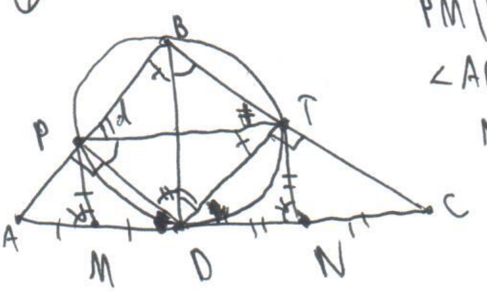
Ответ: $x = 6$

Черновик

лист 3

математика, 10 класс
Вариант 10

1)



$PM \parallel TN$

$\angle ABC - ?$

$MP = 1,\ NT = \frac{3}{2},\ BD = \sqrt{5}$

$S_{ABC} - ?$

$PBTD$ вписан $\Rightarrow \angle APD = 180 - \angle DTB = 90$. $\angle CTD = 90$

Тогда $AM = PM = MD$ и $DN = TN = CN$

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle AMP = \angle ANT \Rightarrow \angle PAM = \angle TDC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADP = 90° - \angle PAD = 90° - \angle TDC \Rightarrow \angle PDT = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\angle ABC = 90°}$ $\Rightarrow PBTD$ - прямоуг.

$\begin{cases} BT \parallel PD \\ PB \parallel BT \end{cases}$

$AC = 2 \cdot PM + 2 \cdot TN = 5$

$BD^2 = 5 = BT^2 + DT^2$

$\angle CDT \sim \angle CAB$:

$\frac{3}{5} = \frac{\sqrt{9 - DT^2}}{BT + \sqrt{9 - DT^2}}$

$3BT = 2\sqrt{9 - DT^2}$

$9 \cdot (5 - DT^2) = 9BT^2 = 4 \cdot (9 - DT^2)$

$45 - 9DT^2 = 36 - 4DT^2$

$9 = 5DT^2 \Rightarrow DT = \frac{3}{\sqrt{5}} = PB$

$BT = \sqrt{5 - DT^2} = \sqrt{5 - \frac{9}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = DP$

$CT = \sqrt{9 - DT^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$AP = \sqrt{4 - DP^2} = \sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$AB = AP + PB = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$; $BC = BT + CT = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \boxed{5}$

2)

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21 + 4x - x^2}$

$a = \sqrt{x+3}$, $b = \sqrt{7-x}$

$\begin{cases} a - b + 4 = 2ab \\ a^2 = 10 - b^2 \end{cases}$ $\Rightarrow (a-b)^2 + (a-b) + 4 = 10$

$(a-b)^2 + (a-b) - 6 = 0$

$a - b = 2; -3$

$a = b + 2; b - 3$

$\left[\begin{array}{l} 10 - b^2 = b^2 + 4b + 4 \\ 10 - b^2 = b^2 - 6b + 9 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2b^2 + 4b - 6 = 2(b^2 + 2b - 3) = 2(b+3)(b-1) = 0 \Rightarrow b = \cancel{-3}; 1 \Rightarrow a = 3 \\ 2b^2 - 6b - 1 = 0 \end{array}\right.$

$D = 36 + 8 = 44$ $\Rightarrow b = \frac{6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = \frac{3 + \sqrt{11}}{2}; \cancel{\frac{3 - \sqrt{11}}{2}}$ $\Rightarrow a = \frac{\sqrt{11} - 3}{2}$

$\sqrt{7 - x} = b = 1; \frac{3 + \sqrt{11}}{2}$

$7 - x = 1; \frac{20 + 6\sqrt{11}}{4} = \frac{10 + 3\sqrt{11}}{2}$

$x = 6; \frac{4 - 3\sqrt{11}}{2}$

подходит под ОДЗ $x + 3 \geq 0$

$\left(\frac{10 - 3\sqrt{11}}{2} > 0\right.$, т.к. $\left.10^2 = 100 > 99 = (3\sqrt{11})^2\right)$

Черновик

лист 4

Математика, 10 класс
Вариант 10

3

A: $5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$(2a-y)^2+(2x-y)^2-y^2+(3a+2x)^2-8a^2=0$

B: $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$ (вершина)

A и B по одну сторону от $2x-y=5$ $a-?$

A: $10a^2-8ay+16x^2-8xy+2y^2+24ax=0$

$(4a-y)^2+(4x-y)^2+$

B: $2ax-2a^2=0 \Leftrightarrow x=a \Rightarrow y=\dfrac{a^3-2a^3+a^3+3}{a}=\dfrac{3}{a}$

$B=\left(a;\frac{3}{a}\right)$

$y_{B_0}=2a-5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005634**

ID профиля: **105552**

Вариант 10

Чистовик | лист 1 | математика 10 класс
Вариант 10

4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 & (1) \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 & (2) \end{cases}$$

$(2)-5\cdot(1)$: $x^4+y^4+2x^2y^2-\dfrac{30}{x^2+y^2}=31 \quad \Big|\cdot(x^2+y^2)$

$$(x^2+y^2)^3-30-31(x^2+y^2)=0$$

Пусть $t=x^2+y^2$. Тогда:

$$t^3-31t-30=0$$

Заметим, что $t=-1$ подходит. Тогда:

$$(t+1)(t^2-t-30)=(t+1)(t-6)(t+5)=0$$

$$t=-5;\ -1;\ 6$$

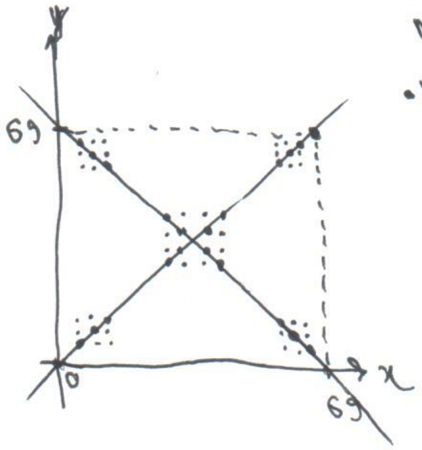
$t=x^2+y^2\geq 0$, $\Rightarrow$ $t=6$

$$\begin{cases} x^2+y^2=6, \Rightarrow y^2=6-x^2 & (3) \\ \dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10, \Rightarrow x^2y^2=9 & (4) \end{cases}$$

$(3)\to(4)$: $6x^2-x^4=9$, $\Rightarrow$ $x^4-6x^2+9=(x^2-3)^2=0$, $\Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}}$, $\Rightarrow y^2=3$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{y=\pm\sqrt{3}}$

Ответ: $(x,y)=(-\sqrt{3};-\sqrt{3});\ (\sqrt{3};-\sqrt{3});\ (-\sqrt{3};\sqrt{3});\ (\sqrt{3};\sqrt{3})$.

5



Сначала посчитаем количество способов выбрать пару точек так, чтобы хотя бы одна лежала на одной из прямых:

• на прямых лежит лишь одна точка:

$$\underbrace{(68\cdot 2)}_{\text{количество способов выбрать точку на прямой}}\cdot\underbrace{(68^2-68\cdot 2)}_{\text{количество способов выбрать точку вне прямых}} \text{ способов}$$

• на прямой лежат обе точки:

$$\frac{1}{2}\underbrace{(68\cdot 2)}_{\text{количество способов выбрать первую точку}}\underbrace{(68\cdot 2-1)}_{\text{количество способов выбрать вторую точку}}$$

мы считаем каждую пару 2 раза

В сумме $68\cdot(2\cdot 68^2-2\cdot 68-1)$ способов.

Теперь найдём количество способов, когда точки лежат на прямой, параллельно одной из осей:

Если пройти по одной из прямых (например, по $y=x$), то для каждой точки будет 67 таковых: $68\cdot 67$ способов.

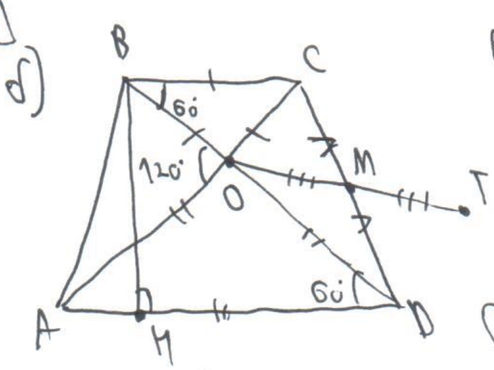
Итого: $68\cdot(2\cdot 68^2-2\cdot 68-1)-68\cdot 67=68\cdot(2\cdot 68^2-3\cdot 68)=68^2\cdot 133=\boxed{614992}$ способов.

Ответ: 614992.

Чистовик | лист 3 | математика 10 класс
Вариант 10

6

б)



$BC=2,\ AD=7$

$\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

$\angle CBD=\angle BDA=60^\circ,\ \Rightarrow BC \parallel AD$

Также $\triangle ABO=\triangle DCO$ по 2 сторонам и углу ($AO=DO$, $BO=CO$, $\angle BOA=\angle COD=120^\circ$).

Тогда $\square ABCD$ – равнобокая трапеция.

Опустим высоту BH на AD. Тогда $AH=\dfrac{AD-BC}{2}=\dfrac{5}{2}$.

По теореме косинусов для $\triangle ABO$: $AB=\sqrt{BO^2+AO^2-2\cdot BO\cdot AO\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{4+49+2\cdot 7}=$

$=\sqrt{67}$ $\Rightarrow$ по т-ме Пифагора для $\triangle ABH$: $BH=\sqrt{67-\frac{25}{4}}=\dfrac{\sqrt{243}}{2}=\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$.

$S_{ABCD}=\dfrac{BC+AD}{2}\cdot BH=\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{9}{2}\sqrt{3}=\dfrac{81}{4}\sqrt{3}$.

$\triangle ABT$ равносторонний $\Rightarrow S_{ABT}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{67}\cdot\sqrt{67-\frac{67}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 67$

Тогда $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 67}{\frac{81}{4}\cdot\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{67}{81}}$

Ответ: б) $\dfrac{67}{81}$.

Черновик

(4)

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 & \Big| \cdot 5 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases} \Big| -$$

$$\underbrace{x^4+y^4+2x^2y^2}_{(x^2+y^2)^2}-\frac{30}{x^2+y^2}=31$$

$$(x^2+y^2)^3-31(x^2+y^2)-30=0$$

$$t^3-31t-30=0$$

$t=-1$

$$(t+1)\underbrace{(t^2-t-30)}_{(t-6)(t+5)}=0$$

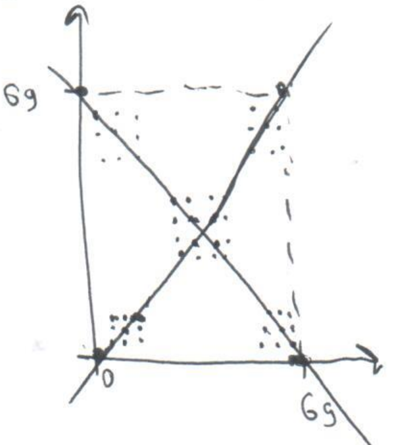
$$\begin{array}{r|l} t^3-31t-30 & t+1 \\ \underline{t^3+t^2} & t^2-t-30 \\ -t^2-31t & \\ \underline{-t^2-t} & \\ -30t-30 & \end{array}$$

$t=\cancel{-1};\cancel{-5};6=x^2+y^2 \Rightarrow y^2=6-x^2$

$$x^2y^2=10-\frac{6}{x^2+y^2}=9$$

$$6x^2-x^4=9 \Rightarrow x^4-6x^2+9=(x^2-3)^2=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}}$$

(5)



~~Всего сп-б: $68^2(68^2-1)/2$~~

~~Всего сп-б: $\frac{(68\cdot 2)^2}{2}+(68\cdot 2)\cdot(68^2-68\cdot 2)=$~~

~~$=68\cdot 2\cdot(68^2+68)=2\cdot 68^2\cdot 69$~~

~~сп-б с парал-ю: $(68\cdot 2)\cdot(66\cdot 2)+(68\cdot 2)\cdot 2=68\cdot 2\cdot 67$~~

~~Итого: $2\cdot 68^2\cdot 69-2\cdot 68\cdot 67=2\cdot 68\cdot(68\cdot 69-67)=627000$~~

Всего сп-б: $\frac{(68\cdot 2)(68\cdot 2-1)}{2}+(68\cdot 2)(68^2-68\cdot 2)=$

$=68\cdot(2\cdot 68^2-68\cdot 4+68\cdot 2-1)=68\cdot(2\cdot 68^2-68\cdot 2-1)$

сп-б с парал-ю: $68\cdot 67$

Всего: $68\cdot(2\cdot 68^2-3\cdot 68)=\boxed{624104}$

$$\begin{array}{r} \times\ 68 \\ 69 \\ \hline 612 \\ +408 \\ \hline 4692 \end{array}$$

$4692-67=4625$

$$\begin{array}{r} \times\ 4625 \\ 136 \\ \hline 27750 \\ +13875 \\ 4625 \\ \hline 627000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 68 \\ 68 \\ \hline 544 \\ +408 \\ \hline 4624 \end{array}$$

$4624\cdot 2=9248-70=9178$

$$\begin{array}{r} \times\ 9178 \\ 68 \\ \hline 73424 \\ +55068 \\ \hline 624104 \end{array}$$

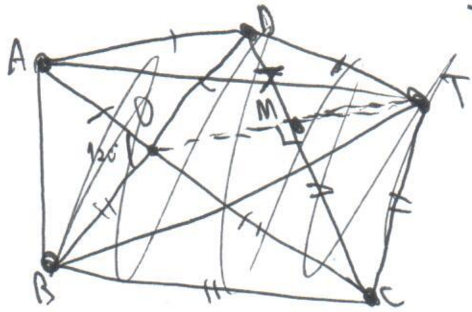
$$\begin{array}{r} \times\ 4624 \\ 133 \\ \hline 13872 \\ +13872 \\ 4624 \\ \hline 614992 \end{array}$$

Черновик

лист 5

математика 10 класс
Вариант 10

(6)



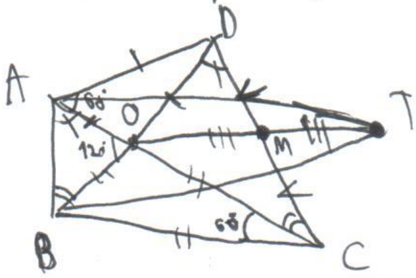
~~$\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – прав.~~

~~а) $\triangle ABT$ – прав.? $\Leftrightarrow \angle ABO = \angle TBC$~~

~~$\triangle DTC$ равнобедр., $\Rightarrow AD = AO = DO = BC = BO = CO$, $\Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA = 30° = \angle ODC = \angle OCD = \angle TDC = \angle TCD$~~
~~Тогда $\angle BCT = 60°+30°+30° = 120°$, $\Rightarrow \angle TBC = 30° \Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow \angle TBO = 60-30° = 30°$, $\Rightarrow \angle ABT = 60°$. Анал-но $\angle BAT = 60°$~~

~~б) $BC = 2$, $AD = 7$, $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$?~~

~~$ABCD$ – прямоугольник ($\angle ABC = \angle BCD = \angle BAD = 90°$)~~

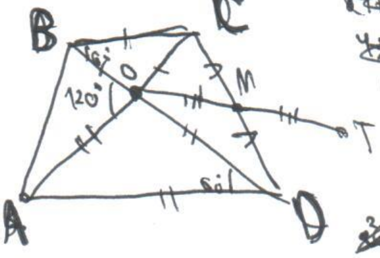


$\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ прав.

а) $\triangle ABT$ – прав.?

b) $BC = 2$, $AD = 7$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?



$AD \parallel BC$ ($\angle DAC = \angle ACB = 60°$), $ABCD$ вписан. ($\angle DAC = \angle DBC = 60°$)

$\angle AOB = 2\angle ACB$, $\Rightarrow O$ – центр описанной окр-ти $ABCD$

$\triangle AOB = \triangle DOC$, $\Rightarrow ABCD$ – равнобок. впис. трапеция

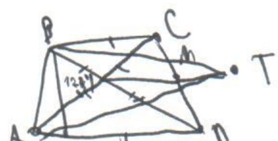
$67 \times 4 = 268$

b) $AB = \sqrt{49+4+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 7} = \sqrt{67} = CD$

$S_{ABCD} = \cancel{S_{ABD} + S_{BCD}}$ $BH\cdot\frac{7+2}{2} = \frac{9}{2}BH =$ $AH = \frac{5}{2}$, $\Rightarrow BH = \sqrt{67 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{268-25}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{243}}{2} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$

$= \frac{81}{4}\sqrt{3}$



$S_{ABT} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{67}\cdot\sqrt{67 - \frac{67}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 67$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \boxed{\frac{67}{81}}$