Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

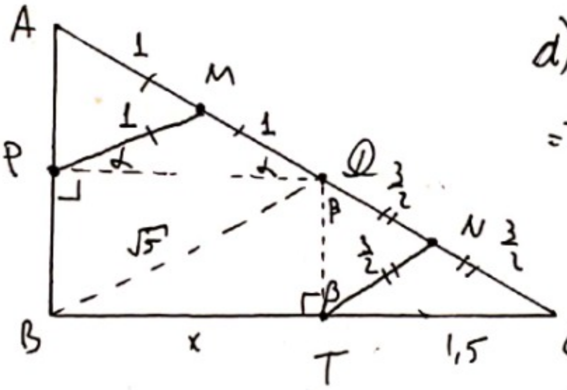
Шифр: **211005624**

ID профиля: **199725**

Вариант 10

Чистовик. ~~Черновик~~

Задача №1.



а) Т.к. $BPDT$ вписанный и DB диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90^\circ \Rightarrow DT \perp BC$ и $DP \perp AB$

т.к. $\triangle APD$ - прямоуг и PM - медиана $\Rightarrow$

$\Rightarrow PM = MD = AM$.

Аналогично $TN = DN = NC$.

Пусть $\angle TDN = \beta$, $\angle MDP = \alpha \Rightarrow \alpha + \beta + \angle PDT = 180^\circ$ и $\angle ABC + \angle PDT = 180$ - $BPDT$ вписанный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \alpha + \beta$. т.к. $PM = MD \Rightarrow \angle MPD = \alpha$, аналогично $\angle DTN = \beta$.

$\angle AMP = 2\alpha$, $\angle DNT = 180 - 2\beta$. т.к. $PM \parallel TN \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT$ - $PM \parallel TN$ и AC - секущ. $\Rightarrow$

$= 2\alpha = 180 - 2\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ = \angle ABC \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$.

б) т.к. $AM = MD = PM \Rightarrow$ ~~...~~ $AM = MD = 1$

аналогично $DN = NC = \frac{3}{2} \Rightarrow AD = 2 \quad DC = 3$

$\angle DCT = 90 - \beta \quad \angle ADP = \alpha = 90 - \beta$

$\angle APD = 90^\circ = \angle CTD$

$\Rightarrow \triangle APD \sim \triangle CTD \Rightarrow \frac{PD}{TC} = \frac{2}{3} = \frac{AD}{DC}$

т.к. $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BPD^\circ = \angle BTD = 90^\circ \Rightarrow \angle PDT = 90^\circ \Rightarrow BPDT$ - прямоуг $\Rightarrow$

$\Rightarrow PD = BT = x \Rightarrow TC = 1,5x \quad x > 0$

$\triangle TDC$ - прямоуг $\Rightarrow TD^2 = DC^2 - TC^2 = 3^2 - 2,25x^2$

т.к. $\triangle BTD$ - прямоуг $\Rightarrow BD^2 = BT^2 + TD^2 = x^2 + 9 - 2,25x^2 = 5 \Rightarrow 1,25x^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{3,2} \Rightarrow BC = 2,5x = 2,5\sqrt{3,2}$

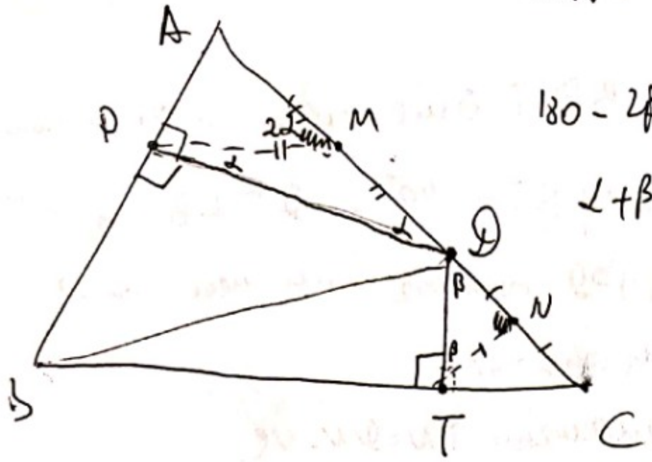
~~...~~ $AB^2 = AC^2 - BC^2$ т.к. ($\angle AB = 90^\circ$) $\Rightarrow AB^2 = (3+2)^2 - (2,5 \cdot \sqrt{3,2})^2 = 25 - 20 = 5 \Rightarrow AB = \sqrt{5}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot 2,5\sqrt{3,2} = 5$

$\boxed{\text{Ответ: } \angle ABC = 90^\circ,\ S_{ABC} = 5}$

1

Черновик

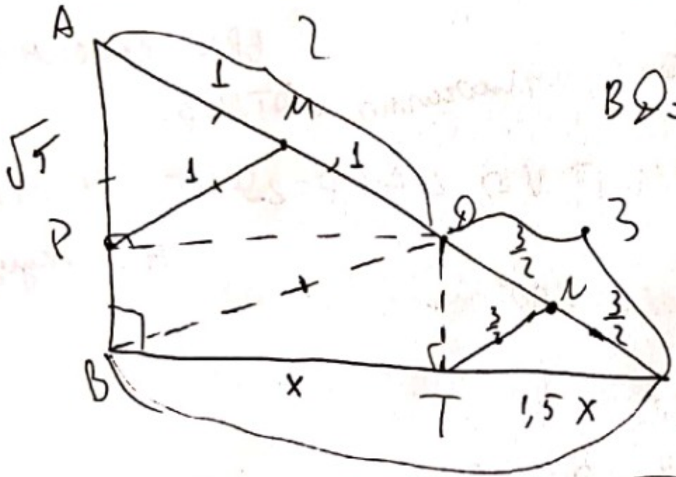


$\alpha+\beta=\angle ABC$

$180-2\beta=2\alpha$

$\alpha+\beta=90^\circ$

$\frac{2}{3}=\frac{x}{m}$



$BD=\sqrt{5}$

$3x=2m$

$\frac{3x}{2}$

$125\cdot 8=1000\cdot 4$

$\times\frac{15}{15}$
75
$+15$
225

3

$DT=\sqrt{3^2-(1,5x)^2}=$

$400 \mid 125$
$-375 \mid 3,2$
250

$3,2\cdot 5$

$3\cdot 5=15+1=\sqrt{16}=4$

$3^2-(1,5x)^2+x^2=5$

$2,5\cdot 4=10$

$9-2,25x^2+x^2=5$

$25\cdot 25\cdot 32:1000$

$3,2\cdot 5=$

$4=1,25x^2$

$x^2=$

$25\cdot 32\cdot 5=4000\ 5:$

$32\cdot 5=$

$x^2=3,2$

$=20,000$

$=160=16\cdot 10$
$4\sqrt{10}$

$x=\sqrt{3,2}$

20

$2,5\cdot 4\cdot\sqrt{10}=10\sqrt{10}$

$2,5x$

$2,5\cdot\sqrt{3,2}=BC$

211005624 (U199725 M11378370)

$2,5$

$25-20=\sqrt{5}$

Задача № 2 Чистовик

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$$

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) + (x+3) + (7-x) - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} - 6 = 0$$

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) + (\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 = 6$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = t$$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$t_1 = 2$, $t_2 = -3$ — по Виета

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$$

$$\sqrt{x+3} = 2 + \sqrt{7-x}$$

$$\begin{cases} -3 \le x \le 7 \\ x+3 = 4 + 7 - x + 4\sqrt{7-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 8 = 4\sqrt{7-x} \\ -3 \le x \le 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4 = 2\sqrt{7-x} \\ -3 \le x \le 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 4 \\ -3 \le x \le 7 \\ (x-4)^2 = 4(7-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \le x \le 7 \\ x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{array}\right. \text{ — по Виета} \\ 4 \le x \le 7 \end{cases} \Rightarrow x = 6$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = -3$$

$$\sqrt{7-x} = 3 + \sqrt{x+3}$$

$$\begin{cases} -3 \le x \le 7 \\ 7 - x = 9 + x + 3 + 6\sqrt{x+3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le x \le 7 \\ -2x - 5 = 6\sqrt{x+3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le x \le 7 \\ x \le -2,5 \\ (-2x-5)^2 = 36(x+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le x \le -2,5 \\ 4x^2 + 20x + 25 = 36x + 108 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \le x \le -2,5 \\ 4x^2 - 16x - 83 = 0 \end{cases}$$

$$D = 256 + 4 \cdot 4 \cdot 83 = 16 \cdot 99$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm 12\sqrt{11}}{8}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 + 1,5\sqrt{11} \\ x_2 = 2 - \sqrt{11} \cdot 1,5 \end{array}\right. \\ -3 \le x \le -2,5 \end{cases} \Rightarrow x = 2 - 1,5\sqrt{11}, \text{ т.к.}$$

$2 + 1,5\sqrt{11} > 0 \Rightarrow$ не подходит

$2 - 1,5\sqrt{11} \overset{?}{\ge} -3 \to 5 \ge 1,5\sqrt{11}$, $10 \ge 3\sqrt{11} \to 100 \ge 99$ - верно

т.к. $\sqrt{11} > 3$

$\Downarrow$ $-\sqrt{11} < -3 \Rightarrow -1,5\sqrt{11} < -4,5 \Rightarrow 2 - 1,5\sqrt{11} < -2,5$

$2 - 1,5\sqrt{11}$ подходит

2

Ответ: 6 ; $2 - 1,5\sqrt{11}$

Задача №3 Чистовик

1) $y^2 - y(4a+4x) + 5a^2 + 8x^2 + 12ax = 0$

$D = (4a+4x)^2 - 4(5a^2+8x^2+12ax) = -4(a^2+4ax+4x^2) = -4(a+2x)^2 \geq 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -2x \Rightarrow x = -\frac{a}{2}$

$y = \frac{4(a+x)}{2} = 2(a+x) = a \qquad \Rightarrow A\left(-\frac{a}{2}; a\right)$

2) $ax^2 - 2a^2x - y \cdot a + a^3 + 3 = 0$

$a \neq 0$, т.к. если $a=0$, то $3=0$ – не верно

$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$

$x_0 = \frac{2a}{2} = a$

$y_0 = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a} \qquad \Rightarrow B\left(a; \frac{3}{a}\right)$

Пусть A и B лежат выше прямой $2x - y = 5 \Rightarrow y > 2x - 5$

$\begin{cases} a > -a-5 \\ \frac{3}{a} > 2a-5 \end{cases}$ $\quad 2a > -5 \Rightarrow a > -2,5$

$a>0$: $3 > 2a^2 - 5a$

$2a^2 - 5a - 3 < 0$

$D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49$

$a_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4}$

$\begin{cases} -\frac{1}{2} < a < 3 \\ a > 0 \\ a > -2,5 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 3$

$a<0$

$3 < 2a^2 - 5a$

$2a^2 - 5a - 3 > 0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 3 \\ a < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ a < 0 \\ a > -2,5 \end{cases} \Rightarrow -2,5 < a < -\frac{1}{2}.$

Если A и B лежат ниже прямой $2x - y = 5 \Rightarrow y < 2x - 5$:

$\begin{cases} a < -a-5 \\ \frac{3}{a} < 2a-5 \end{cases}$ $\quad a < -2,5$

$a>0$: $\left[\begin{array}{l} a > 3 \\ a < -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\qquad a<0$: $-\frac{1}{2} < a < 3$

$\begin{cases} a < -2,5 \\ a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} a > 3 \\ a < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset$ $\qquad \begin{cases} a < -2,5 \\ a < 0 \\ -\frac{1}{2} < a < 3 \end{cases} = a \in \emptyset$

3

$\boxed{\text{Ответ: } (-2,5; -\tfrac{1}{2}) \cup (0; 3)}$

$y = -2x$

$a = -2x$

Черновик

txi

$(x;\ -2x)$ $(a;\ \frac{3}{a})$

$(x;\ -2x)$ $(-2x;\ -\frac{3}{2}x)$

$y = 2x - 5$

$x;\ 2x-5$

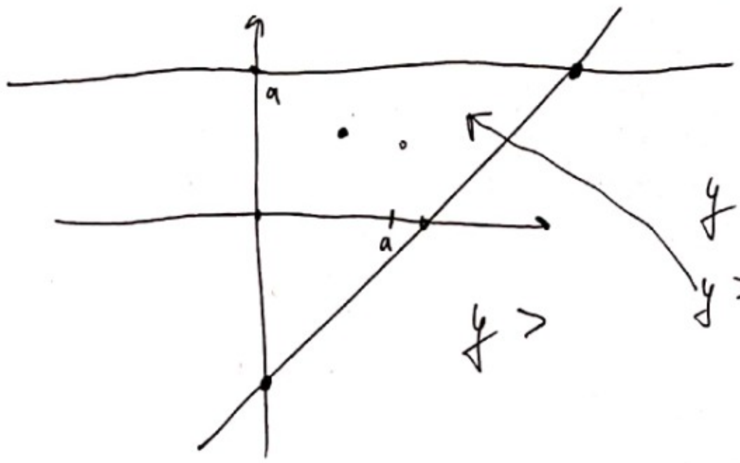
$a;\ \frac{3}{a}$

1) $x > 2x - 5$

$x < 5$

$y = a$

Выше:



$y = 2x - 5$

$y > 2x - 5$

$y >$

$\frac{3}{a} > 2a - 5$

$a >$

211005624 (U199725 M1278370)

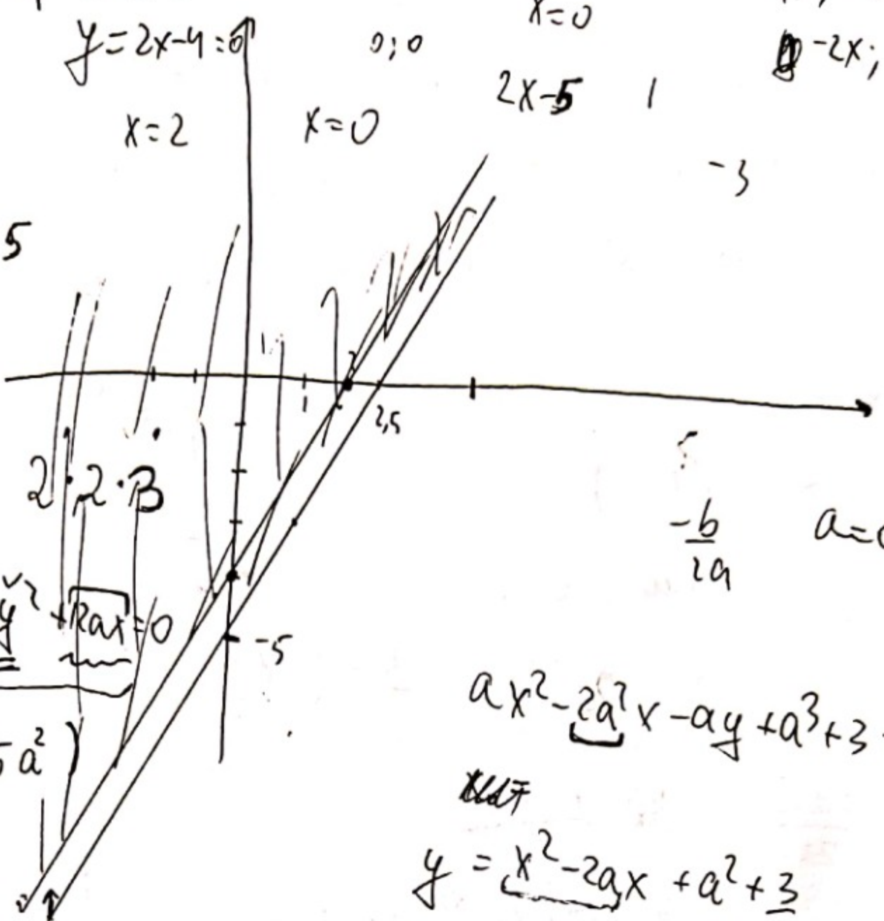
Черновик

$y = 2x - 5$ $\quad y = 2x - 4 = 0$ $\quad 0;0$ $\quad x = 0$ $\quad x; -2x$

$2x - 5$ $\quad 1$ $\quad -2x; -\frac{3}{2}x$

$x = 2$ $\quad x = 0$ $\quad -3$

$\frac{6}{4} = 1,5$



$2 \cdot 2 =$ $\quad 2 \cdot 2 \cdot 3$

$y > 2x - 5$ $\quad -\frac{b}{2a}$ $\quad a = 0$

$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$

$2(4x^2 + 6ax + 2,25a^2)$ $\quad ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$

$y^2 - 4xy + 4x^2$ $\quad y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$

$(2x - y)^2 + 5a^2 - 4ay + 12x^2 + 12ax$ $\quad x_0 = \frac{2a}{2} = a$ $\quad 5 - 7 = \frac{-2}{4}$

$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$ $\quad y_0 = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$

$4x^2 + 12ax + 9a^2 = (2x + 3a)^2$ $\quad B(a; \frac{3}{a})$ $\quad 1$ $\quad 6 - 5 = 1$ $\quad a = 3$

$-4a^2 - 4ay = -4a(a - y)$ $\quad -2$ $\quad A(\ ; a)$

$-(4a^2 + 4ay + y^2) + y^2$ $\quad 4 \cdot 4 = 16$ $\quad -\frac{a}{2}$

$(2x - y)^2 + (2x + 3a)^2 - (2a + y)^2 + y^2 = 0$ $\quad 2 \cdot 4 = 8$ $\quad y = 2(a + x)$

$y^2 - y(4a + 4x) + 8x^2 + 5a^2 + 12ax = 0$ $\quad a < -2,5$

$D = (4a + 4x)^2 - 4(8x^2 + 5a^2 + 12ax)$

$16a^2 + 32ax + 16x^2 - 32x^2 - 20a^2 - 48ax =$

$= -4a^2 - 12ax - 16x^2 = -4(a^2 -$

Черновик

$y^2-4\cdot y(a+x)+(5a^2+8x^2+12ax)=0$

$D=16(a^2+2ax+x^2)-4(5a^2+8x^2+12ax)=$

$=16a^2+32ax+16x^2-20a^2-48ax-32x^2=-4a^2-16ax-16x^2=$

$=-4(a^2+4ax+4)=$

$D=-4(a+2)^2$

$y_1=\frac{4(a+x)}{2}=2(a+x)=$

$=2(x-2x)=-2x=a$

если $a\neq-2$

$a=-2$

$B=(-2;-\frac{3}{2})$ $y=-2x$

$\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ $y_2=\frac{4(a+x)}{2}$

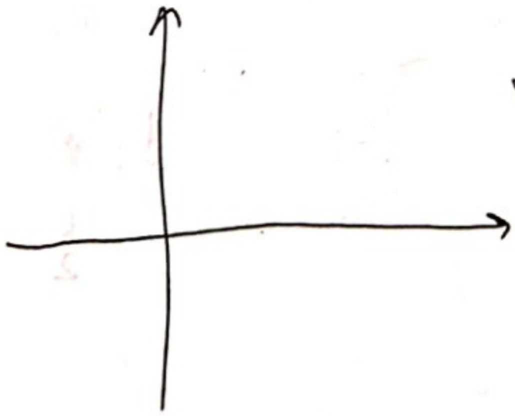
$y_1=\frac{4(x-2)}{2}=2(x-2)$

; a

$y=a$

$y=2x-4$ $2x-4$

$2x-y=4$



$D=-4(a+2x)^2$

2. $2x=-a$

$a=-2x$

4.

$x=-\frac{a}{2}$

$y^2-y(4a+4x)+5a^2+8x^2+12ax=0$

$D=16a^2+16x^2+32ax-20a^2-32x^2-48ax=$

$=-4a^2-16x^2-16ax=-4(a^2+4ax+4x^2)=-4(a+2x)^2$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

Черновик

$-3 \le x \le 7$

$-9 \cdot$

$x=3$

$21+4x-x^2$

$-x^2+4x+21$

$-9-12$

$-3 \le x \le 3$

$x=3$

$x=-7$

A

$-3 \quad 47$

$-49+$

$\underbrace{\sqrt{x+3}} - \sqrt{7-x} + \underbrace{4} = 2\sqrt{(x+3)} \cdot \sqrt{(7-x)}$

$(x+7)(x-3) \ge 0$

$= x+3 + 7-x = 10$

$-7 \quad 3$

$10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} -$

$\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}\right)^2 + \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}\right) = 6$

$\underbrace{11-3} = 8$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = t$

$t^2 + t - 6 = 0$

$t_1 = 2$

$t_2 = -3$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$

$\sqrt{x+3} = 2 + \sqrt{7-x}$

$x+3 = 4+7-x+4\sqrt{7-x}$

$2x-8 = 4\sqrt{7-x}$

12

$x-4 = 2\sqrt{7-x}$

$16-28=$

$x \ge 4$

$108 - 25 = 83$

$6-5$

$x^2-8x+16 = 4(7-x)$

$6 \quad -2$

-3

-2

$\underbrace{x^2} - 4x - 12 = 0$

$36 \cdot 3 = 108$

$4x^2-16x-83=0$

$x_1 = 6$

216

$28-16=$

$x_2 = -2$

$+-9=-2$

$2 \cdot 5=$

$2x \le -5$

$-2x-5 = 6\sqrt{x+3}$ $2+3$

$x \le -2,5$

$4x^2+20x+25 = 36x+108$

~~$4x^2-16x-83=0$~~

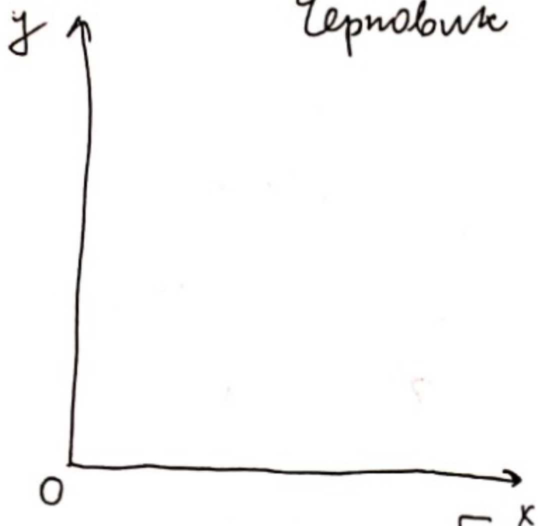
$-2x-5 \ge 0$

$-2x-5 = 6\sqrt{x+3}$

$2x+5 \le 0$

~~$x^2 \; 4x \; 212$~~ $=0$

Черновик $5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$



$50 \geqslant 15\sqrt{11}$

$10 \geqslant 3\sqrt{11}$

$-4{,}5+2 \geqslant 2 \quad -1{,}5\sqrt{11} \quad > \quad -6 \; +2$

$100 \geqslant 99$

$-2{,}5 > 2-1{,}5\sqrt{11} > -4$

$2-1{,}5\sqrt{11} \geqslant -3$

$\sqrt{11} = 3,$ $\quad 5 \geqslant 1{,}5\sqrt{11}$ $\quad 3$

$1 \geqslant 0{,}3\sqrt{11}$

$4-9=-5$ $\quad \underbrace{-4{,}5 > -\sqrt{11}} > -6$

$\sqrt{x+3}+3=\sqrt{7-x}$

$x+3+9+6\sqrt{x+3}=7-x$ $\quad 10$ $\quad 3<\sqrt{11}<4$

$-3>\sqrt{11} \geqslant -4$

$6\sqrt{x+3}=-2x-5$ $\quad 25-108$

$36(x+3)=4x^2+\underbrace{20x}+25$ $\quad 108-25=83$

$4x^2-\underbrace{16x}-83=0$ $\quad < \sqrt{11}$

$D=256+\underbrace{4\cdot4}_{16}\cdot83=16(16+83)=$

$-3 \leqslant x \leqslant 2{,}5$

$=16(99)=12\sqrt{11}$

$x_{12}=\dfrac{16 \pm 12\sqrt{11}}{8}=2 \pm 1{,}5\sqrt{11}$

$2-1{,}5\sqrt{11}$

$2-1{,}5\sqrt{11}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005624**

ID профиля: **199725**

Вариант 10

Чистовик.

Задача №4.

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \quad | \cdot (-5) \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$$x^4+y^4+7x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81$$

$$+\begin{cases} \dfrac{-30}{x^2+y^2} - 5x^2y^2 = -50 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$$\frac{-30}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)^2 = 31$$

$$t = x^2+y^2, \ t>0$$

$$-\frac{30}{t} + t^2 = 31 \quad | \cdot t>0$$

$$-30 + t^3 = 31t$$

$$t^3 - 31t - 30 = 0$$

$$(t-6)(t+1)(t+5) = t^3 - 31t - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=-1 \\ t=-5 \end{array}\right. \\ t>0 \end{cases} \Rightarrow t = 6 = x^2+y^2$$

$$\frac{6}{6} + x^2y^2 = 10 \Rightarrow x^2y^2 = 9 \Rightarrow xy = \pm 3$$

$$\begin{cases} xy = 3 \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases} \qquad x = \frac{3}{y}$$

$$\frac{9}{y^2} + y^2 = 6 \quad | \cdot y^2 \neq 0$$

$$9 + y^4 = 6y^2$$

$$(y^2-3)^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = -3 \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases} \qquad x = -\frac{3}{y}$$

$$\frac{9}{y^2} + y^2 = 6 \quad | \cdot y^2 \neq 0$$

$$9 + y^4 = 6y^2$$

$$(y^2-3)^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{3} \\ x = \mp\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } (\sqrt{3}; -\sqrt{3});\ (\sqrt{3}; \sqrt{3});\ (-\sqrt{3}; -\sqrt{3});\ (-\sqrt{3}; \sqrt{3})}$$

1

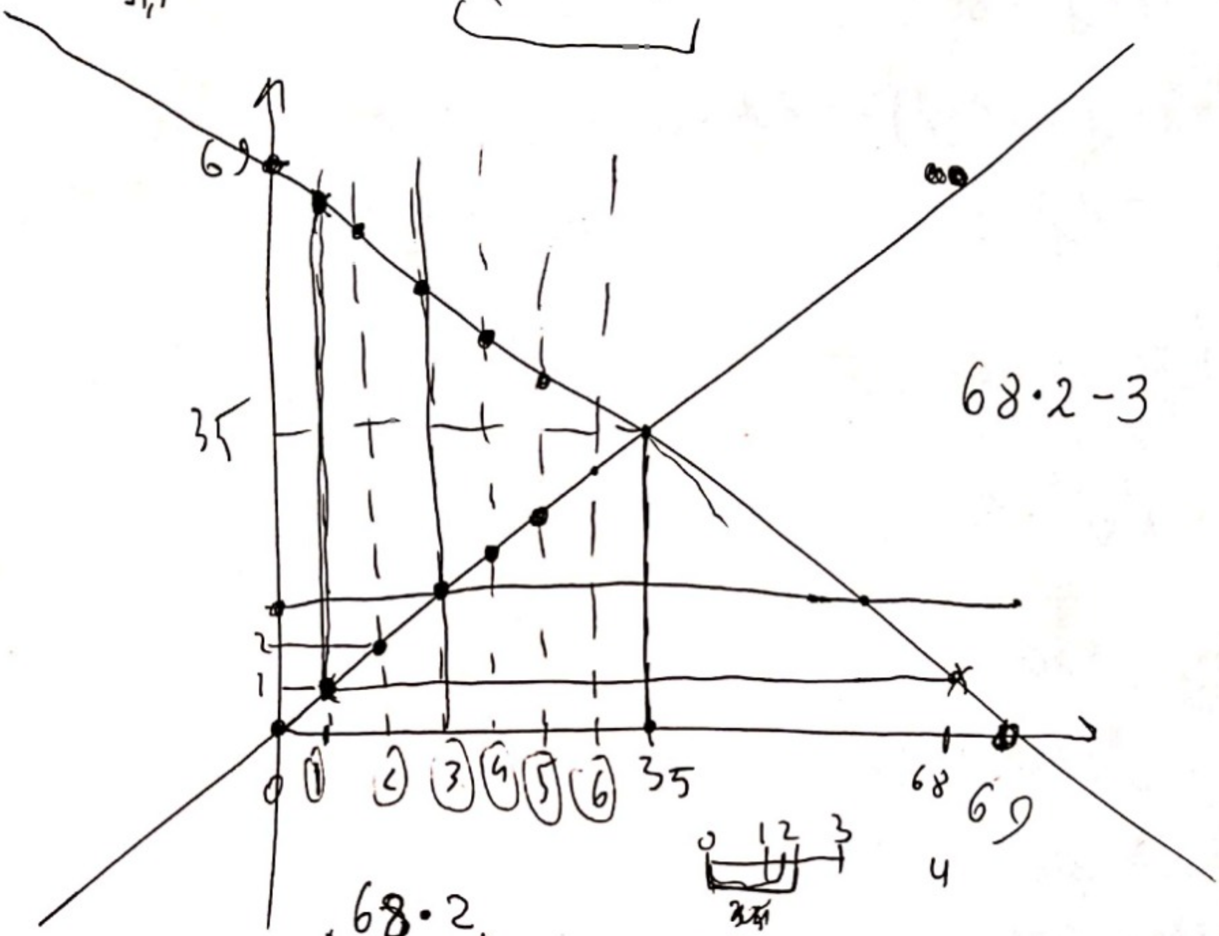
$(t-6)(t^2+6t+5)=0$ Черновик

$t_1=-1$

$t_2=-5$ только 1 лежит на прямых

$\underbrace{(68\cdot 2)}\cdot$

34,5



$68\cdot 2-3$

$\underbrace{68\cdot 2}$

2 2

68 столбцов

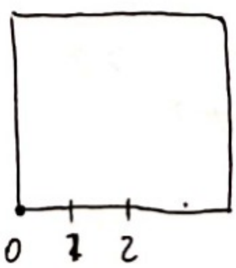
1 клетка

34,5

70×70

1 точка: $68\cdot 2$

2 точка $(68\cdot 2-3)$



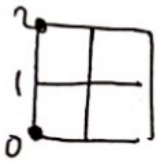
$68(68\cdot 2-3)$

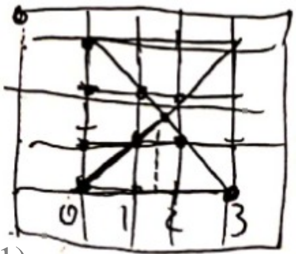
$68\cdot 68$

4−2

$68\cdot 68-68\cdot 2-68\cdot 2+3$

69





211005624 (U199725 M1278371)

Черновик

$\frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10$

$x^2+y^2 = a$

$x^2 y^2 = b$

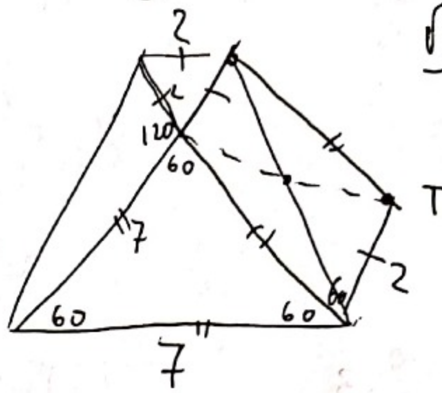
$\frac{a \cdot a}{2} \cdot \sin 60 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

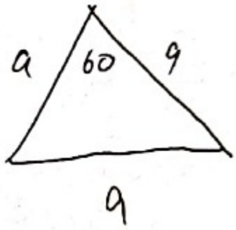
$x^4+y^4+7x^2y^2=81$

$x^4+y^4+2x^2y^2+5x^2y^2=81$

$(x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81$



$\frac{6}{a}+b=10 \quad 1 \cdot a \neq 0 \quad 6+ab=10a$



$a^2+5b=81$

$a^2=81-5b$

$a^2+5b-81=0$

$10a=6+ab$

$6+ab=10a$

$81 \cdot 2 = 162$

$a(10-b)=6$

68

$68+68-2-2$

$a=\left(\frac{6}{10-b}\right)^2=81-5b$

68

$\frac{36}{100-20b+b^2}=81-5b$

$68 \cdot 68 - 68 \cdot 2 - (68-2-4)$

$36=8100-500b-1620b+81b^2+100b^2-5b^3$

$36=8100-500b-1620b+81b^2+100b^2-5b^3$

$28+4+49$

$5b^3 - 181b^2+2120b=8064$

$53+28=7$

$=$

$67+14=\frac{81\sqrt{3}}{4}$

211005624 (U199725 M1278371)

$\frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10$ $1 \cdot 5$ Черновик $81-50$

$xy = 3$ $x = \frac{3}{y}$

$x^2+y^2 = 6$

$(x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81$ $x^4 = 9$

$x^2+y^2 = 6$ $\frac{9}{y^2} + y^2 = 6$ $| \cdot y^2$

$x^2y^2 = 9$

$9+9 = 2 \cdot 9 + 7 \cdot 9$

$\underbrace{xy = \pm 3}$

$9 + y^4 = 6y^2$

$36 + 5 \cdot 9^{=45} - \frac{30}{\underbrace{x^2+y^2}_{t>0}} + (x^2+y^2)^2 = 31$

$m^2 - 6m + 9 = 0$

$(m-3)^2 = 0$

?

$-3 + 2\sqrt{14}$

$m = 3$

$8\sqrt{3} + \frac{49}{4}\sqrt{3}$ $\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

$y^2 = 3$

$\frac{48}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ $-\frac{30}{t} + t^2 = 31$ $| \cdot t \neq 0$

$\boxed{\begin{matrix} y = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{3} \end{matrix}}$

$-125 - 30 + 31 \cdot 5^{=155}$

$12+8 = 20{,}25 \cdot \sqrt{3}$

$-30 + t^3 = 31t$

$\frac{6}{t} \leq 10$

$5\ 6\ 6^{12+5} = 17 \cdot 2 = \frac{34}{5}$ 2

$xy = -3$ $y = \pm\sqrt{3}$

$x = \mp\sqrt{3}$

$t^3 - 31t - 30 = 0$ $5\ 6\ 6$

$6 \leq 10t$

$32 - 30$ 6 $36 - 31$

$t \geq \frac{6}{10}$

$t_1 = 6$

$1000 - 31 \cdot 10$

	1	0	-31	-30
6	1	6	+5	0

$125 - \underbrace{31 \cdot 5} - 30$

$216 - \underbrace{31 \cdot 6}_{186} - 30$

25 -1 -5

$(t-6)(\underbrace{t^2 + 6t + 5}) = 0$

$x^2 + y^2 = -3 + 2\sqrt{14}$

$\sqrt{16}$

$\frac{20\sqrt{14} - 36}{-3+2\sqrt{14}} = (xy)^2$ $D = 36 + 20 = 56 = 7 \cdot 8 =$

$= 4\sqrt{14}$

$\frac{6}{-3+2\sqrt{14}} + \underbrace{x^2y^2} = 10$

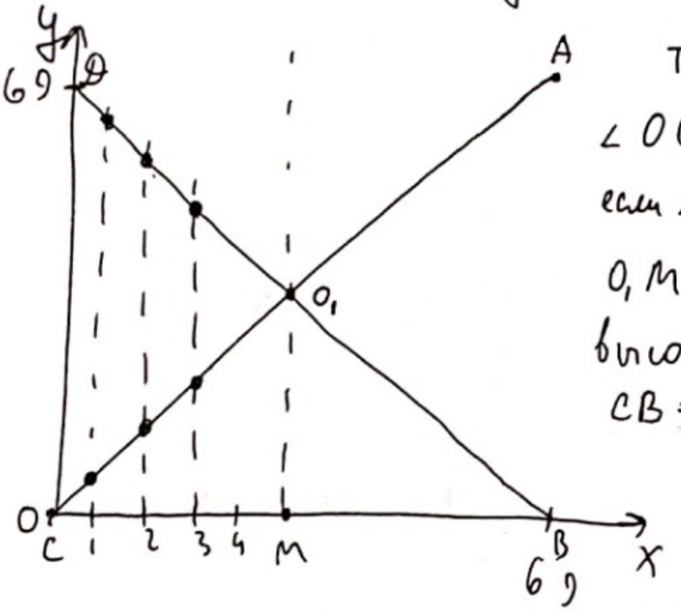
$t_1 = \frac{-6 - 4\sqrt{14}}{2} < 0$

$10 - \frac{6}{-3+2\sqrt{14}}$ $\frac{-30 + 20\sqrt{14} - 6}{-3+2\sqrt{14}}$

$t_2 = \frac{-6 + 4\sqrt{14}}{2} > 0$

Чистовик

Задача №5.



точка O_1 не лежит в узле сетки, т.к. $\angle OO_1B = 90$ ($ABCD$ - квадрат) и $O_1C = O_1B$ $\Rightarrow$ если мы проведем через O_1 прямую $\parallel CD$, то $O_1M \perp CD \Rightarrow O_1M \perp CB \Rightarrow O_1M$ - медиана и высота в р/б прямоуг. $\triangle O_1CB \Rightarrow CM = MB$ но $CB = \cancel{70}$ 69 $\Rightarrow$ M - не лежит в узле $\Rightarrow O_1$ тоже не лежит.

Посчитаем кол-во способов выбрать 2 узла, так что только 1 лежит на прямой $y = x$ или $y = 69 - x$

в каждой из прямых $\parallel CD$ и проходящие через точки $(1;0)$; $(2;0)$; $(3;0)$... ...$(68;0)$ содержится ровно по 2 точки принадлежащие нужным прямым. будем называть эти точки хорошими. Значит ~~всего~~ выбрать одну хорошую точку можно $68 \cdot 2$ способами (68 столбцов). Посчитаем кол-во узлов не лежащих на ~~пр~~ нужных прямых ($y = x$ и $y = 69 - x$) и не лежащие в одно вертикали и горизонтали с выбранной хорошей точкой:

Всего узлов внутри: $68 \cdot 68$, из них $68 \cdot 2$ хороших и $68 \cdot 2 - 1$ лежат в горизонтали и вертикали с выбранной хорошей. Но среди $68 \cdot 2 - 1$ есть 3 хороших, которые мы посчитали ранее $\Rightarrow$ ~~таких~~ узлов, которые не являются хорошими и не лежат в вертикали и горизонтали с выбранной хорошей: $68 \cdot 68 - 68 \cdot 2 - (68 \cdot 2 - 4) = 68 \cdot 68 - 4 \cdot 68 + 4 = 68 \cdot 64 + 4 \Rightarrow$

Выбрать 1 хороший и 1 не хороший узел: $(68 \cdot 2)(68 \cdot 64 + 4)$ способов

Выбрать 2 хороших узла:

$68 \cdot 2$ - способов первый

$68 \cdot 2 - 3$ - способов выбрать второй

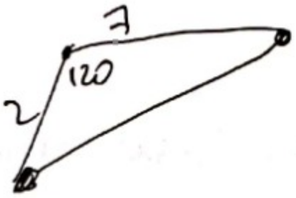
$\Rightarrow$ всего способов выбрать 2 хороших узла: $\dfrac{68 \cdot 2 \cdot (68 \cdot 2 - 3)}{2}$ т.к. каждый способов учитывали 2 раза.

Всего способов $(68 \cdot 2)(68 \cdot 64 + 4) + 68(68 \cdot 2 - 3)$

$\boxed{\text{Ответ: } (68 \cdot 2)(68 \cdot 64 + 4) + 68(68 \cdot 2 - 3)}$

2

Черновик



$4+49+\underbrace{7\cdot 2}_{=14}\cdot$

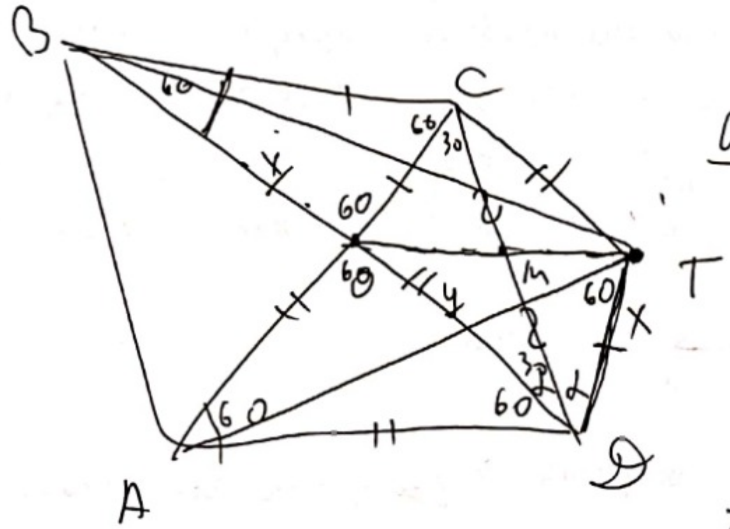
53

$\sqrt{67}$

$x+y$

X

$2d$

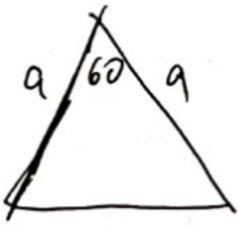


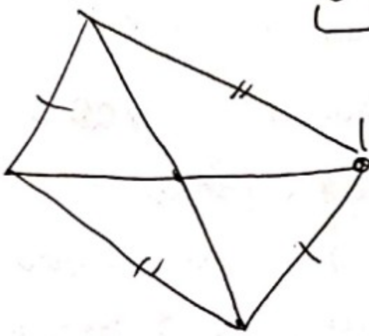
$\dfrac{a^2\cdot\sin 60}{2}$

$\dfrac{\sqrt{3}\cdot a^2}{4}$

17·1

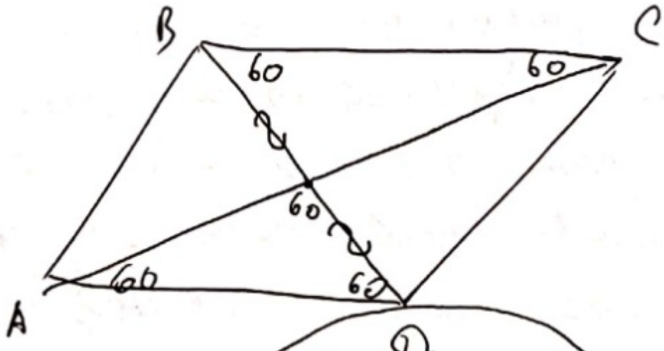
$\underbrace{67}\cdot 3=$





$180+21$

$201:3$



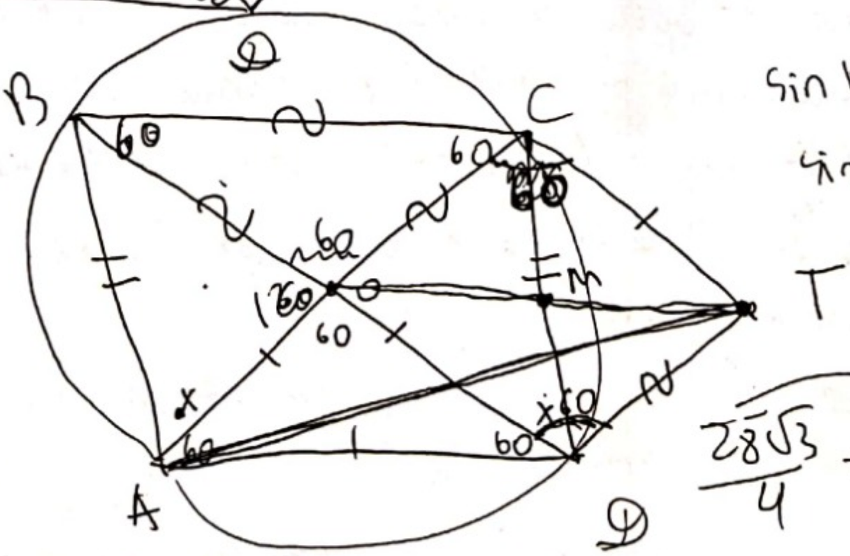
$AT=BT$

120 | ~

$28+9=$

$\sin 120=$

$\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $=37$

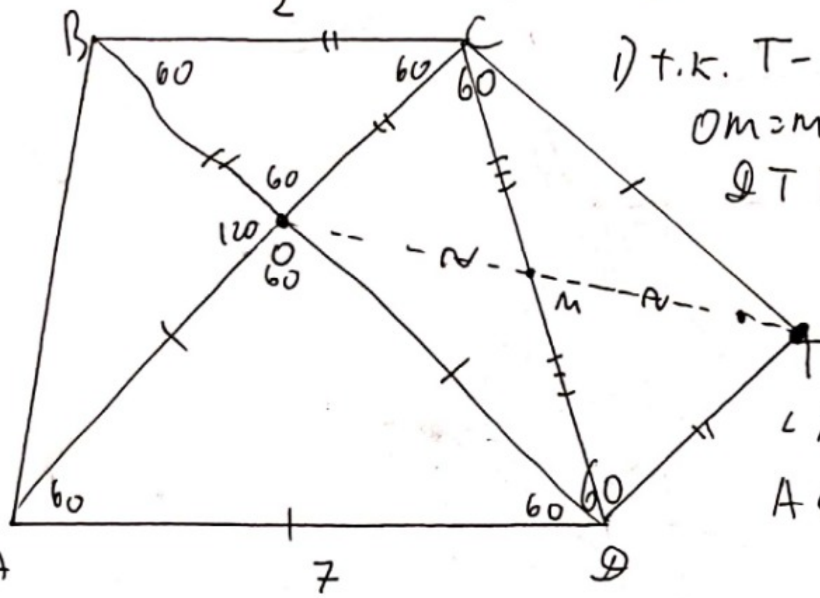


$\dfrac{28\sqrt{3}}{4}+\dfrac{2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{7\sqrt{3}}{4}=$

$=\dfrac{37\sqrt{3}}{4}$

Чистовик.

Задача №6.



1) т.к. T — симметрична O относ. M — $OM = MT$, $CM = MD \Rightarrow OCTD$ — параллелогр.

$DT \parallel OC$ $CT \parallel OD$

$DT = OC$ $CT = OD$

т.к. $\triangle AOD$ правильный $\Rightarrow$

$\angle AOD = 60$

$AC \parallel DT \Rightarrow \angle AOD = \angle ODT = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADT = 60° + 60° = 120°$.

$AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2AD \cdot DT \cdot \cos 120°$ — по т. косинусов

аналогично $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos \underset{\overset{\shortparallel}{120°}}{\angle BCT}$.

$BC = DT$ $AD = OD = CT \Rightarrow AT^2 = BT^2 \Rightarrow AT = BT$

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos 120°$

$BO = BC$ $AO = \overset{CT}{\cancel{OD}} \Rightarrow AB^2 = AT^2 = BT^2 \Rightarrow AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ — правильный

2) $BO = OC = BC = 2$ $AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos 120°$ — по т. косинусов

$AO = OD = AD = 7$ $AB^2 = 4 + 49 - 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot (-\frac{1}{2}) = 49 + 18 = 67 \Rightarrow AB = \sqrt{67}$

т.к. $\triangle ABT$ — правильный $\Rightarrow S_{ABT} = \frac{\sqrt{3} \cdot AB^2}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot 67}{4} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABO} = \frac{BO \cdot OA \cdot \sin \angle BOA}{2} = S_{COD} \Rightarrow S_{ABO} + S_{COD} = BO \cdot OA \cdot \sin \angle BOA = 2 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

$S_{BOC} = \frac{\sqrt{3} \cdot 4}{4}$

$S_{AOD} = \frac{\sqrt{3} \cdot 49}{4}$ $\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{COD} + S_{BOC} + S_{AOD} = 7\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{81\sqrt{3}} = \frac{67}{81}$

211005624 (U199725 M1278371)

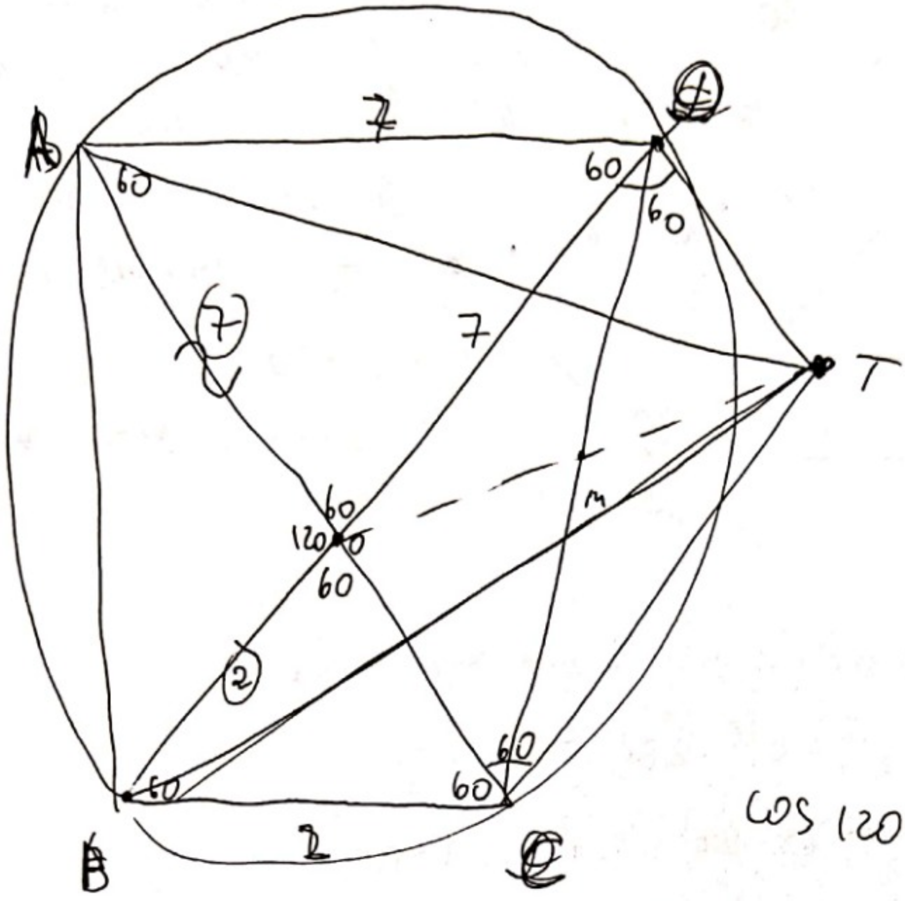
~~Ответ~~

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{67}{81}}$

3

Черновик

$\frac{S_{ABT}}{ABCD}$



$\cos 120 = -\cos 60 = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$

$AB^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \underbrace{\cos(120)}^{=-\frac{1}{2}}$

$AB^2 = 49 + 4 + 14 \to 18$

$49 + 18 = 67$

$AB = \sqrt{67}$

211005624 (U199725 M1278371)