

# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005550**

ID профиля: **222543**

Вариант 10

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$$

$$\sqrt{x+3} = 2 + \sqrt{7-x}$$

$$x+3 = 4 + 7 - x + 4\sqrt{7-x}$$

$$x > 4$$

$$2x + 8 = 4\sqrt{7-x}$$

$$x - 4 = 2\sqrt{7-x}$$

$$x^2 + 16 - 8x = 28 - 4x$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 12 = 16$$

$$2 \pm 4 \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2 - \frac{2\sqrt{11}}{2}$$

$$\frac{4 - 3\sqrt{11}}{2} \quad \sqrt{-3}$$



$$3 + 1 + 4 = 2 \cdot \sqrt{9} \quad \begin{matrix} 4 - 3\sqrt{11} \quad \sqrt{5} \\ 9 \quad \sqrt{3\sqrt{11}} \end{matrix}$$

$$8 = 6$$

$$4 - 3\sqrt{11} \quad \sqrt{-6}$$

$$10 \quad \sqrt{3\sqrt{11}}$$

$$1 - 3 + 4 = 2 \sqrt{\frac{21 - 8 + 4}{9}} \quad \begin{matrix} 100 \sqrt{99} \\ 9 \end{matrix}$$

$$6$$

$$9 \cdot 44$$

$$\sqrt{-2+3} - \sqrt{7+2} + 4 = 2 \cdot \sqrt{\frac{21 - 8 - 4}{9}} \quad \begin{matrix} 36 \cdot 11 \\ 6\sqrt{11} \end{matrix}$$

$$\frac{4 - 3\sqrt{11}}{2} \quad \sqrt{-3}$$

$$\begin{array}{r} 396 \overline{) 9} \\ -36 \overline{) 44} \\ \hline 36 \end{array} \quad 2\sqrt{11}$$

$$4 - 3\sqrt{11} \quad \sqrt{-6}$$

$$10 \quad \sqrt{3\sqrt{11}}$$

$$\frac{3,3}{2} = 1,6$$

$$7 - x = x + 12 + 6\sqrt{x+3}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 4 \\ \hline 332 \\ + 64 \\ \hline 396 \end{array}$$

$$\frac{D}{4} = \frac{144}{64 + 83} \quad 4$$

$$\frac{D}{4} = 64 + 83 \cdot 4$$

$$100 > 99$$

$$36 \cdot 3$$

$$-5 - 2 \times 7 = 0$$

$$25 + 4x^2 + 20x = 36x + 108$$

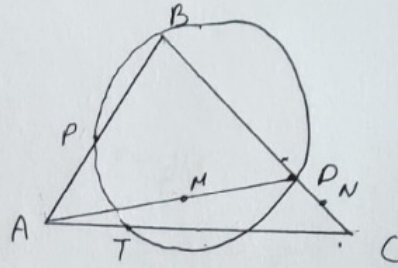
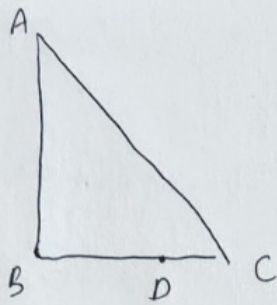
$$x \leq -2,5$$

$$\frac{8 \pm 2\sqrt{11}}{4}$$

$$4x^2 - 16x - 83 = 0$$

$$2 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Чепуха



$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2 \cdot \sqrt{-(x+3)(7-x)}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= a \\ \sqrt{7-x} &= b \end{aligned}$$

$$a - b + 4 = 2ab$$

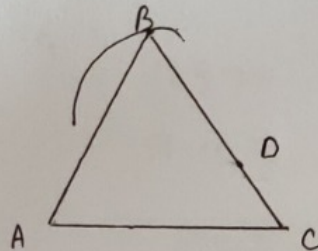
$$a, b \geq 0$$

$$\begin{aligned} a &\geq -3 \\ b &\leq 7 \end{aligned}$$

$$a + 4 = b(2a + 1)$$

$$b = \frac{a+4}{2a+1}$$

$$\sqrt{x+3} + 4 = 2 \cdot \sqrt{x+3} \sqrt{7-x} + \sqrt{7-x}$$



Числовик спрямица 3

$$\text{Претом } \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = a, \quad \text{I}$$

$$\text{Потога } a^2 = 10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$\text{Omb: } \frac{1}{2}; 2 - \frac{3}{2}\sqrt{11}; 6$$

$$\text{OДЗ } \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

$$21 + 4x - x^2 = (x+3)(7-x)$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2} \iff \begin{cases} -3 \leq x \leq 7 \\ x+4 = 10-a^2 \\ a = \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} \end{cases}$$

$$1) a^2 + a - 6 = 0$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2 \quad (\text{I}) \\ \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = -3 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

$$\text{I } \sqrt{x+3} = 2 + \sqrt{7-x}$$

$$x+3 = 4 + 7-x + 4\sqrt{7-x}$$

$$x-4 = 2\sqrt{7-x}, \quad x \geq 4; \quad x \leq 7 \quad (\text{OДЗ})$$

$$x^2 + 16 - 8x = 28 - 4x$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x = -2, \text{ не похорум} \end{cases}$$

II

$$\sqrt{x+3} + 3 = \sqrt{7-x}$$

$$7-x = x+3+9+6\sqrt{x+3}$$

$$-5-2x = 6\sqrt{x+3}, \quad x \leq -2,5$$

$$25 + 4x^2 + 20x = 36x + 108$$

$$4x^2 - 16x - 83 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 84 + 83 \cdot 4 = 396$$

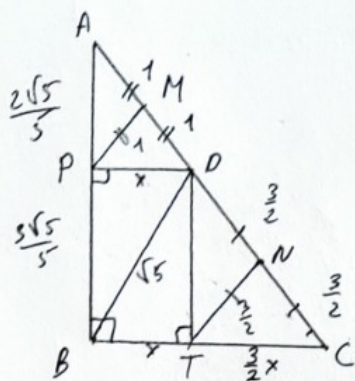
$$2 + \frac{8}{2}\sqrt{11} > -2,5, \text{ не похорум}$$

$$x = \frac{+8 \pm 6\sqrt{11}}{4} = 2 \pm \frac{3}{2}\sqrt{11}$$

$$-2,5 < 2 - \frac{3}{2}\sqrt{11} < -3, \text{ похорум}$$

Числовые страница 2

2) Перерисуйте чертеж, зная  $\angle ABC = 90^\circ$ .



$$MP = 1$$

$$NT = \frac{3}{2}$$

$$BD = \sqrt{5}$$

*прямоугольные*  
 $PDTB$  - ~~прямоугольный~~, все углы прямые

1)  $MP = 1 \Rightarrow AM = MD = 1$  (PM - медиана в прямоугольном  $\triangle APD$ )

2) аналогично  $NT = ND = NC = \frac{3}{2}$

3)  $\triangle APD \sim \triangle DTC$  ( $\angle APD = \angle DTC$ ;  $\angle PDA = \angle TCD$ ),  $k = \frac{2}{3}$

4) Пусть  $PD = x$ , тогда  $TC = \frac{3}{2}x$

$$DT^2 = 9 - \frac{9}{4}x^2$$

$$\triangle BDT, x^2 + 9 - \frac{9}{4}x^2 = 5 \quad \frac{5}{4}x^2 = 4 \quad x = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$5) AP = \sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$6) BC = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5} + 12\sqrt{5}}{10} = 2\sqrt{5}$$

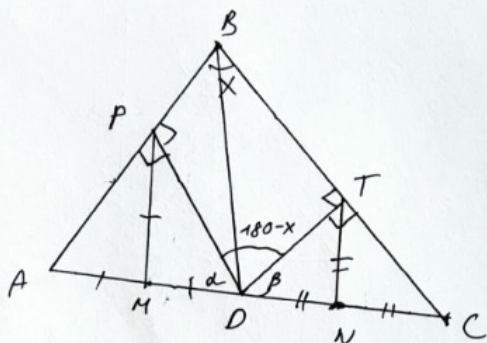
$$AB = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

$$7) S_{ABC} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5 \quad \text{Omb: } 5$$

Числовые страница 1

1

a)



- 1)  $PM \parallel TN$
- 2)  $\omega_1$  (BD-диаметр)  $\cap AB = P$ ;  $\cap BC = T$
- 3)  $MA = MD$ ,  $DN = NC$
- 4) ~~Соединим PD и DT~~  $\angle BPD$  - вписанный, опирается на диаметр  $\Rightarrow \Rightarrow \angle BPD = 90^\circ \Rightarrow \angle APD = 90^\circ$  (линейный)
- 5)  $\angle BTN$  - вписанн., опирается на диаметр  $\Rightarrow \angle BTN = 90^\circ \Rightarrow \angle DTC = 90^\circ$  (линейн)
- 6)  $\triangle APD$ ,  $PM$  - медиана  $\Rightarrow PM = MD$  (медиана в прямоугольном треуг = половине гипотенузы).
- 7)  $\triangle DTC$ ,  $TN$  - медиана  $\Rightarrow TN = DN$
- 8) Пусть  $\angle ABC = x$ , тогда  $\angle PDT = 180 - x$  (вписан. четырехугольник  $BPDT$ )
- 9) Пусть  $\angle MPD = \angle MDP$  (равноб. треугольники)  $= \alpha$   
 $\angle NDT = \angle NTD = \beta$  (равноб. треугольники)
- 10)  $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD + \angle DNT = 180^\circ$  (внутренние)
- 11)  $\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta + 180 - x = 180^\circ \\ 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow x = \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

Оконч.:  $\angle ABC = 90^\circ$

# Черновик

$$a \pm b = 2$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{-}$$

$$21 + 4x - x^2$$

$$x = 7$$

$$x = -3$$

$$-(x-7)(x+3)$$

~~$$(x+3)(x-7)$$~~

$$-(x+3)($$

$$a - b + 4 = 2ab$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$(x+3+7-x) - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 4(x+3)(7-x) + 16 - 16\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$14\sqrt{(x+3)(7-x)} = 16 - 10 + 4(x+3)(7-x)$$

$$-x^2 + 21 + 4x$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = a$$

$$(a-b) + 4 = 2ab$$

$$a+4 = b(2a+1)$$

$$a^2 = 10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$$

$$a+4 = 10 - a^2$$

$$7\sqrt{(x+3)(7-x)} = 8 - 2x^2$$

$$\frac{a+4}{2a+1} = b$$

$$a^2 + a - 6 = 0$$

$$a = 2$$

$$a = -3$$

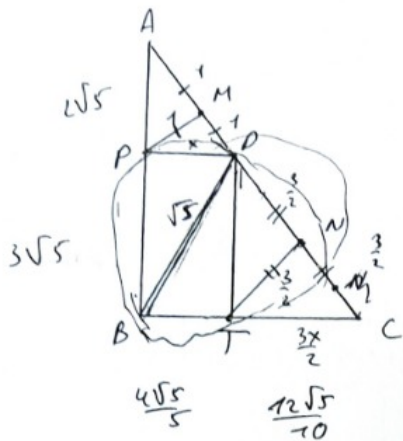
$$\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+3} + 4}{2\sqrt{x+3} + 1}$$

$$7-x = \frac{x+3+16+8\sqrt{x+3}}{4x+12+1+4\sqrt{x+3}}$$

28x.

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Черновик.



$$\frac{c}{x} = \frac{3}{7c}$$

$$7c = \frac{3x}{2}$$

$$7D^2 = 9 - \frac{9x^2}{4}$$

$$x^2 + 9 - \frac{9x^2}{4} = 5$$

$$4 = \frac{5}{4}x^2$$

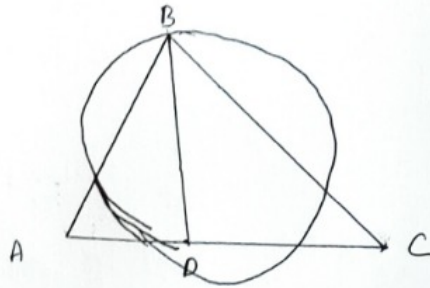
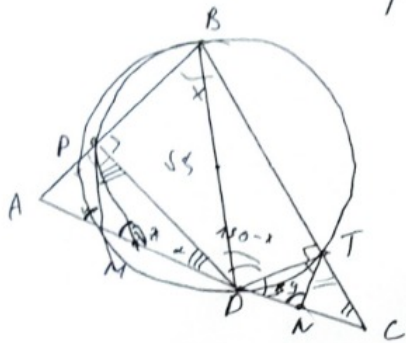
$$4 = \frac{9x^2 - 4x^2}{4}$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow AP = \sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

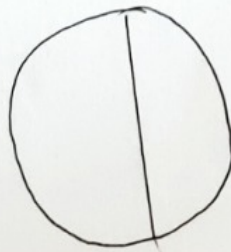
$$\frac{5\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 25$$



Черновик



2a

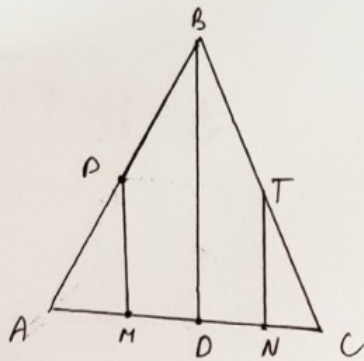


$$\begin{aligned} z + y &= 180^\circ \\ z + \alpha &= 180^\circ \\ y + 2\beta &= 180^\circ \end{aligned}$$

$\alpha - \beta = ?$

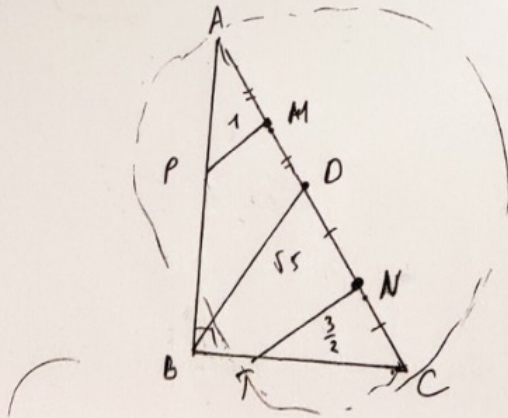
$$2\alpha + 2\beta + 180^\circ = 360^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

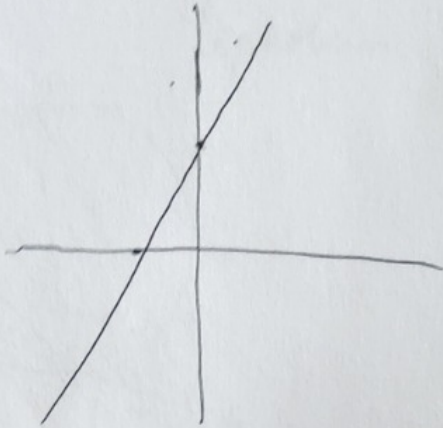


$$x^2 + y^2 = c^2$$

$$\frac{x \cdot y}{2} = ?$$



Чепробна



$$y = 2x - 5$$

$$x_1 = \frac{2a^2}{2a} = a$$

$$y_1 = a^3 - 2a^2 + a^3 + 3$$

$$y = \frac{3}{a}$$

a

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005550**

ID профиля: **222543**

Вариант 10

Числовые страница 1 6-10

№4

0203

$x \neq 0$

$y \neq 0$

$x^2 + y^2 \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Омб:  $(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3})$

~~Умножим~~

$$\frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10$$

$$(x^2+y^2)^2 + 8x^2y^2 = 81$$

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{30}{x^2+y^2} = 31$$

Пусть  $x^2+y^2 = t, t > 0$

$$t^3 - 30t - 30 = 0$$

$$t = -1 < 0$$

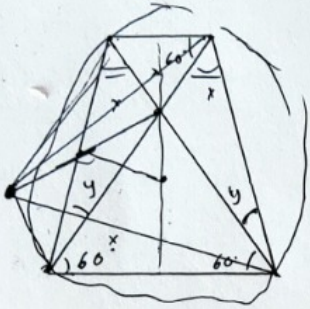
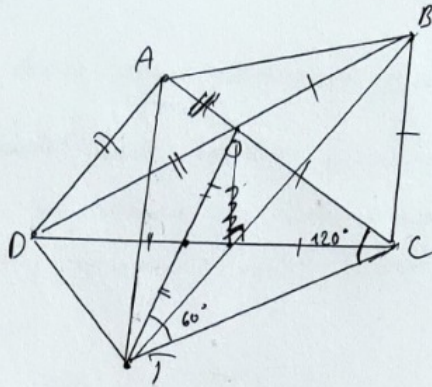
$$t = -5 < 0$$

$$t = 6$$

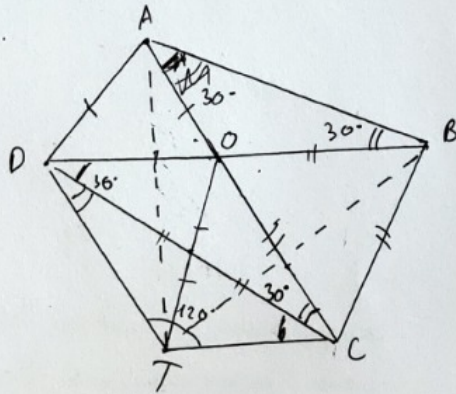
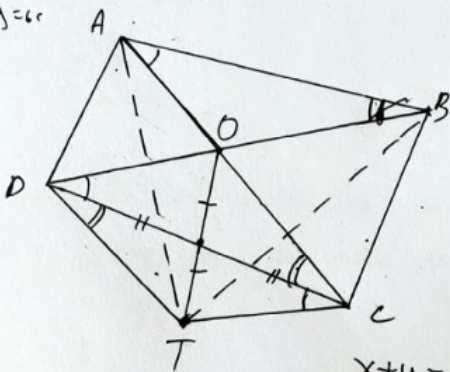
$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} xy = +3 \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases} & \text{I} \begin{cases} (x+y)^2 = 12 \\ xy = 3 \end{cases} & \begin{cases} x+y = \pm\sqrt{12} \\ xy = 3 \end{cases} & \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} xy = -3 \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases} & \text{II} \begin{cases} (x+y)^2 = 0 \\ xy = -3 \end{cases} & \begin{cases} x+y = 0 \\ xy = -3 \end{cases} & \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

Череповице



$x+y=6r$



$$x+y = -\sqrt{12}$$

$$xy = 3$$

$$t^2 + \sqrt{12}t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + \sqrt{3})^2 = 0$$

5 3+2d

81

Четвертая сторона 3

$\Rightarrow \triangle ATB$

$\left. \begin{array}{l} \angle ATB = 60^\circ \\ \angle TAB = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ATB \text{ - равносторонний}$

д)  $BC = 2$   
 $AD = 7$

$\triangle AOB$

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \cos 120^\circ \cdot AO \cdot OB$$

$$AB^2 = 49 + 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2$$

$$AB^2 = 49 + 4 + 14 = 49 + 10 = 67$$

$$AB = \sqrt{67}$$

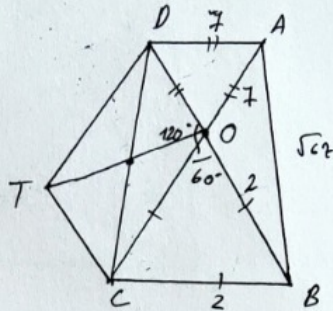
$$S_{ATB} = \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot \sqrt{67} \cdot \sqrt{67} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 67$$

$$S_{ABCD} = S_{DOA} + S_{COB} + 2S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 \cdot 2 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (49 + 4 + 28)$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} 67}{\frac{\sqrt{3}}{4} (81)} = \frac{67}{81}$$

Омб:  $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$

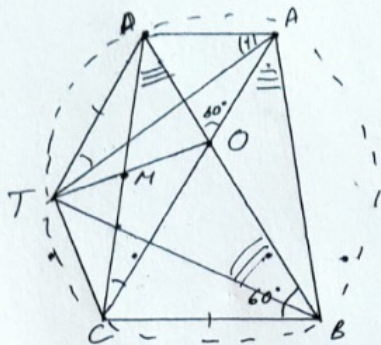


Числовая задача 2.

N3

△ ADO, △ OCB - правильные

T - симметрична O относительно M, где OM = MC



1)  $BD, AC$  - диагонали }  $\Rightarrow ABCD$  - ~~равнобедренная~~ равнобедренная трапеция  
 $\angle DAC = \angle ACB$   
 $AD = CB$

$\Rightarrow$  вокруг нее можно описать окружность  $W_1$

2) T - симметрична O относительно M }  $\Rightarrow TM = OM$   
 $OM = MC$  }  $\Rightarrow DM = MC$   
 $DC, TO$  - диагонали ~~трапеции~~ трапеции  $TDOC$  }  $\Rightarrow$

$\Rightarrow TDOC$  - ~~параллелограмм~~ параллелограмм.  $\Rightarrow \angle DTC = \angle DOC = 180^\circ - \angle ODA = 120^\circ$

$\angle DTC = 120^\circ$

$\angle CBD = 60^\circ$  (△ OCB - прав) }  $\Rightarrow$  вокруг центра трапеции  $TDCB$

можно описать окр., но т.к. вокруг △ ACB можно описать окружность (равност.)

описывать, но можно утверждать, что  $T \in W_1$

3)  $\angle ATB$  - впис. в  $W_1$   
 $\angle ACB$  - впис. в  $W_1 = 60^\circ$  (△ OCB - прав) }  $\Rightarrow \angle ATB = 60^\circ$

4)  $DTCO$  - п-н  $\Rightarrow DT = CO$   
 $CO = CB$  (△ OCB - прав) }  $\Rightarrow \angle ATD = \angle CDB \Rightarrow \angle TDB = \angle CDB$   
 $\angle TDB = \angle DAC$  (на  $\nu AT$ ) }  $\Rightarrow$   
 $\angle CAB = \angle CDB$  (на  $\nu BC$ )

$\Rightarrow \angle TAD = \angle CAB \Rightarrow \angle TAO + \angle TAD = \angle TAO + \angle OAB = 60^\circ \Rightarrow$

№2 Числовая страница 4

П.к. квадрат  $69 \times 69$ , то всего  $68 \cdot 68$  свободных узлов.

Сначала посчитаем кол-во слов, если ставим узел на диагональ  $y=x$ , при этом второй узел не лежит на границе параллельных осей и не лежит на другой диагонали. Узлов в одной диагонали  $68$

$$1) = 68 \cdot (68 - 68 - 68 - 68 + (69 + 69 - 4))$$

↑ все узлы      ↑ узлы диагонали      ↑ узлы на границе

2) аналогично посчитаем для другой диагонали

3) Посчитаем слова, когда узел лежит на одной или на двух диагоналях сразу

$$\frac{68 \cdot 68}{2} \cdot \frac{(2 - 68) \cdot (2 - 68 - 1)}{2}$$

Также стоит заметить, что при ~~каждом~~ любом взятном узле считаем узлы, идущие от него по границе параллельных осей постоянно

Ответ  $\frac{34968}{2} \cdot 2 \cdot 68 (68 \cdot 68 - 4 \cdot 68 + 2) + 68 \cdot (2 \cdot 68 - 1)$



Упробук

$$t^2 - 3 = 0$$

$$t = \sqrt{3}$$

$$\frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10$$

$$xy = a$$

$$x+y = b$$

$$x^4+y^4 + 2x^2y^2 = 81$$

$$t^2 - \sqrt{12}t + 3 = 0$$

$$D = 12 - 12 = 0$$

$$(t - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$t = \sqrt{3}$$

$$18 + 7 \cdot 9$$

$x^2+y^2$

$$(x^2+y^2)^2 + 3x^2y^2 = 81$$

$$\frac{6}{b^2-2a} + a^2 = 10$$

$$(x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81$$

$$\frac{18}{x^2+y^2} + 5x^2y^2 = 30$$

$$\frac{36}{x^2+y^2} + 5x^2y^2 = 50$$

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{18}{x^2+y^2} = 51$$

$$x^2+y^2 = t$$

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{30}{x^2+y^2} = 31$$

$$t^2 - \frac{18}{t} = 51$$

$$\frac{36}{216}$$

$$x^2+y^2 = t \quad \angle 16-30-186$$

$$t^3 - 31t - 30 = 0$$

$$t^3 - 51t - 18 = 0$$

9  
x9

$$\frac{81}{729}$$

1	1	0	-31	-30
t=+1	1	-1	-30	0

$$1 + x^2y^2 = 10$$

$$\frac{99}{393}$$

$$\frac{64}{512}$$

$$t^2t - 30 = 0$$

$$t = -5$$

$$t = 6$$

$$1 + x^2y^2 = 10$$

(t+1)

$$-125 + 155 - 30$$

$$x^2y^2 + x^2y^2 = 9$$

6

$$x^2+y^2 = 6$$

$$x^2+y^2 = 6$$

$$xy = 3$$

$$x^2+y^2 = 6$$

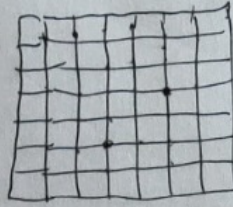
$$xy = -3$$

$$xy = 3$$

$$xy = -3$$

Углубление

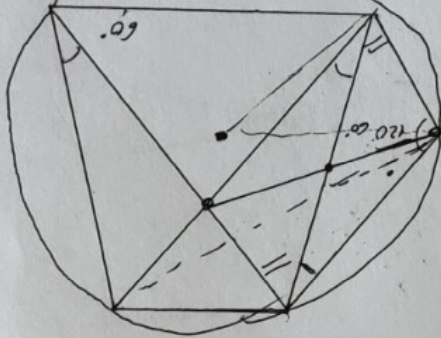
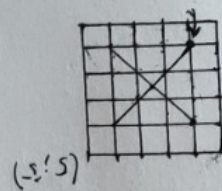
h - 69.69



growth 89 x 89

. 89 II

$$(89(89-1-89.89)) - 89 \text{ I}$$



$$\frac{68.89 \cdot 68.68}{2}$$

89.89

