Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005537**

ID профиля: **364304**

Вариант 10

3. Черновик

$5a^2 - 4ay_A + 8x_A^2 - 4x_Ay_A + y_A^2 + 12ax_A = 0$

$ax_B^2 - 2a^2x_B - ay_B + a^3 + 3 = 0$

$y_B < 2x_B - 5$
$y_A < 2x_A - 5$
или
$y_B > 2x_B - 5$
$y_A > 2x_A - 5$

$y_B = x_B^2 - 2ax_B + a^2 + \frac{3}{a} < 2x_B - 5$

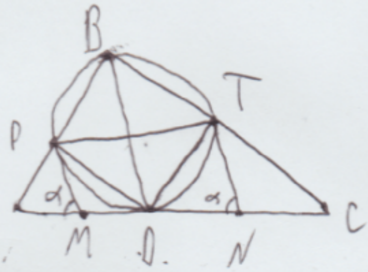
$x_B^2 - 2x_B(a+1) + a^2 + 5 + \frac{3}{a} < 0$

$\cancel{D = 4(a+1)^2 - 4a^2 - 20 - \frac{12}{a}}$

211005537 (U364304 M1277580)

Чистовик

Задача 1.



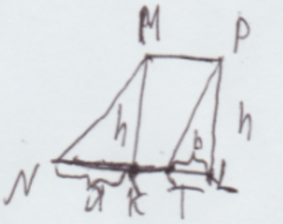
1) Углы $\angle BPD$ и $\angle BTD$ опираются на диаметр BD $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90°$. Тогда и $\angle APD = \angle CTD = 90°$

В прямоугольном $\triangle APD$ PM - медиана, т.к. M - середина AD. В прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы $\Rightarrow PM = \frac{1}{2}AD = MD$. Аналогично, в прямоугольном $\triangle CTD$ $TN = ND$. Из этого следует, что $\triangle PMD$ и $\triangle TND$ - равнобедренные и $\angle NTD = \angle NDT$, ~~...~~ $\angle MDP = \angle MPD$. Если $\angle AMP = \alpha$, то, т.к. он внешний для $\triangle MPD$, $\angle MPD + \angle MDP = 2\angle MDP = \alpha \Rightarrow \angle MDP = \frac{\alpha}{2}$. Так как $PM \parallel TN$, для этих прямых и секущей MN: $\angle TND = \alpha$. $\angle TDN = \frac{180° - \alpha}{2}$ т.к. $\triangle TND$ - равнобедр.

$\angle PDT = 180° - \angle MDP - \angle NDT = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{180° - \alpha}{2} = 90°$. Тогда $PDTB$ - прямоугольник и $\angle ABC = 90°$

2) Медиана делит треугольник на два треуг-ка с равными площадями (т.к. если провести в треуг-ке высоту, она будет общей у обоих треуг-ков, а основания у них равны), поэтому $S_{APM} = S_{PMD}$, $S_{TND} = S_{TNC}$. В прямоугольнике $PBTD$ $S_{PBT} = S_{PDT}$. Поэтому $S_{ABC} = 2S_{MPTN}$.

Рассмотрим 4-угольник $MPTN$.



В нём $MN = MD + DN = MP + NT = 2{,}5$

$PT = BD = \sqrt{5}$

Проведём высоты (см. рис. 1

По т. Пифагора $h^2 + a^2 = 6{,}25$; $h^2 + b^2 = 5$. Вычтем второе равенство из первого: $a^2 - b^2 = 1{,}25$; $(a-b)(a+b) = 1{,}25$.

При этом. $a + KL = b + NT \Rightarrow a + 1 = b + 1{,}5 \Rightarrow a - b = 0{,}5$

$(a-b)(a+b) = 1{,}25$; $a - b = 0{,}5$

$a + b = 2{,}5$

$a = 1{,}5$; $b = 1$; $h^2 = 6{,}25 - a^2 = 4 \Rightarrow h = 2$

$S_{NMPT} = S_{NMK} + S_{KMPL} - S_{TLP} = \frac{ah}{2} + MP \cdot h - \frac{bh}{2} = 1{,}5 + 2 - 1 = 2{,}5$

$S_{ABC} = 2S_{NMPT} = 5$

Ответ: $\angle ABC = 90°$, $S_{ABC} = 5$

Чистовик

Задача 2.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{21+4x-x^2} - 4$

Возведём обе части уравнения в квадрат

$x+3-2\sqrt{21+4x-x^2}+7-x = 4(21+4x-x^2) - 16\sqrt{21+4x-x^2} + 16$

Замена $y = \sqrt{21+4x-x^2}$

$10-2y = 4y^2 - 16y + 16$

$4y^2 - 14y + 6 = 0$

$y = \frac{1}{2}; 3$

Рассмотрим эти два случая

1) $\sqrt{21+4x-x^2} = \frac{1}{2}$

$21+4x-x^2 = \frac{1}{4}$

$84+16x-4x^2 = 1$

$4x^2-16x-83=0$

$x = 2+\frac{\sqrt{99}}{2}; 2-\frac{\sqrt{99}}{2}$

2) $\sqrt{21+4x-x^2} = 3$

$21+4x-x^2 = 9$

$x^2-4x-12=0$

$x=-2; 6$

При этом, на этапе возведения уравнения в квадрат могли появиться лишние корни. При проверке полученных корней корень $x=-2$ даёт неверное равенство $2=6$. Остальные корни подходят

Ответ: $x = 2-\frac{\sqrt{99}}{2}; 6; 2+\frac{\sqrt{99}}{2}$

Черновик

$\sqrt{x+3} = a \qquad \sqrt{7-x} = b$

$a - b + 4 = 2ab$

$a(2b-1) = 4-b$

$a = \frac{4-b}{2b-1}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{21+4x-x^2} - 4$

$10 - 2\sqrt{21+4x-x^2} = 4(21+4x-x^2) + 16 - 16\sqrt{21+4x-x^2}$

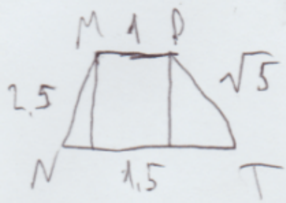
$\sqrt{21+4x-x^2} = y$

$4y^2 - 14y + 6 = 0$

$2y^2 - 7y + 3 = 0$

$D = 49 - 24 = 25$

$y = \frac{7 \pm 5}{4} = 0{,}5;\ 3$

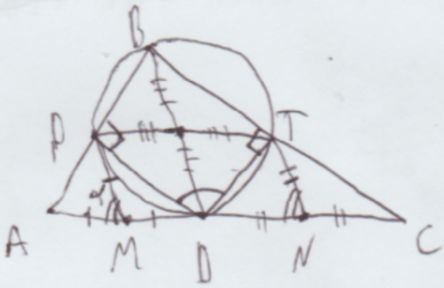


$h^2 + a^2 = 6{,}25$

$h^2 + b^2 = 5$

$a + b = 0{,}5 \qquad (a-b)(a+b) = 1{,}25$

$a - b = 2{,}5$



$\angle D + \frac{\alpha}{2} + \frac{180-\alpha}{2} = 180°$

$\angle D = 90°$

$21 + 4x - x^2 = 9$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$D = 16 + 48 = 64$

$x = \frac{4 \pm 8}{2} = -2;\ 6$

$84 + 16x - 4x^2 = 1$

$4x^2 - 16x - 83 = 0$

$D = 256 + 16 \cdot 83 = 16 \cdot 99$

$x = \frac{16 \pm 4\sqrt{99}}{8} = 2 \pm \frac{\sqrt{99}}{2}$

$p = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

$S = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})\sqrt{5}}$

$30\sqrt{5} - 30 + 75 - 15\sqrt{5} +$

$+ 50 - 10\sqrt{5} + 25\sqrt{5} - 25 =$

$= 70 + 20\sqrt{5}$

$\sqrt{5 - \frac{\sqrt{99}}{2}} - \sqrt{5 + \frac{\sqrt{99}}{2}} + 4 = 1$

$10 - 2\sqrt{25 - \frac{99}{4}} = 9$

$84 + 32 + 8\sqrt{99} - 16 - 8\sqrt{99} - 99$

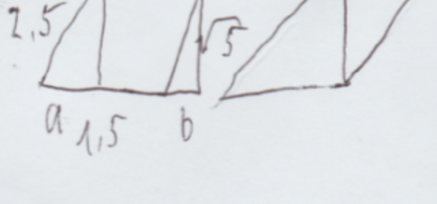
$h^2 + a^2 = 6{,}25$

$h^2 + b^2 = 5$

$a - b = 0{,}5$

$a + b = 2{,}5$

$a = 1{,}5 \qquad b = 1 \qquad h = 2$



211005537 (U364304 M1277580)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005537**

ID профиля: **364304**

Вариант 10

Черновик

$\frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10$

$x^4+y^4+7x^2y^2=81$

$(x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81$

$(x^2+y^2)^2-\frac{30}{x^2+y^2}=31$

$(x^2+y^2)^3-31(x^2+y^2)-30=0$

$x^2+y^2=a$

$a^3-31a-30=0$

$a=-1$

$a^3-31a-30 \;|\; a+1$

$a^3+a^2 \quad\quad a^2-a-30$

$-a^2-31a-30$

$-a^2-a$

$-30a-30$

$a^2-a-30=0$

$a=6;-5$

$x^2+y^2=6$

$x^2y^2=9$

$y^2=\frac{9}{x^2}$

$x^2+\frac{9}{x^2}=6$

$x^4-6x^2+9=0$

$x^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}$; $y=\pm\sqrt{3}$

68×68

544

288

3424

3424×136

20544

10272

3424

465664

-27268

438396

136×201

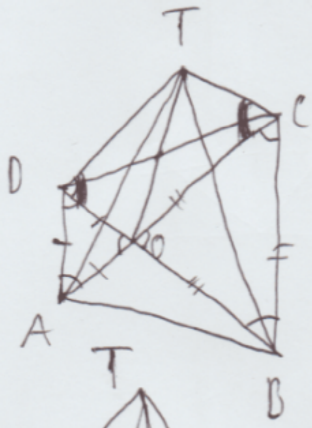
136

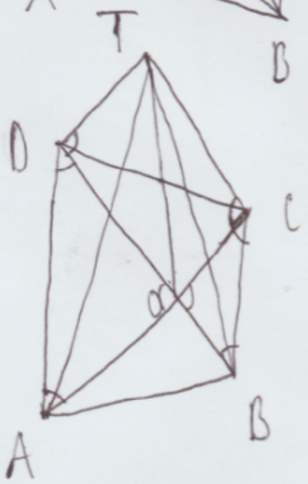
272

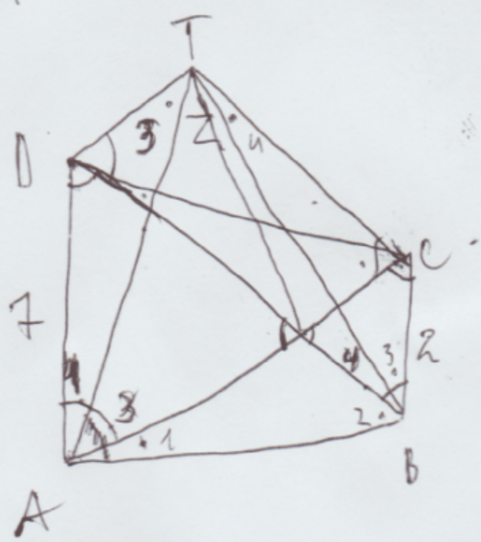
27336

-68

27268







$136\cdot(68^2-136-132)+135\cdot 66$

$135\cdot 68-136\cdot 268=68(135-5$

$\frac{136\cdot 133}{2}$ $\quad \frac{135\cdot 136}{2}-136$

Чистовик

Задача 1

Разложим $7x^2y^2$ во втором уравнении на $2x^2y^2+5x^2y^2$

$x^4+2x^2y^2+y^4+5x^2y^2=81$

$(x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81$

Выразим из первого уравнения системы $x^2y^2=10-\frac{6}{x^2+y^2}$ и подставим:

$(x^2+y^2)^2+50-\frac{30}{x^2+y^2}=81$

Замена $x^2+y^2=a$

$a^2+50-\frac{30}{a}=81$

$a^2-31-\frac{30}{a}=0$

$a^3-31a-30=0$

Заметим, что $a=-1$ является корнем данного уравнения, поэтому его можно записать в виде $(a+1)(a^2-a-30)=0$ или $a^2-a-30=0$ (a^2-a-30 получено при делении столбиком многочлена $a^3-31a-30$ на $a+1$)

Отсюда $a=-5;6$. Но $a=x^2+y^2\geqslant 0 \Rightarrow$ корни -1 и -5 не подходят.

$x^2+y^2=6$

$\frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \Rightarrow 1+x^2y^2=10;\ x^2y^2=9$

Подставляя $y^2=6-x^2$ получим $x^2(6-x^2)=9$

$x^4-6x^2+9=0$

$x^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}$

$y=\pm\sqrt{3}$ т.к. $y^2=6-x^2=3$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

211005537 (U364304 M1277581)

Чистовик

Задача 2

Мы можем выбрать узлы из квадрата 68×68. На прямой $y=x$ лежит 68 узлов из сетки, а на прямой $y=69-x$ лежит 68 узлов, т.е. всего есть 136 вариантов выбрать узел, лежащий ~~[illegible]~~ на прямой $y=x$ или $y=69-x$ (никакие 2 узла не совпадают друг с другом, т.к. равенство $x=69-x$ не имеет целых решений). После того, как мы выбрали узел, лежащий на одной из прямых $y=x$ или $y=69-x$, второй узел может быть где угодно, но не на одной горизонтали и не на одной вертикали с первым. Поэтому кол-во способов выбрать второй узел $68^2-68\cdot 67=$ $=68^2-135$. Всего способов $136(68^2-135)$. Но при этом мы дважды посчитали случаи, когда оба узла лежат на $y=x$ или $y=69-x$. Такого быть не должно, ведь при перестановке узлов местами ничего не меняется. Поэтому, нужно ещё вычесть кол-во таких повторов. ~~$\frac{68^2}{136} - \frac{135\cdot 136}{2} = 135\cdot 68$~~ Оно равно $\frac{136\cdot 133}{2}$, т.к.

~~Ответ: $136\cdot 68^2 - 135\cdot 204$~~ первый узел можно выбрать 136 способами, а второй 133, ведь его нельзя брать в той же вертикали или горизонтали, что и первый, и нельзя совместить с первым $136-3=133$.

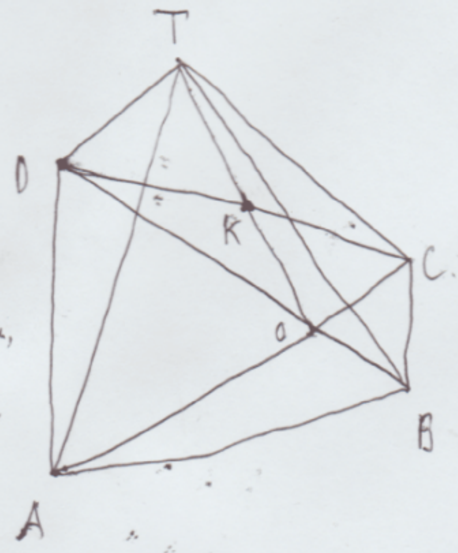
Ответ: $136(68^2-135)-\frac{136\cdot 133}{2}=136(68^2-201{,}5)=438\,396$

211005537 (U364304 M1277581)

Чистовик

Задача 3.

K- середина ~~стороны~~ отрезка DC



а) По условию $DK = KC$. В силу симметричности O и T относительно точки K $TK = OK$. Раз в ч-угольнике $DTCO$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, то это параллелограмм. $\angle AOD = 60° \Rightarrow \angle DOC = \angle AOB = 120°$, $\angle ODT = \angle OCT = 60°$

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60° + 60° = 120°$

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60° + 60° = 120°$

Рассмотрим $\triangle AOB$, $\triangle TCB$ и $\triangle ADT$. В них $\angle ADT = \angle BCT = \angle AOB = 120°$

$BC = OB$ т.к. $\triangle OBC$ - правильный, $DT = OC = BC$ т.к. $DTCO$ - параллелограмм.

Аналогично, в правильном $\triangle ADO$ $AO = AD = DO$, и в пар-мме $DTCO$ $TC = DO$

Таким образом, $\triangle AOB = \triangle TCB = \triangle ADT$ по двум сторонам и углу между ними $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB = TB = AT$ ч.т.д.

б) Найдем площадь ч-угольника $ABCD$. $S_{BOC} = \frac{BO \cdot OC \sin 60°}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

$S_{AOD} = \frac{AO \cdot OD \sin 60°}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$ $\quad S_{AOB} = S_{DOC} = \frac{7 \cdot 2 \cdot \sin 120°}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = \sqrt{3} + \frac{49\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

Теперь найдем площадь $\triangle ABT$. По теореме косинусов в $\triangle AOB$:

$AB = \sqrt{2^2 + 7^2 - 2 \cdot 2 \cdot 7 \cos 120°} = \sqrt{67}$

$S_{ABT} = \frac{AB \cdot BT \sin 60°}{2} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}.$

211005537 (U364304 M1277581)