Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005482**

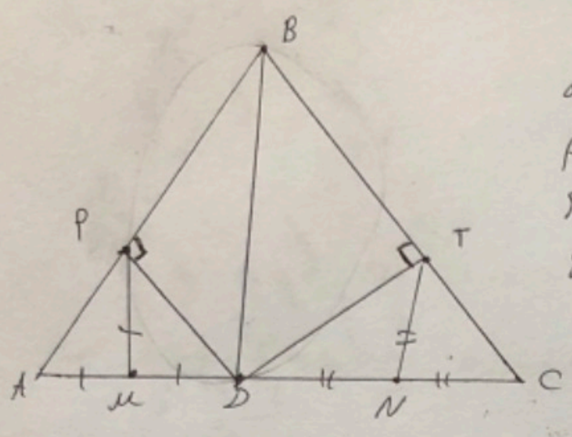
ID профиля: **137482**

Вариант 10

№ 1.

а) $\angle ABC$ — ? б) $MP = 1$; $TN = 3/2$; $BD = \sqrt{5}$

S_{ABC} — ?



Решение:

а) BD — диаметр окружности ω, P и T лежат на ω (по условию). Тогда $\angle BPD = \angle BTD = 90°$. Тогда $\angle APD = \angle DTC = 90°$ и $\triangle APD$, $\triangle TDC$ — п/угол.

M — середина гипотенузы AD п/у $\triangle APD$. Тогда

$PM = AM = MD = \frac{AD}{2}$. Значит, $\triangle PMD$ — р/б.

Аналогично, N - середина гипотенузы CD п/у $\triangle TDC$. Тогда $TN = DN = CN = \frac{CD}{2}$ и $\triangle DTN$ - р/б. Пусть $\angle PMD = \alpha$. $PM \parallel TN$, поэтому $\angle DNT = 180 - \angle PMD = 180 - \alpha$. $\triangle PMD$ - р/б ($PM = MD$), поэтому $\angle PDM = \frac{180 - \angle PMD}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$; $\triangle TND$ - р/б ($DN = TN$), тогда $\angle TDN = \frac{180 - \angle DNT}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Тогда $\angle PDT = 180 - \angle TDN - \angle PDM = 90°$. Тогда

$\angle ABC = 360 - \angle BPD - \angle BTD - \angle PDT = 90° = \angle BPD = \angle BTD = \angle PDT$ (значит, $PBTD$ - прямоугольник).

б) $\angle BPD = 90°$. По теореме Пифагора, $PB^2 + PD^2 = BD^2 = 5$.

По теореме косинусов, $PD^2 = PM^2 + MD^2 - 2\cos\angle PMD \cdot PM \cdot MD = 2PM^2(1 - \cos\alpha) = 2 - 2\cos\alpha$

$TD^2 = DN^2 + TN^2 - 2\cos\angle DNT \cdot DN \cdot TN = 2TN^2(1 - \cos(180 - \alpha)) = 2 \cdot \frac{9}{4} \cdot (1 + \cos\alpha) = 4{,}5 + 4{,}5\cos\alpha$.

1

PBTD – прямоугольник, поэтому, PB = TD.

Тогда $5 = BD^2 = PB^2 + PD^2 = TD^2 + PD^2 =$

$= 2 - 2\cos\alpha + 4{,}5 + 4{,}5\cos\alpha$

$2{,}5\cos\alpha = -1{,}5$

$\cos\alpha = -0{,}6.$

$180° > \alpha > 0°$; поэтому $\sin\alpha > 0$. Тогда по основному тригонометрическому тождеству,

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = 0{,}8.$

Тогда $PD^2 = 2 - 2\cos\alpha = 2 - 2(-0{,}6) = 3{,}2 = 16 \cdot 0{,}2$

$PD = 4\sqrt{0{,}2}.$

$\cancel{TD^2 = 4{,}4}$ $TD^2 = 4{,}5(1+\cos\alpha) = 4{,}5 \cdot 0{,}4 = 9 \cdot 0{,}2$

$TD = 3\sqrt{0{,}2}.$

$AD = 2PM = 2$; $CD = 2TN = 3.$

Тогда $S_{PBTD} = PD \cdot TD = 12 \cdot 0{,}2 = 2{,}4.$

$S_{APD} = \frac{PM \cdot AD \cdot \sin\angle PMD}{2} = \frac{PM \cdot AD \cdot \sin\alpha}{2} =$

$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 0{,}8}{2} = 0{,}8$

$S_{TDC} = \frac{TN \cdot CD \cdot \sin\angle DNT}{2} = \frac{TN \cdot CD \cdot \sin(180-\alpha)}{2} =$

$= \frac{TN \cdot CD \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 0{,}8}{2} =$

$= 1{,}8$

Тогда $S_{ABC} = S_{PBTD} + S_{APD} + S_{TDC} = 2{,}4 + 0{,}8 + 1{,}8 = 5$

Ответ: а) $\angle ABC = 90°$

б) $S_{ABC} = 5$

2

211005482 (U137482 M1277598)

№ 2.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2} = 2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}$

Пусть $\sqrt{x+3} = a$; $\sqrt{7-x} = b$.

Тогда $a - b + 4 = 2ab$

$a^2 + b^2 = x+3+7-x = 10$

$\Downarrow$

$a - b + 4 + a^2 + b^2 = 2ab + 10$

$(a-b) + (a^2+b^2-2ab) - 6 = 0$

$(a-b)^2 + (a-b) - 6 = 0.$

Пусть $a - b = c$. Тогда $c^2 + c - 6 = 0$

$(c+3)(c-2) = 0$

$\Downarrow$

$c = -3$ либо $c = 2$

Рассмотрим оба случая:

I) $c = 2$

$\Downarrow$

$a = b + 2$

$\Downarrow$

$(b+2)^2 + b^2 = 10$

$2b^2 + 4b + 4 = 10$

$b^2 + 2b - 3 = 0$

~~$(b-3)(b+1) = 0$~~

~~$b = 3$ либо $b = -1$.~~

~~$b = \sqrt{7-x} \geq 0$, поэтому значение $b = -1$ не удовлетворяет условиям.~~

~~Тогда $b = 3 \Rightarrow$~~

$(b+3)(b-1) = 0.$

$b = -3$ либо $b = 1$; $b = \sqrt{7-x} \geq 0$, поэтому значение $b = -3$ не удовлетворяет условиям.

Тогда $b = 1 \Rightarrow x = 6$.

3

Подставив $x = 6$ в исходное уравнение, получим верное равенство: $\sqrt{9} - \sqrt{1} + 4 = 2\sqrt{9}$

II) $c = -3$

$a = b - 3$

$(b-3)^2 + b^2 = 10$

$2b^2 - 6b + 9 = 10$

$2b^2 - 6b - 1 = 0$

Тогда получаем два корня этого уравнения:

$$b = \frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{3}{2} \quad и \quad b = -\frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{3}{2}.$$

$$3 < \sqrt{11},$$

поэтому $b = -\frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{3}{2} < 0$. Тогда значение $b = -\frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{3}{2}$ не удовлетворяет условиям $(b = \sqrt{7-x} \geq 0)$.

Значит, $b = \frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2 - \frac{3\sqrt{11}}{2}$.

Подставив $x = 2 - \frac{3\sqrt{11}}{2}$ в исходное уравнение, получим верное равенство.

$$\cancel{\sqrt{5 - \frac{3\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{5 + \frac{3\sqrt{11}}{2}} + 4 = 2\sqrt{5 - 3\sqrt{11}}}$$

$$\sqrt{5 - \frac{3\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{5 + \frac{3\sqrt{11}}{2}} + 4 = 2\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{3}{2} - \left(\frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{3}{2}\right) + 4 = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$1 = 1$$

Ответ: $x_1 = 6$; $x_2 = 2 - \frac{3\sqrt{11}}{2}$.

№3. $5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$.

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$.

$2x-y=5$.

$a-?$

Решение:

Пусть $(x_a; y_a)$ — координаты точки A.

$(x_b; y_b)$ — координаты вершины параболы B.

Пусть $a=0$. Тогда $0\cdot x^2-2\cdot 0\cdot x-0\cdot y+0+3=0$

$3=0$ (противоречие)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a\neq 0}.$$

I) Тогда запишем уравнение параболы с вершиной в следующим образом:

$$ay=ax^2-2a^2x+a^3+3$$

$$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}.$$

Тогда $x_b=\dfrac{-(-2a)}{2\cdot 1}=a$

$$y_b=x_b^2-2ax_b+a^2+\frac{3}{a}=a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}.$$

II) Рассмотрим уравнение $5a^2-4ay_a+8x_a^2-4x_ay_a+y_a^2+12ax_a=0$

$$y_a^2+y_a(-4a-4x_a)+(8x_a^2+12ax_a+5a^2)=0$$

Это квадратное уравнение относительно y_a.

Найдём дискриминант: $D=(-4a-4x_a)^2-4(8x_a^2+12ax_a+5a^2)=$

$$=-4a^2-16x_a^2-16ax_a=$$

5 $$=-4(a+2x_a)^2$$

Тогда $D\le 0$ (так как $(a+2x_a)^2\ge 0$).

Но чтобы уравнение имело решених, $D\geq 0$.

Тогда $D=0$.

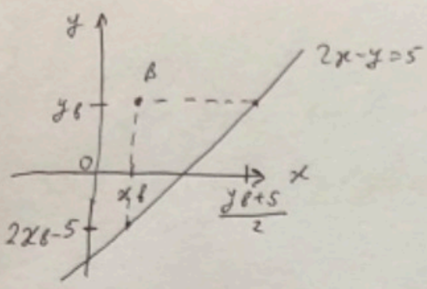
и

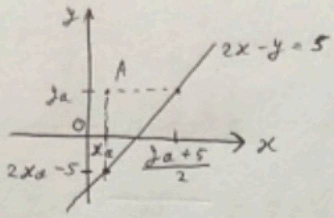
$$x_a = -\frac{a}{2}.$$

$$y_a = \frac{4a + 4x_a \pm \sqrt{D}}{2} = 2a + 2x_a = 2a + 2\left(-\frac{a}{2}\right) = a.$$

Рассмотрим два случая:

I) Точки A и B лежат выше прямой $2x-y=5$.





Тогда $y_a > 2x_a - 5$; $x_a < \frac{y_a+5}{2}$.

То есть, $y_a > 2x_a - 5$

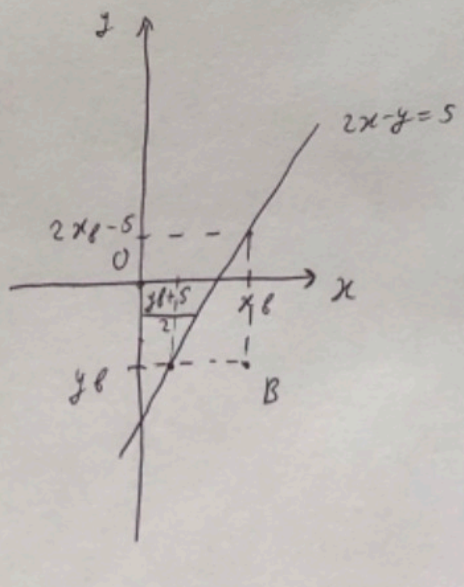
Аналогично для точки B: $y_b > 2x_b - 5$.

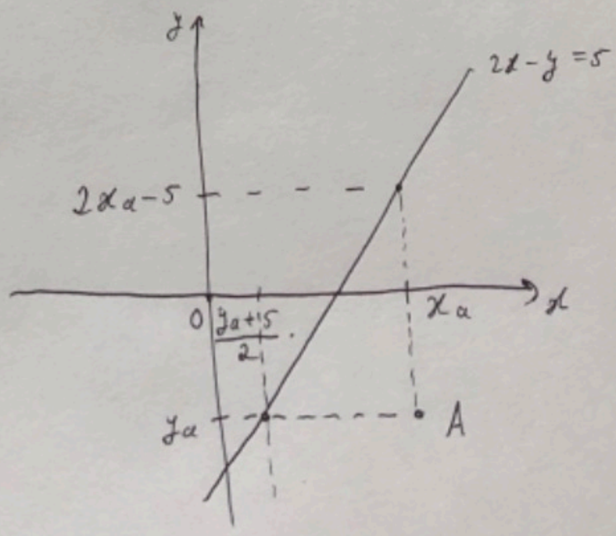
Тогда $a > -2,5$; $\frac{3}{a} > 2a - 5$.

а) Если $a > 0$, то $3 > 2a^2 - 5a$; тогда $a \in (-0,5; 3)$. Так $a > 0$, $a > -2,5$, значит $\boxed{a \in (0; 3)}$.

б) Если $a < 0$, то $3 < 2a^2 - 5a$; тогда $a \in (-\infty; -0,5) \cup (3; +\infty)$. Так как $a < 0$, $a > -2,5$, значит $\boxed{a \in (-2,5; -0,5)}$

II) Точки A и B обе лежат ниже прямой $2x-y=5$.





Тогда $y_a < 2x_a - 5$; $x_a > \frac{y_a+5}{2}$; $y_b < 2x_b - 5$; $x_b > \frac{y_b+5}{2}$

То есть, $a < -2{,}5$; $\frac{3}{a} < 2a - 5$.

~~в) Если $a < 0$, то получаем противоречие, так как $a < -2{,}5$~~

$a < -2{,}5 < 0$.

Поэтому, $3 > 2a^2 - 5a$. Тогда $a \in (-0{,}5; 3)$.

Но это противоречит тому, что $a < -2{,}5$.

Таким образом, $a \in (-2{,}5; -0{,}5) \cup (0; 3)$.

Ответ: $a \in (-2{,}5; -0{,}5) \cup (0; 3)$.

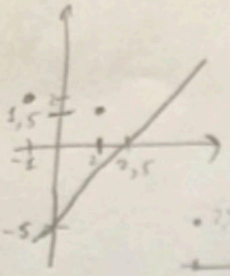
7

211005482 (U137482 M1277598)

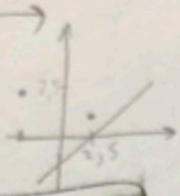
$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$

$a = ?$

$y^2 + y(-4a - 4x) + 8x^2 + 12ax + 5a^2 = 0$



$D = 16a^2 + 16x^2 + 32ax - 48ax - 32x^2 - 20a^2 =$



$= -4a^2 - 16x^2 - 16ax =$

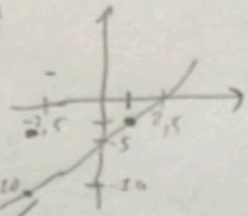
$= -4(a^2 + 4ax + 4x^2) =$

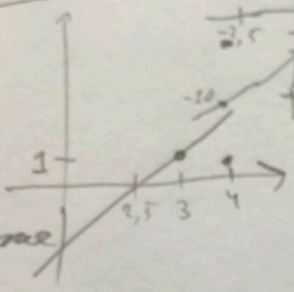
$= -4(a + 2x)^2 \geq 0$

Черновик

$= 0$

$\boxed{x = -\frac{a}{2}}$





$y = \frac{4a - 2a}{2} = a$

II) обе ниже

$\Updownarrow$

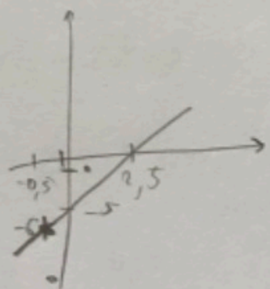
$\frac{3}{a} < 2a - 5;\ a > \frac{\frac{3}{a} + 5}{2}$.

$\frac{3}{a} < 2a - 5$

$a < -a - 5$

$2a < -5$

$\boxed{a < -2,5}$



$\Updownarrow$

$a < 0$

$\Updownarrow$

$3 > 2a^2 - 5a$

$0 > 2a^2 - 5a - 3$

$\Updownarrow$

$a \in (-0,5; 3)$, $a < 0$

$\Updownarrow$

$a \in (-0,5; 0)$

(прот.)

Ответ: $a \in (-2,5; -0,5) \cup$

$\cup (0; 3)$.

I) обе выше

$\Updownarrow$

$\frac{3}{a} > 2a - 5;\ a < \frac{\frac{3}{a} + 5}{2}$

$\boxed{\frac{3}{a} > 2a - 5;\ 2a - 5 < \frac{3}{a}}$

$a > -a - 5;\ -\frac{a}{2} < \frac{a + 5}{2}$

$5 > -2a$

$2a > -5$

$\boxed{a > -2,5}$

при $a > 0$:

$3 > 2a^2 - 5a$

$0 > 2a^2 - 5a - 3$

$D = 25 + 24 = 49$

$a_1 = \frac{5 + 7}{4} = 3;\ a_2 = \frac{5 - 7}{4} = -\frac{1}{2}$

$\boxed{a \in (-0,5, 3)}$

$\Updownarrow$

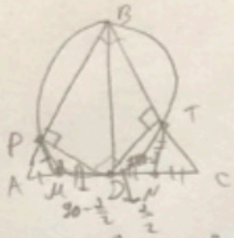
$\boxed{a \in (0; 3)}$

при $a < 0$:

$3 < 2a^2 - 5a;\ a \in (-\infty; -0,5) \cup (3; +\infty)$

$\Updownarrow$

$\boxed{a \in (-2,5; -0,5)}$.



$\angle PDT = 90^\circ$

$\boxed{\angle ABC = 90^\circ}$

$MP = 1$

$NT = \frac{3}{2}$

$BD = \sqrt{5}$

$S_{ABC} - ?$

$AD = 2MP = 2$

$CD = 2NT = 3$

$PD^2 = 1 + 1 - 2\cos\alpha \cdot 1 =$

$= 2 - 2\cos\alpha$

$TD^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 2\cos\alpha \cdot \frac{9}{4} =$

$= \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot (1 + \cos\alpha)$.

$\boxed{\text{Черновик}}$

$5 = 2 - 2\cos\alpha + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\cos\alpha$

$-1,5 = 2,5\cos\alpha$

$\cos\alpha = -0,6$; $\sin\alpha = 0,8$.

$S_{APD} = \frac{PA \cdot AD \cdot \sin\alpha}{2} =$

$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 0,8}{2} = 0,8$

$PD^2 = 2 + 2 \cdot 0,6 = 2 + 1,2 = 3,2$

$PD = \sqrt{3,2} = 4\sqrt{0,2}$

$S_{TDC} = \frac{TN \cdot CD \cdot \sin(180 - \alpha)}{2} =$

$= \frac{\frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 0,8}{2} =$

$TD^2 = \frac{9}{2} \cdot (1 - 0,6) = \frac{9}{2} \cdot 0,4 =$

$= \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{5} = 1,8$

$TD = \sqrt{1,8} = 3\sqrt{0,2}$

$= \frac{9 \cdot 0,8}{4} = 9 \cdot 0,2 = 1,8$

$\sin\angle PDB = \frac{3\sqrt{0,2}}{\sqrt{5}} =$

$= \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} = -\cos\alpha$

$S_{BPDT} = PD \cdot DT =$

$\angle PDB = 90 + \alpha$

$= 4\sqrt{0,2} \cdot 3\sqrt{0,2} = 12 \cdot 0,2 = 2,4$

$90 + \alpha + 90 - \frac{\alpha}{2} = 180 + \frac{\alpha}{2}$

$2,4 + 1,8 + 0,8 = 2,4 + 2,6 = 5$

$a^2 + b^2 +$

$+ (a - b) + 4 = 10 + 2ab$

$(a - b)^2 + (a - b) = 6$

$(a - b)(a - b + 1) = 6$.

$(a - b) = c$

$c^2 + c - 6 = 0$

$D = 1 + 24 = 25 = 5^2$

$c_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$c_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$

$a - b = 2$

$a + 4 = b(2a + 1)$

$a \geq 0$

$2a + 1 > 0$

$b = \frac{a+4}{2a+1}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21 + 4x - x^2}$

$x + 3 + 7 - x + 16 - 2\sqrt{-x^2 + 21 + 4x} + 8\sqrt{x+3} - 8\sqrt{7-x} =$

$= 4(21 + 4x - x^2)$.

~~$\sqrt{x+3} = 2$~~

$a = b + 2$

$\sqrt{x+3} = a$

$10 = 2b^2 + 4b + 4$

$\sqrt{7-x} = b$

$0 = b^2 + 2b - 3$

$a^2 + b^2 = 10$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}$

$\boxed{x = 6}$; $\boxed{a = 3}$ (верно)

$D = 4 + 12 = 16 = 4^2$; $b_1 = \frac{-2-4}{2} < 0$ (не уд. усл.); $b_2 = \frac{-2+4}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{7-x} = 1$

$a - b + 4 = 2ab$

211005482 (U137482 M1277598)

~~$10 = a^2 + \frac{a^2+8a+16}{4a^2+4a+1}$~~

~~$40a^2+40a+10 = 4a^4+4a^3+a^2+a^2+8a+16$~~

~~$0 = 4a^4+4a^3-38a^2-32a+6$~~

~~$0 = 2a^4+2a^3-19a^2-16a+3$~~

$\boxed{\text{Черновик}}$

$c = -3$

$a = b-3$

$2b^2-6b+3=10$

$2b^2-6b-1=0$

$D = 36+8 = 44 = 2\sqrt{11}$

$b_1 = \frac{6-2\sqrt{11}}{4} < 0$ (против.)

$b_2 = \frac{6+2\sqrt{11}}{4} = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{7-x}$

$\frac{9}{4}+\frac{11}{4}+\frac{3\sqrt{11}}{2} = 7-x$

$x = \frac{28}{4}-\frac{20}{4}-\frac{3\sqrt{11}}{2} =$

$= 2-\frac{3\sqrt{11}}{2}.$

~~$a = b-3 = \frac{\sqrt{11}}{2}-\frac{3}{2}$~~

~~$5-\frac{3\sqrt{11}}{2}$~~

Ответ: $x = 6$

$x = 2-\frac{3\sqrt{11}}{2}.$

$5-\frac{3\sqrt{11}}{2} = \left(\frac{\sqrt{11}}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}+\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{11}}{2}.$

№ 3.

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0.$

$ax^2-2a^2x+a^3+3=ay$

Пусть $a=0$

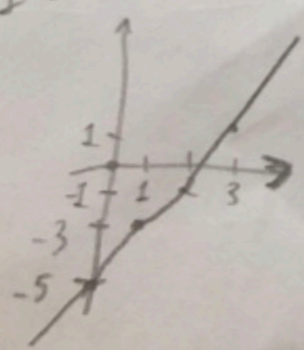
$0=3$ (против.)

$x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}=y.$

$x_0 = \frac{2a}{2} = a$

$y = a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a} = \frac{3}{a}$

$y = 2x-5$



211005482 (U137482 M1277598)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005482**

ID профиля: **137482**

Вариант 10

№ 2.

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Пусть $a = x^2+y^2$; $b = x^2y^2$.

Тогда $\frac{6}{a} + b = 10$

$$81 = x^4+y^4+7x^2y^2 = x^4+y^4+2x^2y^2+5x^2y^2 = a^2+5b$$

Тогда $81 - a^2 = 50 - \frac{30}{a}$

$$81a - a^3 = 50a - 30$$

$$a^3 - 31a - 30 = 0$$

$$(a-6)(a+5)(a+1) = 0.$$

Тогда $a = 6$ либо $a = -5$ либо $a = -1$.

Но $a = x^2+y^2 \geq 0$. Поэтому значения $a = -5$ и $a = -1$ не удовлетворяют условиям.

Тогда $a = 6$

$$\Downarrow$$

$$\frac{6}{6} + b = 10; \quad b = 9.$$

$$x^2+y^2 = 6$$

$$x^2y^2 = 9$$

$$y^2 = \frac{9}{x^2} = 6 - x^2$$

1

$$9 = 6x^2 - x^4$$

$$x^4 - 6x^2 + 9 = 0$$

$$(x^2-3)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}.$$

Тогда $y^2 = 6 - x^2 = 3$; $y = \pm\sqrt{3}$.

Подставив $x = \pm\sqrt{3}$ и $y = \pm\sqrt{3}$ в исходную систему уравнений, получим равенства:

$$\begin{cases} \frac{6}{6} + 9 = 10 \\ 9 + 9 + 7 \cdot 9 = 81 \end{cases}$$

Ответ: $(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3})$

2

211005482 (U137482 M1277599)

№ 5.

Заметим, что если два узла лежат на прямой, параллельной одной из координатных осей, то они имеют одинаковую абсциссу или ординату. Кол-во узлов внутри квадрата (не включая границы) — 68^2. Из них

$68+68=2\cdot 68$ узлов лежат на прямой $y=x$ или $y=69-x$ (т.е. $(1;1), (2;2), \dots, (68,68); (1,68), (2,67), \dots, (68,1)$).

Тогда $68^2-2\cdot 68=66\cdot 68$ узлов внутри квадрата не лежат на прямой $y=x$ или прямой $y=69-x$. Рассмотрим какой-то узел A, лежащий внутри квадрата на прямой $y=x$ или $y=69-x$. Рассмотрим какой-то другой узел внутри квадрата — B. Если B лежит на прямой $y=x$ или $y=69-x$, то кол-во способов выбрать такую B — $(2\cdot 68-3)$. (так как 1 из ~~точек~~ узлов на прямой $y=x$ или $y=69-x$ внутри квадрата совпадает с A, а ещё 2 имеют ту же абсциссу или ординату).

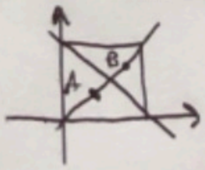
Тогда способов выбрать 2 узла внутри квадрата, лежащие на $y=x$ или $y=69-x$, равно

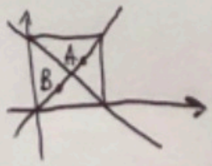
$$\frac{2\cdot 68\cdot(2\cdot 68-3)}{2}=68\cdot(2\cdot 68-3)=$$

$$=68\cdot 133.$$

(так как каждую из таких пар узлов A и B мы выбираем по 2 раза).

③





Если B не лежит на прямой $y=x$ или $y=69-x$, то способов выбрать такую B:

$$66\cdot 68-2\cdot 67+2=66\cdot 68-2\cdot 66$$

(так как $2\cdot 67$ узлов внутри квадрата (не считая самого A) имеют ту же абсциссу или ординату, что и A).
(2 из таких узлов лежат на $y=x$ или $y=69-x$).

Тогда способов выбрать 1 узел внутри квадрата, лежащий на $y=x$ или $y=69-x$, и 1 узел внутри квадрата, не лежащий на этих прямых: $2\cdot 68\cdot(66\cdot 68-2\cdot \cancel{67}\,66)$.

Тогда всего способов выбрать 2 узла внутри квадрата, хотя бы 1 из которых лежит на $y=x$ либо $y=69-x$: $\cancel{68\cdot 133+2\cdot 68\cdot(66\cdot 68-2\cdot 67)=68\cdot 133+2\cdot 68^2\cdot 66-4\cdot 68\cdot 67}$

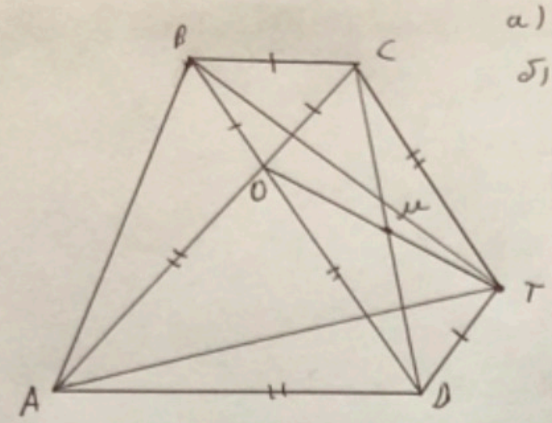
~~Ответ:~~ $\cancel{68\cdot 133+2\cdot 68^2\cdot 66-4\cdot 68\cdot 67}$.

$$68\cdot 133+2\cdot 68\cdot(66\cdot 68-2\cdot 66)=68\cdot 133+2\cdot 68\cdot 66^2=$$
$$=68(133+2\cdot 66^2)$$

Ответ: $68(133+2\cdot 66^2)$.

4

№ 6



а) д-ть, что $\triangle ABT$ – прав.

б) $BC = 2$; $AD = 7$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

Решение:

а) Пусть M – середина CD. Тогда точки O, M, T лежат на 1 прямой, причём $OM = MT$

(так как T и O симметричны относительно M).

$CM = MD$; $OM = MT$. Тогда $OCTD$ – параллелограмм.

Значит, $TD = OC$; $CT = OD$.

$\triangle AOD$ – прав., поэтому, $CT = OD = AD = AO$.

$\triangle BOC$ – прав., поэтому, $TD = BC = OC = BO$.

$\triangle AOD$, $\triangle BOC$ – прав., поэтому $\angle BOC = \angle AOD = 60°$.

Тогда $\angle AOB = 180 - \angle BOC = 120°$.

$OCTD$ – пар-мм, поэтому $\angle ODT = \angle OCT =$

$= 180 - \angle COD = 180 - (180 - \angle BOC) =$

$= \angle BOC = 60°$.

Тогда $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60° + 60° = 120°$

~~$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60° + \angle 0$~~

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60° + 60° = 120°$.

Значит, $\angle AOB = \angle ADT = \angle BCT = 120°$

$AO = AD = CT$

5 $BO = DT = BC$.

Тогда $\triangle AOB$, $\triangle ADT$, $\triangle BCT$ – равны (по I признаку).

Значит, $AB = AT = BT$, и $\triangle ABT$ – прав. ч.т.д.

б) По теореме косинусов,

$$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2\cos\angle BCT \cdot BC \cdot CT$$

$BC = 2$; $CT = AD = 7$; $\angle BCT = 120°$

Тогда $BT^2 = 4 + 49 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot 7 =$

$= 53 + 14 = 67$

$BT^2 = 67$.

Тогда, так как ΔABT - правильный,

$$S_{ABT} = \frac{BT^2\sqrt{3}}{4} = 67\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$AC = AO + OC = AD + BC = 9$

$BD = BO + OD = BC + AD = 9$.

$\angle AOD = 60°$.

Тогда $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\angle AOD}{2} = \frac{81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$

$= 81\frac{\sqrt{3}}{4}$

Тогда $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$

Ответ: б) $\frac{67}{81}$.

6