Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005477**

ID профиля: **379853**

Вариант 10

Чистовик. Задание 2.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

ОДЗ: $x \geq -3$; $x \leq 7$. $\Rightarrow$ $x \in [-3; 7]$.

Заметим, что $-x^2 + 4x + 21 = -(x+3)(x-7)$

или $-x^2 + 4x + 21 = (x+3)(7-x)$.

Тогда получим:

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$.

Пусть $\sqrt{x+3} = t$; $\sqrt{7-x} = k$, $t \geq 0$; $k \geq 0$.

Тогда $t - k + 4 = 2tk$.

Заметим, что $t^2 + k^2 = 10$, тогда

получим систему: $\begin{cases} t - k + 4 = 2tk \\ t^2 + k^2 = 10 \end{cases}$

Имеем, что $(t-k)^2 = t^2 - 2tk + k^2$, отсюда

$t^2 + k^2 = (t-k)^2 + 2tk$.

С учетом этого, получим:

$\begin{cases} t - k + 4 = 2tk \\ (t-k)^2 + 2tk = 10 \end{cases} \Leftrightarrow (t-k)^2 + (t-k) - 6 = 0$

Заменим $t - k = m$: $m^2 + m - 6 = 0$.

По теореме Виета: $\begin{cases} m_1 + m_2 = -1 \\ m_1 \cdot m_2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = -3 \end{cases}$.

Отсюда получим: $\left[\begin{array}{l} t - k = 2 \\ t - k = -3 \end{array}\right.$

~~Черновик~~

Чистовик

Получим совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t-k=2\\ t-k+4=2tk\end{cases}\\ \begin{cases} t-k=-3\\ t-k+4=2tk\end{cases}\end{array}\right.$$

Из первой системы, получим $tk=3$

Из второй: $tk=\frac{1}{2}$

Тогда равносильная совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t-k=2\\ tk=3\end{cases}\\ \begin{cases} t-k=-3\\ tk=\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первую систему:

$\begin{cases} t-k=2\\ tk=3.\end{cases}$ Выразим из первого уравнение $t=2+k$, подставим во второе и решим:

$k^2+2k-3=0$

$D_1=1+3=4 \Rightarrow k_{12}=-1\pm2=\left\langle\begin{array}{l}1\\ -3\end{array}\right.$

Соответственно: $t_1=3$; $t_2=-1$.

Решим аналогично вторую систему:

$\begin{cases} t=k-3\\ (k-3)k=\frac{1}{2}\end{cases}$ Решим уравнение:

$k^2-3k-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow 2k^2-6k-1=0$

$D_1=9+2=11 \Rightarrow k_{12}=\frac{3\pm\sqrt{11}}{2}$.

Найдем соответствующие t:

$t_1=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$; $t_2=\frac{-3-\sqrt{11}}{2}$

С учетом того, что $k\geq0$; $t\geq0$ получим, что только при $k=1$; $t=3$ или $k_1=\frac{3+\sqrt{11}}{2}$; $t_1=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$ есть решение.

Чистовик.

$t = \sqrt{x+3}$; $k = \sqrt{7-x}$

Получим уравнения:

$\sqrt{7-x} = 1$ $\quad \sqrt{x+3} = 3$ $\quad \sqrt{7-x} = \frac{3+\sqrt{11}}{2}$ $\quad \sqrt{x+3} = \frac{-3+\sqrt{11}}{2}$

$x = 6.$ $\quad x = 6$

Решим $\sqrt{7-x} = \frac{3+\sqrt{11}}{2}$

Возведем обе части в квадрат:

$$7 - x = \frac{9 + 6\sqrt{11} + 11}{4} \Leftrightarrow 28 - 4x = 20 + 6\sqrt{11} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{8 - 6\sqrt{11}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{4 - 3\sqrt{11}}{2}.$$

По ОДЗ: $x \in [-3;7]$.

$$x = 6 \in [-3;7]. \qquad \frac{4-3\sqrt{11}}{2} \vee -3 \Leftrightarrow$$

$$4 - 3\sqrt{11} \vee -6 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} \vee -10 \Leftrightarrow 3\sqrt{11} \wedge 10. \Leftrightarrow$$

$$99 < 100 \Rightarrow \frac{4-3\sqrt{11}}{2} > -3. \Rightarrow$$

$$x \in \left\{ \frac{4-3\sqrt{11}}{2} ; 6 \right\}.$$

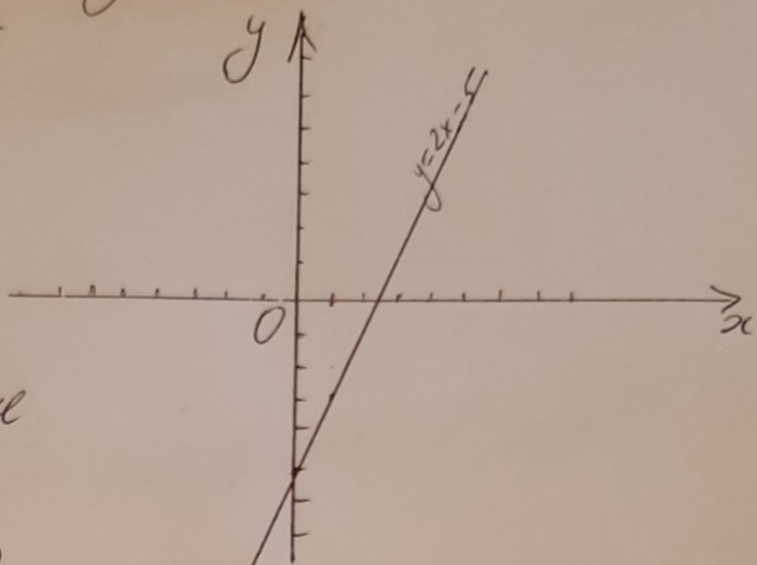
Ответ: $x \in \left\{ \frac{4-3\sqrt{11}}{2} ; 6 \right\}$.

3.

Чистовик. Задание 3.

Построим координатную плоскость

Построим: $y=2x-5$



Рассмотрим уравнение параболы:

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

Выразим y: $y=\frac{ax^2-2a^2x+a^3+3}{a} \Rightarrow y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a} \Leftrightarrow$

$y=(x-a)^2+\frac{3}{a}$. Откуда координаты $B(a;\frac{3}{a})$.

Рассмотрим уравнение точки A:

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

Решим относительно y: $y^2-4y(a+x)+5a^2+8x^2+12ax=0$

$D_1=4(a^2+2ax+x^2)-5a^2-8x^2-12ax=-a^2-4ax-4x^2$

$D_1=-(a+2x)^2$. Заметим $D_1\le 0 \Rightarrow$

$D_1=0 \Rightarrow a+2x=0 \Rightarrow x=-\frac{a}{2}$.

$y^2-4y\frac{a}{2}+5a^2+8\cdot\frac{a^2}{4}+12a\cdot\frac{a}{2}=0$.

Решив, получим: $y=a$. Т.е. точка $A(-\frac{a}{2};a)$

(4).

Чистовик

Найдём точку пересечения $y=2x-5$ с Ox: $x=\frac{5}{2}$. Значит:

$$\begin{cases} a<\frac{5}{2} \\ -\frac{a}{2}<\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-5;\frac{5}{2}\right)\setminus\{0\}.$$

Тогда обе точки находятся в левой полуплоскости.

Рассмотрим такое расположение в правой полуплоскости:

$$\begin{cases} a>\frac{5}{2} \\ -\frac{a}{2}>\frac{5}{2} \end{cases}$$ В этом случае решений нет.

Ответ: $a\in\left(-5;\frac{5}{2}\right)\setminus\{0\}$

5

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005477**

ID профиля: **379853**

Вариант 10

Математика-10.

Часть 2. Чистовик.

Задание 1.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$ ОДЗ: $x\neq 0; y\neq 0$.

Заметим, что $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$, тогда

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81 \\ \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \end{cases}$$ Заменим $x^2+y^2=t$, $x^2y^2=k$.

Получим: $$\begin{cases} t^2+5k=81 \\ \frac{6}{t}+k=10 \end{cases}$$

Выразим k из второго уравнения:

$k=10-\frac{6}{t}$ и подставим в 1-ое:

$t^2+50-\frac{30}{t}=81 \Leftrightarrow t^3-31t-30=0.$

При $t=-1$ уравнение верно. Воспользуемся

методом „уголка":

$$\begin{array}{r|l} t^3-31t-30 & t+1 \\ \cline{2-2} -\,t^3+t^2 & t^2-t-30 \\ \hline -t^2-31t & \\ -\,-t^2-t & \\ \hline -30t-30 & \\ -\,-30t-30 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

①

211005477 (U379853 M1277607)

Чистовик.

Тогда $t^3-31t-30=0 \Leftrightarrow$

$(t+1)(t^2-t-30)=0.$

Одно из решений: $t=-1$.

Решим уравнение $t^2-t-30=0$

$D=1+4\cdot 30=121 \Rightarrow t_{12}=\frac{1\pm 11}{2}=\left[\begin{array}{l}6\\-5.\end{array}\right.$

Т.к. $t=x^2+y^2\geq 0 \Rightarrow t\in\{6\}\setminus\{-1;-5\}$.

Найдем соответствующий найденному t k: Ранее мы получили, что

$k=10-\frac{6}{t} \Rightarrow k=10-\frac{6}{6}=9$.

Тогда получим систему: $\begin{cases}x^2+y^2=6\\x^2y^2=9.\end{cases}$

Заменим $x^2=m$; $y^2=n$.

Тогда получим $\begin{cases}m+n=6\\m\cdot n=9\end{cases}$

Выразим из 1-ого уравнения $m=6-n$

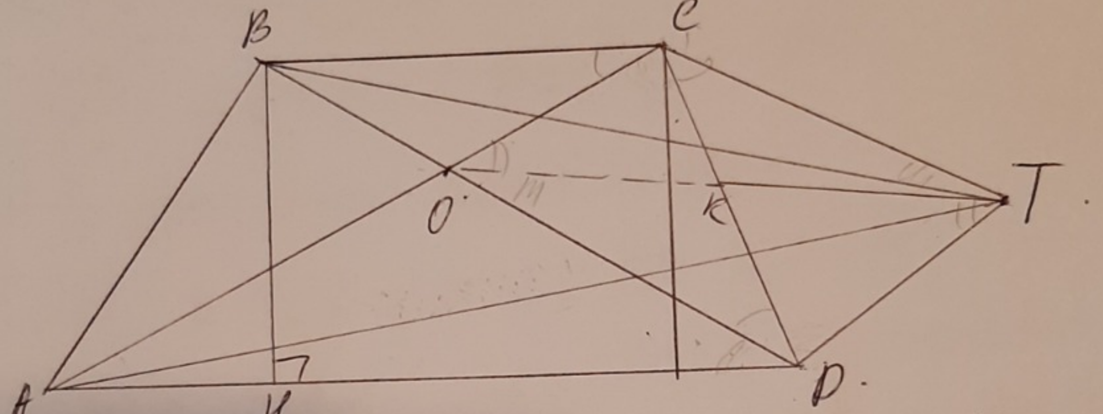
Подставим во 2-ое: $6n-n^2=9 \Leftrightarrow n^2-6n+9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=3$. Тогда $\begin{cases}x^2=3\\y^2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}y=\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}.\end{array}\right.\end{cases}$

Ответ: $(x=\sqrt{3}$ и $y=\sqrt{3})$ или $(x=\sqrt{3}$ и $y=-\sqrt{3})$ или $(x=-\sqrt{3}$ и $y=\sqrt{3})$ или $(x=-\sqrt{3}$ и $y=-\sqrt{3})$.

2.

Задача 3. Чистовик.



$BC \parallel AD$, т.к. $\angle ADO = \angle OBC$, $\angle ACB = \angle CAD$.

По условию задачи $\triangle OBC$ и $\triangle AOD$ – правильные, следовательно, углы этих треугольников равны 60°. Из этого же условия $BO = OC$; $AO = OD$. Отсюда следует, что $BD = AC$. Значит $ABCD$ – равнобокая трапеция. Проведем отрезки CT и TD. $CK = KD$ (из условия задачи), $OK = KT$ также исходя из условия. Значит $OCTD$ – параллелограмм. Отсюда, $\angle TCD = \angle CDO$ и $\angle COT = \angle OTD$, $\angle TOD = \angle OTC$ и $\angle OCD = \angle CDT$; $CT = OD$ и $OC = TD$.

$TB^2 = CB^2 + CT^2 - 2 \cdot CB \cdot CT \cdot \cos\angle BCT$.

Чистовик

$TA^2 = AD^2 + DT^2 - 2 \cdot AD \cdot DT \cdot \cos\angle ADT.$

исходя из вышеизложенного, получим, что $CB = TD$ и $AD = CT$, т.е.

$TB^2 = CB^2 + CT^2 - 2CB \cdot CT \cdot \cos\angle BCT$

и $TA^2 = CT^2 + CB^2 - 2 \cdot CB \cdot CT \cdot \cos\angle ADT.$

$\begin{cases} \angle BCT = \angle BCA + \angle ACD + \angle DCT. \\ \angle ADT = \angle BDA + \angle BDC + \angle CDT. \end{cases}$

Но имеем, что $\angle BDA = \angle BCA$;

$\angle CDT = \angle ACD$, а $\angle BDC = \angle DCT.$

Эти углы равные, т.к. OCTD - параллелограмм. Так как вышеназванные углы равны, то и $\angle BCT = \angle ADT$. Отсюда, мы получим, что $TB = TA$.

$CD = AB \Rightarrow CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cdot \cos\angle COD.$

$OC = 2;\ OD = 7. \Rightarrow \cos\angle COD = \angle COT + \angle TOD$

$\angle COT + \angle TOD = 180 - \angle CDO - \angle OCD$ из $\triangle ODT$. Отсюда следует, что $\cos BCT = \cos\angle COD.$

Отсюда следует, что $\triangle ABT$ - правильный.

Ч.Т.Д.

Чистовик

$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot BT^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = BT^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot h.$

h - высота, $h = BH$

т.к. ABCD - равнобокая $\Rightarrow$.

$AH = (AD - BC) : 2 \Rightarrow$

$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot \frac{AD-BC}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{2+7}{2} \cdot \frac{7-2}{2} = \frac{45}{4}$

$S_{ABT} = \frac{67 \cdot \sqrt{3}}{4}.$

Найдем отношение: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{45} = \frac{67\sqrt{3}}{45}.$

Из условия $AB = CD$.

$CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cdot \cos 120^\circ.$

Откуда я получил, что $AB = \sqrt{67}$, с учетом, что $OC = BC = 2$; $OD = 7$; $\cos 120 = \cos\angle COD =$
$= \cos(180 - \angle BOC)$.

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3}}{45}.$

211005477 (U379853 M1277607)

5.