# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005456**

ID профиля: **87898**

Вариант 10

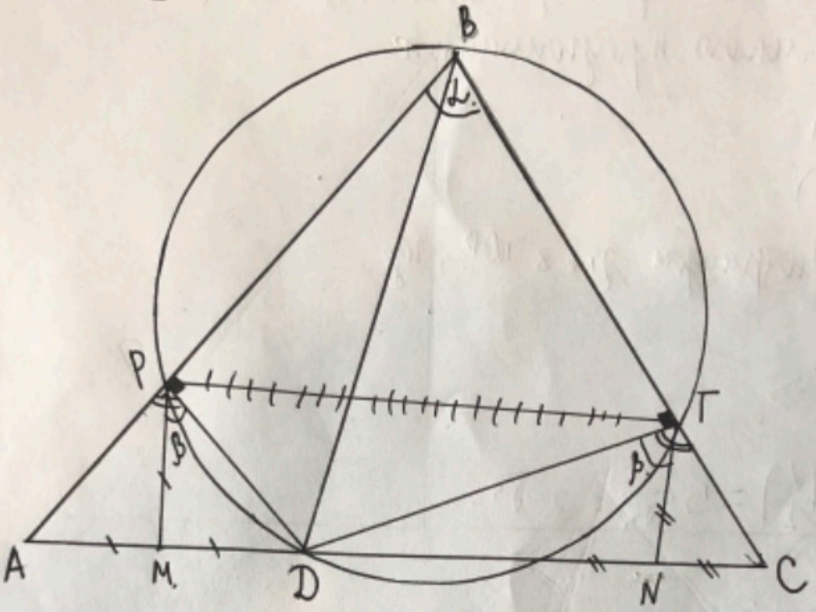
Чистовик (1л) ВАР №10. Часть 1.

## Задача №1

**Дано:**
$\Delta ABC$
$(\cdot) D \in AC$
$BD$-диаметр
$(\cdot) M = \frac{1}{2} AD$
$(\cdot) N = \frac{1}{2} CD$
$PM \parallel TN$
$MP = 1$
$NT = \frac{3}{2}$
$BD = \sqrt{5}$.

**Найти:**
а) $\angle ABC$ - ?
б) $S_{\Delta ABC}$ - ?

**Решение:**




Пункт а:

Пусть $\alpha$ - искомый угол.

Зная, что $BD$-диаметр $\Delta ABC$, получаем:

$\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ Значит углы $APD$ и $CTD$ равны ($APB$ и $CTB$ развёрнутые)

$\Rightarrow \Delta APD$ и $DTC$ - прямоугольные $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} PM = AM = MD \\ DN = NC = TN \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta NTC \sim \Delta APM$ (по СУС)

Пусть $\angle MPD = \beta = \angle NTC$, тогда.

$\angle APM = \angle PAM = 90^\circ - \beta$. ; $\angle NTC = \angle TCN = \beta$.

Посчитаем углы $\Delta ABC$:

$\left.\begin{array}{l} \angle A = 90^\circ - \beta. \\ \angle B = \alpha \\ \angle C = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \angle B = 90^\circ$

Ответ (а): $\angle ABC = 90^\circ$.

Чистовик (2) ВАР N10 Часть 1.

Задание N2

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

ОДЗ: $x+3 \geq 0$ $\quad x \geq -3$

$7-x \geq 0$ $\quad x \leq 7$

$21+4x-x^2 \geq 0.$ Заметим, что это раскладывается:

$(x+3)(7-x) \leq 0 \quad \Rightarrow$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \\ (x+3)(7-x) \leq 0. \end{cases} \Rightarrow x \in [-3;7].$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}$

$\sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} - 4 = (x+3) - 2\sqrt{(7-x)(x+3)}.$

$\sqrt{7-x}\sqrt{x+3} + 6 = (\sqrt{7-x} - \sqrt{x+3})^2$

Замена: $\exists \ \sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} = t \Rightarrow$

Получаем:

$t^2 - t - 6 = 0 \quad t = \left[\begin{array}{l} -2 \\ 3 \end{array}\right.$

Обратная замена:

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} = 3 \quad \uparrow^2 \\ \sqrt{7-x} - \sqrt{x+3} = -2. \quad \uparrow^2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 10 - 2\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x+3} = 9 \\ 10 - 2\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x+3} = 4. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x+3} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x+3} = 3. \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \uparrow^2 \\ \uparrow^2 \end{array}$

$\left[\begin{array}{l} 21 + 4x - x^2 = \frac{1}{4}. \\ 21 + 4x - x^2 = 9 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 16x - 83 = 0. \\ x^2 - 4x - 12 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2. \\ x = 2 \pm \frac{3\sqrt{11}}{2} \end{array}\right\}$ все подходят.

Ответ:

Чистовик (3)   ВАР №10,   Часть 1.

Продолжение задачи №1 (пункт б)

Получаем, что $\triangle DPB$ - прямоугольник => $BD = TP = \sqrt{5}$.

Из прямоугольного треугольника:

$TP = 3 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$PD = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Запишем т. Пифагора для $\triangle TDP$:, где.

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$.

$BC = 5 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt{5}$.

$AB = 5 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{5}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 5$

Ответ(б): 5.

Задача№3 вар№10 часть 1. Чистовик (4)

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$. (A)

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$.

Прямая: $2x-y=5$.

$y=\frac{ax^2-2a^2x+a^3+3}{a}=x^2-2ax+(a^2+\frac{3}{a})$.

$x_B=-\frac{b}{2a}=\frac{2a}{2}=a$

$y_B=a^2-2a^2+(a^2+\frac{3}{a})=\frac{3}{a}\Rightarrow B(a;\frac{3}{a})$.

$y^2-4ay-4xy+8x^2+5a^2+12ax=0$.

$D=b^2-4ac$

$D=4(a+x)^2-8x^2-5a^2-12ax=$

$=\cancel{4a^2}+8ax+4x^2-8x^2-12ax-\cancel{5a^2}.=-4x^2-4ax-a^2=-(2x+a)^2-4$

$\geq 0$.

$x=-\frac{a}{2}$

$y=\frac{2(a+x)}{1}=2(a-\frac{a}{2})=a$

$A(-\frac{a}{2};a)$

Чистовик(5) ВАР№10. 1 часть.

Задача №5 (продолжение)

1) $a>0$

$\frac{3}{a} > 2a-5$

$2a-5-\frac{3}{a} < 0$

$\frac{2a^2-5a-3}{a} < 0.$

$a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0;3)$ $\Rightarrow a \in (0;3).$

2) $a<0.$

$\frac{3}{a} < 2a-5$

$a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (3; +\infty)$

$a \in (-\frac{1}{2}; 0) \Rightarrow$

**Ответ:** $a \in (0;3) \cup (-\frac{1}{2}; 0).$

Черновик || (1)

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$.

Заметим, что $\sqrt{21+4x-x^2}=\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}$

$x+3\geq 0 \qquad x\geq -3$

$7-x\geq 0 \qquad -x\geq -7 \qquad x\leq 7 \qquad x\in[-3;7]$

Возведем:

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2\sqrt{21+4x-x^2}-4 \quad \uparrow^2$.

$x+3-2\cdot\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}+(7-x)=4\cdot(21+4x-x^2)-2\cdot2\cdot4\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}+4^2$.

$\cancel{x}+3-\cancel{x}+7-2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}=\cancel{84}+16x-4x^2-16\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}+\cancel{16}$

$10-100+4x^2-16x=-16\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}+2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}$. $\qquad (2x^2-8x)^2$

$\cancel{-90}$ $4x^2-16x-90=-14\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x} \qquad ;2.$ $\qquad 4x^4-2\cdot2x^2\cdot8x+64x^2$

$2x^2-8x-45=-7\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}$.

$2x(x-4)-45=-7\sqrt{x+3}\sqrt{7-x} \quad \uparrow^2$.

$(2x(x-4))^2-2\cdot2x(x-4)\cdot45+45^2=49(x+3)(7-x)$

$4x^4-32x^3+64x^2-90(2x^2-8x)+45^2=49(\overset{4x}{\cancel{7x}-x^2+21-\cancel{3x}})$

$4x^4-32x^3+64x^2-180x^2+720x+45^2=-49x^2+49\cdot4x+49\cdot21$.

Черновик. (2)

$\begin{array}{r} 64 \\ +49 \\ \hline 113 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 180 \\ -113 \\ \hline 67 \end{array}$

$4x^4-32x^3+64x^2-180x^2+49x^2+720x-49\cdot 4x+45^2\mp 49\cdot 21=0$

$4x^4-32x^3-67x^2$

II способ:

Замена: $\sqrt{x+3}=a$ $\quad a,b\neq 0$.

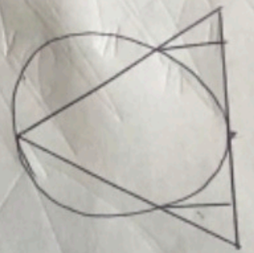
$\sqrt{7-x}=b$.

$a-b+4=2\cdot a\cdot b$.

$a-2ab-b+4=0$.

$a-b=2ab-4$

$a-b=2\cdot(ab-2)$



---

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\begin{array}{r} 91 \\ -19 \\ \hline 72 \end{array}$

$\sqrt{x+3}+4=2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}+\sqrt{7-x}$ $\uparrow^2$

$x+3+8\cdot\sqrt{x+3}+16=4(x+3)(7-x)+4\sqrt{x+3}\cdot(7-x)+7-x$.

$x+19+8\sqrt{x+3}=4(4x-x^2+21)+(28-4x)(\sqrt{x+3})+7-x$

$x+19+8\sqrt{x+3}=16x-4x^2+84+(28-4x)\sqrt{x+3}+7-x$

$x+19+8\sqrt{x+3}=15x-4x^2+91+(28-4x)\sqrt{x+3}$

$4x^2-15x-91+x+19=(28-4x)\sqrt{x+3}-8\sqrt{x+3}$,

$4x^2-14x-72=\sqrt{x+3}\,(28-4x-8)$

$4x^2-14x-72=\sqrt{x+3}\,(20-4x)$.

$4x^2-14x-72=\sqrt{x+3}\,(10-2x)\cdot 2$. $\quad :2$.

[illegible] (3).

$2x^2-7x-72=\sqrt{x+3}\,(10-2x).$

$x_{1,2}=\frac{7\pm25}{4}=\left[\begin{array}{l}8\\-\frac{18}{4}\end{array}\right.$

$(x-8)\left(x+\frac{18}{4}\right)=\sqrt{x+3}\,(10-2x)$

$2x^2-7x-72=0$

$D=b^2-4ac$

$D=49+4\cdot72\cdot2.$

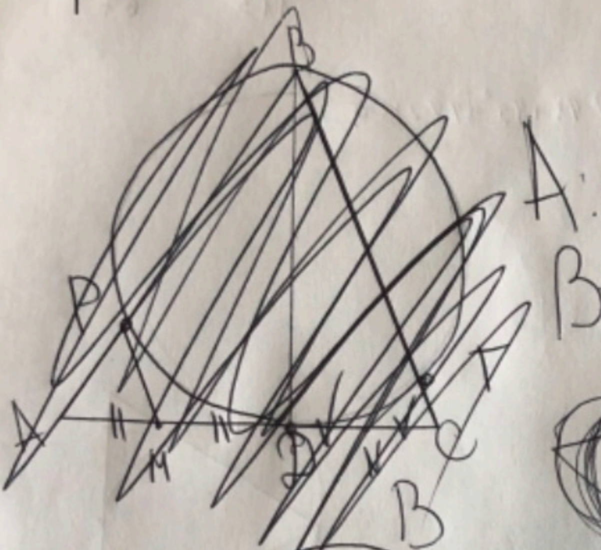
$D=625\Rightarrow25^2$

$$\begin{array}{r}25\\+\;7\\\hline32\end{array}\qquad\begin{array}{r}25\\-\;7\\\hline18\end{array}$$

Черновик (3).

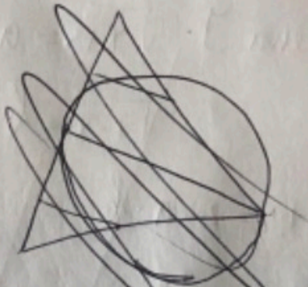
$2x^2 - 4x - 42 = 0$

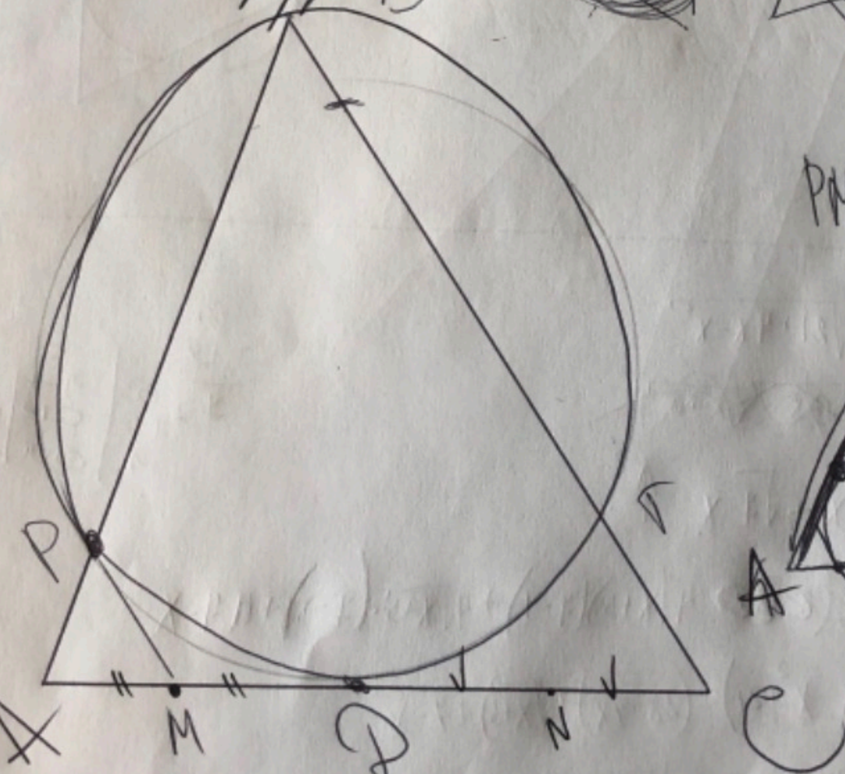
Черновик (4)



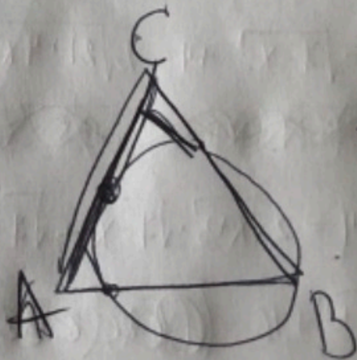

A: $5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax$

B



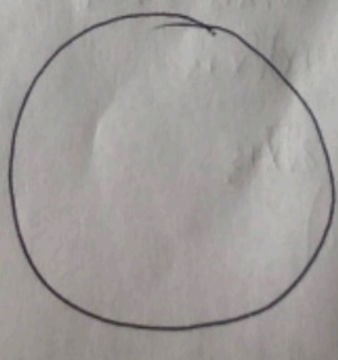


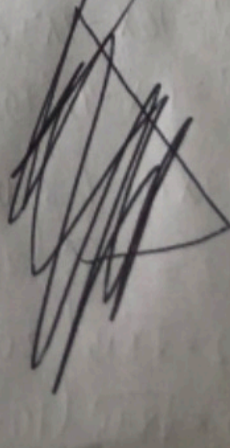

PM || TN.




$x^2 - 4x - 12 = 0.$

$D = b^2 - 4ac = 16 + 4 \cdot 12 = 64$





211005456 (U87898 M1273459)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005456**

ID профиля: **87898**

Вариант 10

Чистовик (1) ВАР №10 Часть 2.

Задача №4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81. \end{cases}$$

$x^2y^2 = 10 - \dfrac{6}{x^2+y^2} \Rightarrow$

ОДЗ: $x^2+y^2 \neq 0$ (квадраты всегда положительные, поэтому) $\Rightarrow$

$x^2+y^2 > 0$

Заметим (во 2 уравнении)

$(x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81$

Подставляем:

$(x^2+y^2)^2 + 5\left(10 - \dfrac{6}{x^2+y^2}\right) = 81$

Замена: Пусть $x^2+y^2 = a$

$a^2 + 5\left(10 - \dfrac{6}{a}\right) = 81$

$a^2 + 50 - 81 - \dfrac{30}{a} = 0$ Приведём к общему знаменателю:

$a^3 - 31a - 30 = 0.$

Заметим, что уравнение делится на $\boxed{-1}$

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 31a - 30 & a+1 \\ -\ a^3 + a^2 & \overline{a^2 - a - 30} \\ \hline -a^2 - 31a & \\ -\ -a^2 - a & \\ \hline -30a - 30 & \\ -\ -30a - 30 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

$a^2 - a - 30 = 0$

$D = b^2 - 4ac \Rightarrow D = 1 + 4 \cdot 30 = 11^2$

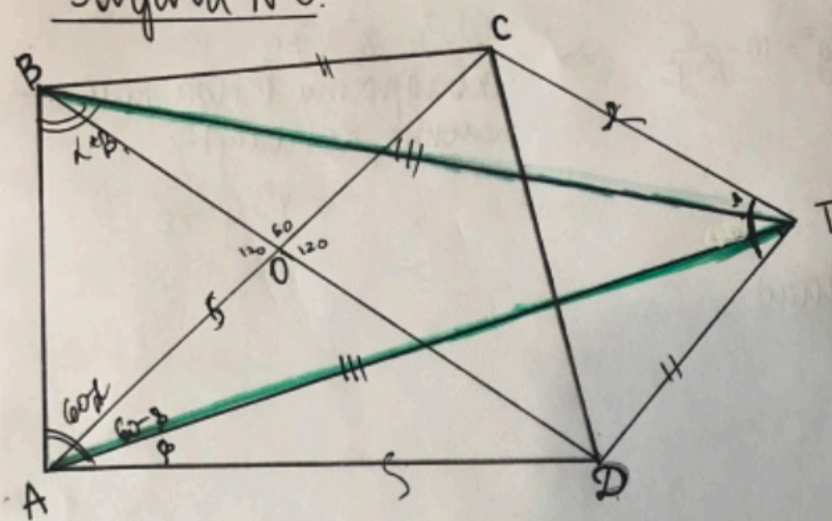
$a_{1-2} = \dfrac{1 \pm 11}{2} = \left[\begin{array}{l} 6 \\ -5. \end{array}\right.$

Получаем:

$a = \left[\begin{array}{l} 6 \\ -1 \text{ н.к} \\ -5 \text{ н.к} \end{array}\right.$ (по ОДЗ)

Чистовик (3) ВАР№10 Часть 2.

## Задача №6.




Дано: ABCD - четырехугол.
$\triangle BOC$; $\triangle AOD$ - правильные.
$BC=2$ $AD=7$.

Найти:
а) ABT - правильный
б) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

Решение:

$\angle TDO = \angle ODCT \Rightarrow \angle BCT = \angle TDA$.

Заметим, $\left.\begin{array}{l}\angle BCT = \angle TDA. \\ BC = DT. \\ CT = AD\end{array}\right\} \Rightarrow AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ - равнобедренный, где

$\angle ABT = \angle BAT$.

$\angle CAB = \angle TAD = \beta$.

$\angle CBT = \angle ATD$

$\left.\begin{array}{l}\angle COD = 180° - 60° = 120° \\ \quad\downarrow \\ (\triangle BOC\text{-правильный}). \\ COTD\text{ - параллелограмм}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle OCT = \angle OTD = 60°$

$\Rightarrow \angle CBT = \angle ATD = 60° - \beta$

Пусть, $\angle ABO = \alpha$. $\Rightarrow \angle BAO = 60° - \alpha$.

Заметим, что $\angle CBO = 60°$, $\angle CBT = 60° - \beta \Rightarrow \angle OBT = \beta$.

$\angle TAD = \beta$, $\angle OAD = 60° \Rightarrow \angle OAT = 60° - \beta$.

В $\triangle ABT$: $\angle BAT = \angle BAO + \angle OAT = 60° - \alpha + 60° - \beta = 120° - \beta - \alpha$.

$\angle ABT = \alpha + \beta$ $\Rightarrow$

Чистовик(2) ВАР №10 Часть 2.

Продолжение задачи №4.

Обратная замена:

$x^2+y^2=6$ Получаем: $x^2=6-y^2$

$x^2y^2=10-\frac{6}{6}=10-1=9$

Подставляем:

$(6-y^2)\cdot y^2=9$

$6y^2-y^4-9=0$

$y^4-6y^2+9=0.$

Заметим, что $y^2=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$

$(\sqrt{3};-\sqrt{3})$

$(-\sqrt{3};\sqrt{3})$

$(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

Чистовик (4) ВАР№10. Часть 2.

Продолжение задачи №6

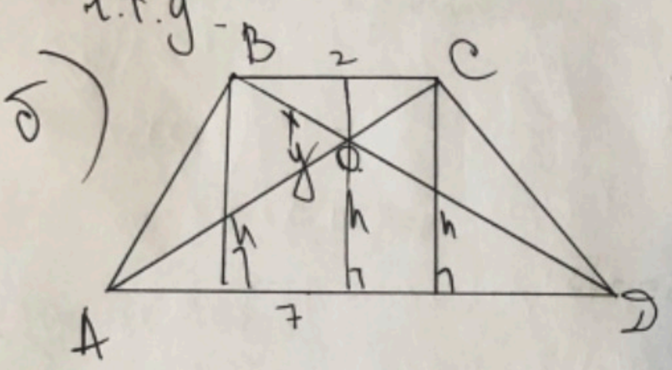
$\angle BTA = 180^\circ - \angle ABT - \angle BAT = 180 - \cancel{\beta} - \cancel{\alpha} - 120 + \cancel{\alpha} + \cancel{\beta} = 60^\circ \Rightarrow$

$\angle ABT = \angle BAT = 60^\circ \Rightarrow$

$\triangle ABT$ - правильный

ч.т.д.

б)




Пусть $h$ - высота равн. трапеции $ABCD$.

$$h = \sin 60^\circ \cdot x + \sin 60^\circ \cdot y = \sin 60^\circ (x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (x+y)$$

Получаем,

$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot h = \frac{(x+y)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{ABT} = \frac{AD^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$ (т.к. он правильный из ⓐ пункта)

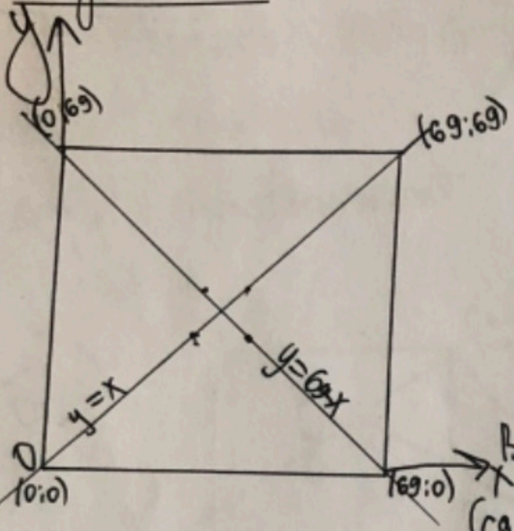
$$S_{ABT} = \frac{(x^2+xy+y^2)\sqrt{3}}{4} = \frac{(4+49+14)\sqrt{3}}{4} = \frac{67\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

Получаем: $$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{67\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4}}}{\frac{81\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4}}} = \frac{67}{81}$$

Ответ: $\frac{67}{81}$

Чистовик (5) ВАР №10 часть 2.

Задача №5.

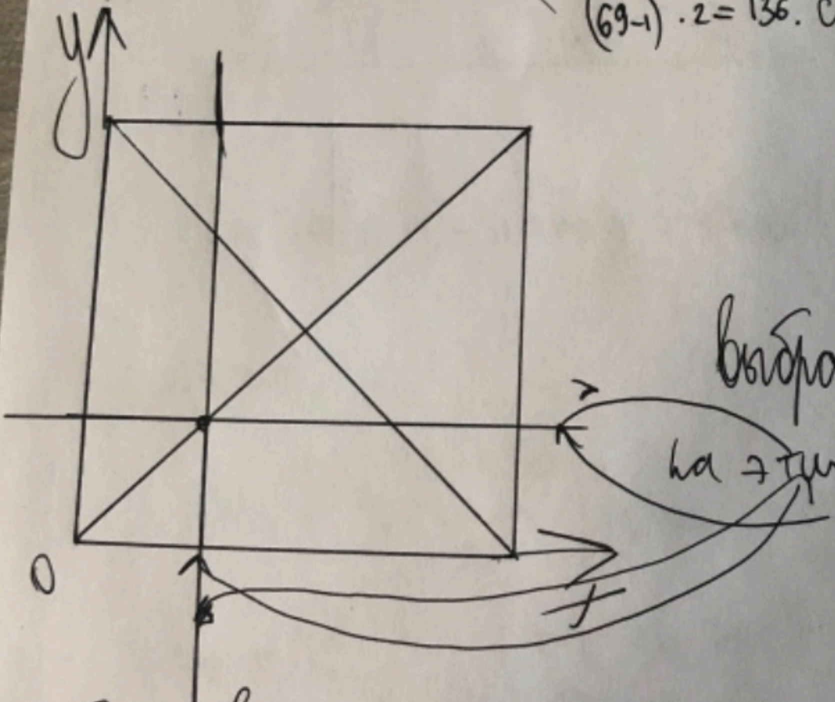



Прямые: $y=x$

$y=69-x$

Центр квадрата не лежит в узл.

Выбрать точку на диагоналях:
$(69-1)\cdot 2=136$ способов.




выбрать эти точки, лежащие на этих прямых

Выбрать вторую точку $68^2-67-67$.

Когда всего получается $136\cdot(68^2-67-67)$ вариантов

что равно. $=$ 61064 способов.

Ответ: 61064

час Черновик (1) 10 вар часть 2 ОДЗ: $y^2 + x^2$

№4

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81. \end{cases}$$

$x^2y^2 = 10 - \frac{6}{x^2+y^2}$.

$(x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81$

$(x^2+y^2)^2 + 5\cdot\left(10 - \frac{6}{x^2+y^2}\right) = 81$

$(x^2+y^2)^2 + 50 - \frac{30}{x^2+y^2} = 81$.

Замена: $x^2+y^2 = t$

$t^2 + 50 - \frac{30}{t} = 81$

$t^2 + 50 - 81 - \frac{30}{t} = 0$.

$t^2 - 31 - \frac{30}{t} = 0 \quad | \cdot t$.

~~$t^3 - 31t - 30 = 0$.~~

$t^3 - 31t - 30 = 0$.

1) при $t = -1$

$$\begin{array}{l|l} t^3 - 31t - 30 & t+1 \\ \hline -\,t^3 + t^2 & t^2 - t - 30 \\ \quad -t^2 - 31t & \\ \quad -\,-t^2 - t & \\ \qquad -30t - 30 & \end{array}$$

$x^2+y^2 \neq 0$

$t^2 - t - 30 = 0$

$D = b^2 - 4ac$.

$D = 1 + 4\cdot 30 = 11^2$

$t_{1-2} = \frac{1 \pm 11}{2} = \left[\begin{array}{l} 6 \\ -5 \text{ - н.к.} \end{array}\right.$

Обратная замена:

$x^2 + y^2 = 6$

$x^2y^2 = 10 - \frac{6}{6} = 9$

$\boxed{xy = \pm 3.}$

черновик (5) ВАР№10 часть 2.

$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2\cdot y^2=9 \end{cases}$ $x^2=6-y^2$

черновик (2)

$y^2(6-y^2)=9$

$6y^2-y^4=9$

$y^4-6y^2-9=0$

Замена: $y^2=t$

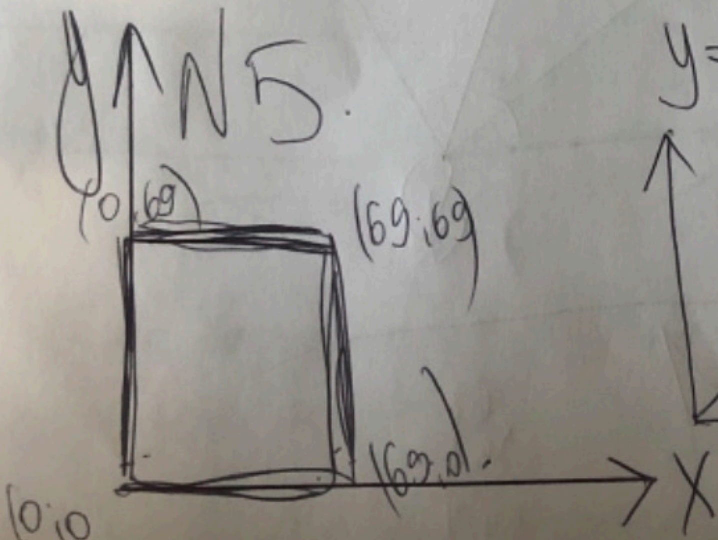
$t^2-6t-9=0$

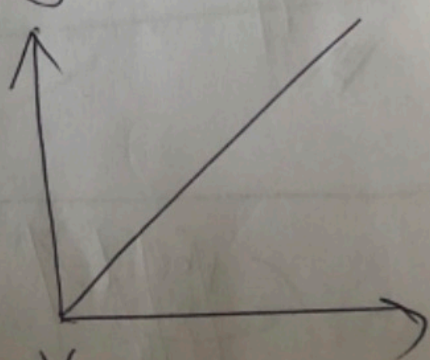
$D=36+36=72=$ $4\cdot18=4\cdot3^2\cdot2=6\sqrt2$

$t_{1-2}=\frac{6\pm6\sqrt2}{2}=3\pm3\sqrt2$

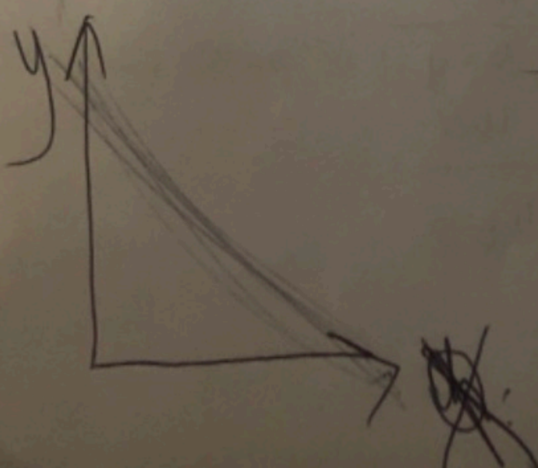
ВАР№10 2 часть.

№5.



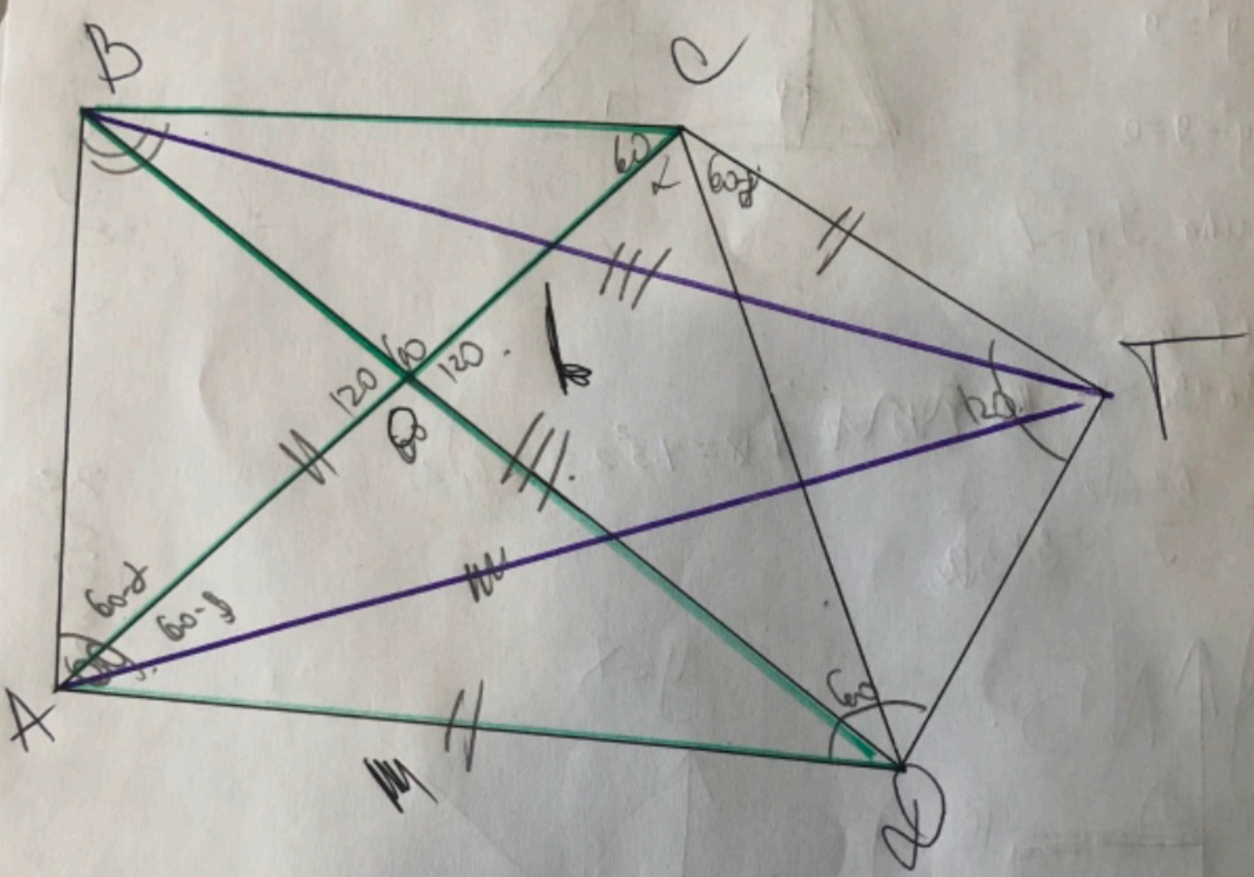




y=69-x




211005456 (U87898 M1273460)

черновик 3. итоговые вар №10. 2 часть




$$68 \times 68 = 544 + 4080 = 4624$$

$$4624 - 169 = 4455$$

$$67 + 67 = 134$$

$$4455 \times 136$$

$$26730$$
$$133650$$
$$445500$$
$$605880$$