Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005455**

ID профиля: **212636**

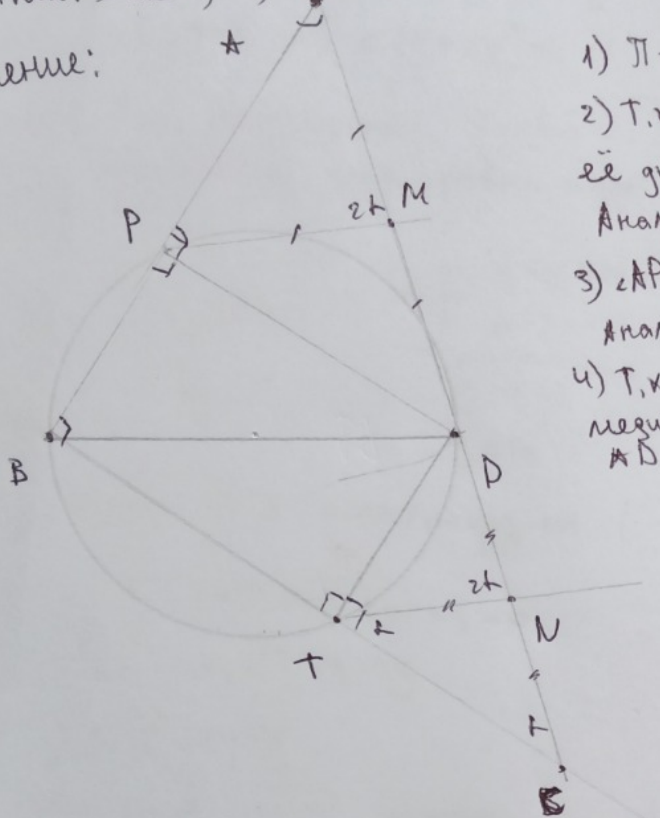
Вариант 10

①

Дано: $\triangle ABC$, $D\in[AC]$, $\omega(O;r)$, BD – диам. ω, $P=[AB]\cap\omega$, $T=[BC]\cap\omega$, M – сер. AD, N – сер. CD, $PM\parallel TN$.

Найти: а) $\angle ABC$; б) S_{ABC}, если $MP=1$, $NT=\frac{3}{2}$, $BD=\sqrt{5}$.

Решение:



1) П-м PD и DT.

2) Т.к. $\angle BPD$ – впис. в ω и опирается на её диаметр BD, $\angle BPD=90°$. Аналогично, $\angle BTD=90°$.

3) $\angle APD=180°-\angle BPD=180°-90°=90°$ (смежные). Аналогично, $\angle CTD=90°$.

4) Т.к. в прямоугольном тр-ке $\triangle APD$ PM – медиана, опущенная на гипотенузу AD, она делит его на два равноб. тр-ка $\triangle AMP$ и $\triangle PMD$, причём $AM=PM=MD$. Аналогично, $\triangle TND$ и $\triangle TNC$ – равноб., причём $DN=CN=TN$.

5) Пусть $\angle TCN=\alpha$.

6) Т.к. $\triangle TNC$ – равноб., $\angle NTC=\angle TCN=\alpha$

7) $\angle TND=\angle NTC+\angle NCT=2\alpha$ (внешний)

8) Т.к. $TN\parallel PM$, $\angle TND=\angle PMA=2\alpha$ (соотв.)

9) Т.к. $\triangle PAM$ – равноб., $\angle PAM=\angle APM=\frac{180°-\angle PMA}{2}=\frac{180°-2\alpha}{2}=90°-\alpha$.

10) $\angle ABC=180°-\angle BAC-\angle BCA=180°-(90°-\alpha)-\alpha=90°$ (из $\triangle ABC$).

б) 11) Т.к. $PM=AM=MD=1$, $AD=2$. Аналогично, $CD=3$.

12) Из $\triangle BDA$ по т. косинусов $AB^2=BD^2+AD^2-2\cdot BD\cdot AD\cdot\cos BDA=5+4-4\sqrt{5}\cos BDA$

13) Из $\triangle BDC$ по т. косинусов $BC^2=BD^2+CD^2-2\cdot BD\cdot CD\cdot\cos BDC=5+9-6\sqrt{5}\cos BDC=$
$=14+6\sqrt{5}\cos BDA$ (т.к. $\angle BDC=180°-\angle BDA$)

$BC^2=14+6\sqrt{5}\cos BDA \quad |\cdot\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}BC^2=\frac{28}{3}+4\sqrt{5}\cos BDA$

14) $AB^2=9-4\sqrt{5}\cos BDA$; $\frac{2}{3}BC^2=\frac{28}{3}+4\sqrt{5}\cos BDA \Rightarrow AB^2+\frac{2}{3}BC^2=9+\frac{28}{3}$

$AB^2+BC^2-\frac{1}{3}BC^2=\frac{55}{3}$

15) Из $\triangle ABC$ по т. Пифагора $AC^2=AB^2+BC^2=25 \Rightarrow AB^2+BC^2-\frac{1}{3}BC^2=\frac{55}{3} \Rightarrow 25-\frac{1}{3}BC^2=\frac{55}{3}$

$25-\frac{1}{3}BC^2=\frac{55}{3} \quad |\cdot 3$

$75-BC^2=55$

$BC^2=20 \Rightarrow AB^2=AC^2-BC^2=5.$

$BC=2\sqrt{5}$, $AB=\sqrt{5}$

16) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$.

Ответ: а) $\angle ABC=90°$
б) $S_{ABC}=5$.

Ответ: $a\in(-3;-\frac{5}{2})\cup(0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty) \Leftarrow \left[\begin{array}{l} a\in(0;\frac{1}{2}) \\ a\in(-3;-\frac{5}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)\end{array}\right.$

②

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)} \qquad \text{ОДЗ: } x \geq -3;\ x \leq 7.$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(x+3)(7-x)} - 4$$

$$x+3+7-x - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = \left(2\sqrt{(x+3)(7-x)} - 4\right)^2$$

$$10 - 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = \left(2\sqrt{(x+3)(7-x)} - 4\right)^2 \qquad \text{Пусть } y = 2\sqrt{(x-3)(7-x)}.$$

$$10 - y = (y-4)^2$$

$$10 - y = y^2 - 8y + 16$$

$$y^2 - 7y + 6 = 0 \qquad D = 49 - 24 = 25$$

$$y_1 = \frac{7+5}{2} = 6$$

$$y_2 = \frac{7-5}{2} = -1$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 6 \\ 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = -1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sqrt{(x+3)(7-x)} = 3 \\ x \in \varnothing \end{array}\right.$$

$$(x+3)(7-x) = 9$$

$$21 + 4x - x^2 = 9$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = 2 + 4 = 6$$

$$x_2 = 2 - 4 = -2$$

Проверка:

$x = 6$

$$\sqrt{6+3} - \sqrt{7-6} + 4 = 2\sqrt{21 + 4\cdot 6 - 36}$$

$$3 - 1 + 4 = 2\sqrt{21+24-36}$$

$$6 = 2\sqrt{45-36}$$

$$6 = 2\sqrt{9}$$

$$6 = 6$$

$x = 6$ подходит.

$x = -2$

$$\sqrt{-2+3} - \sqrt{7+2} + 4 = 2\sqrt{21 - 8 - 4}$$

$$1 - 3 + 4 = 2\sqrt{9}$$

$$2 = \cancel{2\cdot 3}\ 6$$

$x = -2$ не подходит.

Ответ: $x = 6$.

③

$$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$$

$$y^2+4x^2+4a^2+8ax-4xy-4ay+a^2+4x^2+4ax=0$$

$$(y-2x-2a)^2+(a+2x)^2=0$$

т.к. оба слагаемых в левой ч. рав-ва неотриц., а их сумма равна 0, каждое из них равно нулю.

$$\begin{cases}(y-2x-2a)^2=0\\(a+2x)^2=0\end{cases}+\begin{cases}y-2x-2a=0\\a+2x=0\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{a}{2}.$$

$$y-a=0$$

$$y=a$$

Значит т. A имеет коорд-ты $\left(-\frac{a}{2};a\right)$.

$$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$$

$$a(x^2-2x+a^2)+3=ay$$

$$a(x-a)^2+3=ay$$

Если $a=0$, то $0+3=0$. Такое невозможно, значит $a\neq0$

$$a(x-a)^2+3=ay \quad \Big|\cdot\frac{1}{a}$$

$$(x-a)^2+\frac{3}{a}=y$$

$$x_B=a$$

$$y_B=\frac{3}{a}.$$

$$2x-y=5 \Leftrightarrow y=2x-5$$

$$D=25+24=49$$

$$a_1=\frac{-5+7}{4}=\frac{1}{2}$$

$$a_2=\frac{-5-7}{4}=-3$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_A>2x_A-5\\y_B>2x_B-5\end{cases}\\\begin{cases}y_A<2x_A-5\\y_B<2x_B-5\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>-a-5\\\frac{3}{a}>2a-5\end{cases}\\\begin{cases}a<-a-5\\\frac{3}{a}<2a-5\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>-\frac{5}{2}\\\frac{3-2a^2+5a}{a}>0\end{cases}\\\begin{cases}a<-\frac{5}{2}\\\frac{3-2a^2+5a}{a}<0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>-\frac{5}{2}\\-2a(a-\frac{1}{2})(a+3)>0\end{cases}\\\begin{cases}a<-\frac{5}{2}\\-2a(a-\frac{1}{2})(a+3)>0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>-\frac{5}{2}\\a(a-\frac{1}{2})(a+3)<0\end{cases}\\\begin{cases}a<-\frac{5}{4}\\a(a-\frac{1}{2})(a+3)>0\end{cases}\end{array}\right.$$

− + − +

−3   0 $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-\frac{5}{2};+\infty)\\a\in(-\infty;-3)\cup(0;\frac{1}{2})\end{cases}\\\begin{cases}a\in(-\infty;-\frac{5}{2})\\a\in(-3;0)\cup(\frac{1}{2};+\infty)\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

Ответ: $a\in(-3;-\frac{5}{2})\cup(0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty) \Leftarrow \left[\begin{array}{l}a\in(0;\frac{1}{2})\\a\in(-3;-\frac{5}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)\end{array}\right.$

211005455 (U212636 M1277026)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005455**

ID профиля: **212636**

Вариант 10

6

Беловик

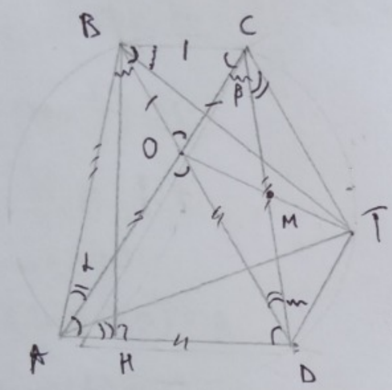
Дано: ABCD, $O = AC \cap BD$, $\triangle AOD$ – прав., $\triangle BOC$ – прав., T симм. O отн. сер. CD.

а) Док-ть: $\triangle ABT$ – прав.

б) Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$, если $BC=2$, $AD=7$

Решение:

а)



1) Т.к. $\triangle BOC$ – прав., $\angle OBC = \angle OCB = \angle BOC = 60°$, $BO=OC=BC$. Аналогично, $\angle AOD = \angle ADO = \angle OAD = 60°$, $AO=OD=AD$

2) Т.к. $\angle BCA = \angle CAD = 60°$, $AD \parallel BC$ (накр. леж.)

3) Р-м $\triangle BCD$ и $\triangle BCA$:
1. BC – общ.
2. $BD = BO+OD = CO+OA = AC$
3. $\angle ACB = \angle DBC = 60°$

$\Rightarrow \triangle BCD = \triangle BCA$
$\Downarrow$
$AB = CD$, $\angle BAC = \angle BDC$,
$\angle ABO = \angle OCD = \angle ABC - 60° = \angle BCD - 60°$

4) Т.к. $AD \parallel BC$, $\angle BCD + \angle CDA = 180° \Rightarrow \angle BCD + \angle BAD = 180°$
$\Downarrow$
ABCD – вписан. в окр-ть ω

5) Пусть M – сер. CD, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$

6) Т.к. O симм. T отн. M, $OM = OT$, $M \in [OT]$

7) Т.к. $OM = MT$, $CM = MD$, OCTD – пар-м

8) Т.к. OCTD – пар-м, $\angle COD = \angle CTD = 180° - \angle AOD = 120°$

9) Т.к. $\angle CTD + \angle CAD = 120° + 60° = 180°$, ACTD – впис. в окр-ть, причём тоже в ω

10) Т.к. OCTD – пар-м, $OC \parallel DT$, $OD \parallel CT \Rightarrow \angle OCD = \angle CDT = \beta$, $\angle DCT = \angle CDO = \alpha$ (накр. леж.)

11) $\angle TAD = \frac{1}{2} \cup TD = \angle DCT = \alpha$. Аналогично, $\angle CBT = \frac{1}{2} \cup CT = \angle CDT = \beta$

12) $\angle BAT = \angle CAT + \angle BAC = \angle CAT + \alpha = \angle CAT + \angle DAT = \angle DAC = 60°$

13) $\angle ABT = \angle DBT + \angle ABD = \angle DBT + \beta = \angle DBT + \angle CBT = 60°$

14) Из $\triangle ABT$ $\angle ATB = 180° - \angle BAT - \angle ABT = 60°$

15) Т.к. в $\triangle ABT$ $\angle ABT = \angle BAT = \angle ATB = 60°$, $\triangle ABT$ – прав. Что и требовалось доказать.

б)

16) Из $\triangle ABO$ $AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos AOB = 49 + 4 - 28\cos 120° = 53 + 14 = 67$

17) $AB = AT = \sqrt{67}$

18) $S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AT \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 67 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$

19) Опустим на AD $BH \perp AD$

20) $AH = \frac{AD-BC}{2} = 2,5$

21) Из $\triangle BAH$ по т. Пифагора $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{67 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{268-25}}{2} = \frac{\sqrt{243}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

22) $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH = \frac{9}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

23) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{81\sqrt{3}} = \frac{67}{81}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$.

3

211005455 (U212636 M1277027)

Беловик

(4) ОДЗ: $x^2+y^2\neq 0$.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=t$, а $x^2y^2=k$. Тогда $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=$
$=t^2-2k$.

$$\begin{cases} \frac{6}{t}+k=10 \\ t^2-2k+7k=81 \end{cases} \quad \begin{cases} k=10-\frac{6}{t} \\ t^2+5k=81 \end{cases} \quad t^2+5\cdot\left(10-\frac{6}{t}\right)=81.$$

$t^2+5\cdot\left(10-\frac{6}{t}\right)=81$

$t^2+50-\frac{30}{t}=81 \quad |\cdot t$

$t^3-31t-30=0$

$(t+1)(t^2-t-30)=0$

$(t+1)(t-6)(t+5)=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=6 \\ t=-5 \end{array}\right.$$

т.к. $x^2+y^2\geq 0$, то $t=6 \Rightarrow k=10-\frac{6}{6}=9$

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2=6-x^2 \\ x^2(6-x^2)=9 \end{cases}$$

Пусть $z=x^2$.

Тогда

$z(6-z)=9$

$z^2-6z+9=0$

$(z-3)^2=0$

$z=3$

$x=\pm\sqrt{3}$

$y=\pm\sqrt{3}$.

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

Беловик

5

Всего внутри кв-та $67\cdot2-1=133$ точки, лежащие в узлах сетки на одной из прямых $y=x$ и $y=69-x$. Значит первую точку если для определённости её всегда брать с диагоналей можно выбрать 133-мя способами. Далее, если вторая точка сама тоже лежит на диагоналях кв-та, то выбор двух таких точек будет посчитан дважды. Поэтому, если вторая ~~из только~~ клетка тоже на диагоналях, то всего способов будет $\frac{133\cdot130}{2}$. Если вторая клетка не на диагонали, но всего способов $133\cdot(67^2-133-66\cdot2)$, т.к. всего внутри ~~квадрата~~ 67^2 узлов, из них 133 на диагоналях, и ~~по~~ 66 ~~узлов~~ на каждой из прямых, параллельных координатным осям.

Значит всего способов $\frac{133\cdot130}{2}+133\cdot(67^2-133-132)=$

$=133\cdot(65+67^2-265)=133\cdot(67^2-200)$.

$67^2=(70-3)^2=4900-420+9=4489$

$133\cdot(4489-200)=133\cdot4289=570437$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,2} \\ \times\ 4289 \\ 133 \\ \hline 12867 \\ +\ 12867 \\ 4289 \\ \hline 570437 \end{array}$$

Ответ: всего 570437 способов.

Черновик

$\cancel{6xy^2}$ ~~64~~

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$\cancel{x+y}$

$$\frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{x^4y^2 + x^2y^4 + 1}{x^2+y^2}$$

$$(x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81$$

$$\frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 =$$

$$x^2 \cancel{+ y^2 = (x+y^2}$$

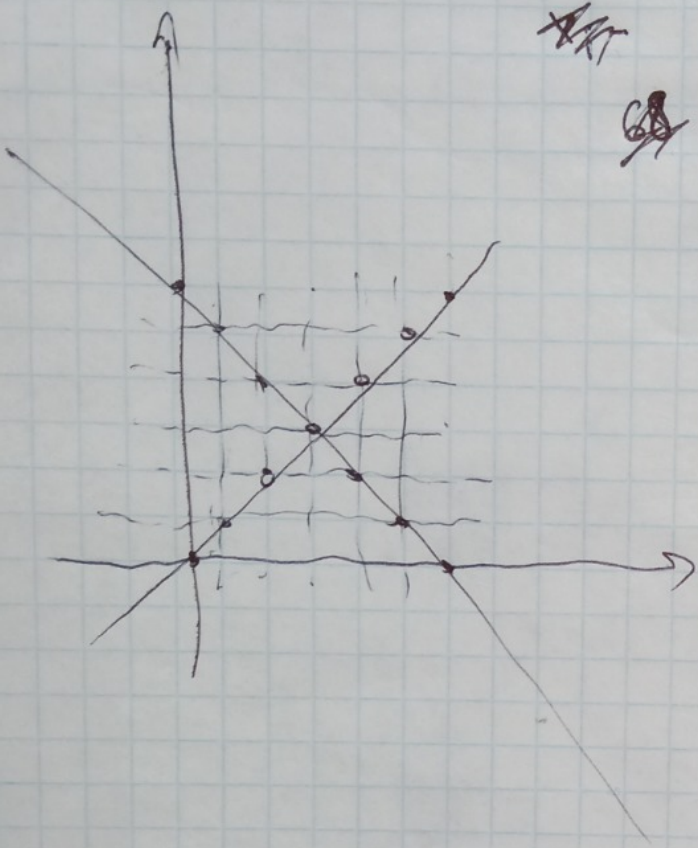
$$\frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 \geq 2\sqrt{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$$

x^2y^2

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \left(\frac{1}{x^2y^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{x^2}}$$

Черновик

$67+67-1 = \cancel{132}\ 133$



$\cancel{67}$ $\cancel{67^2}$

$\cancel{67\cdot 66}$

$\cancel{67^2\cdot(67^2-1)}$

$\cancel{67\cdot 66}$

$$\left(67\cdot 66\cdot \left(67^2\cdot(67^2-1)-1-66^2\right)\cdot\frac{1}{2}\right.$$

$$\frac{(67+66)\cdot\left((67^2-1)(67^2-1)\cancel{2}-66^2\right)}{2}=$$

$$=\frac{(67+66)\cdot\left(68\cdot 68\cdot(67^2-2)-66^2\right)}{2}=$$

$$=33\cdot(67+66)\left(68\cdot(67^2-2)-66\right)$$

11

Черновик

$60^\circ + \beta + 60^\circ + \alpha = 180^\circ$

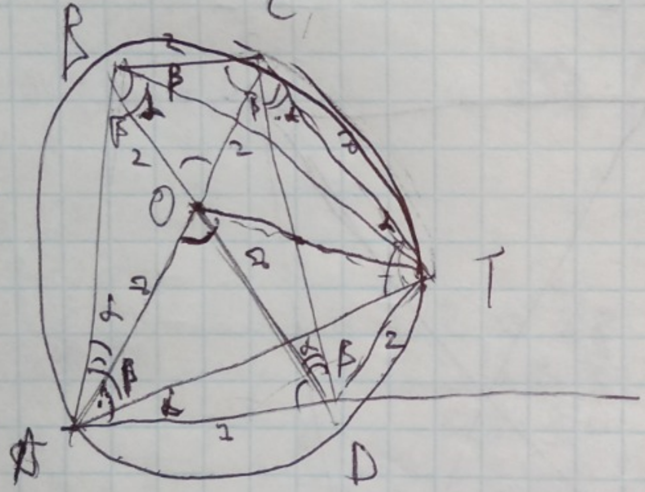
$\alpha + \beta = 60^\circ$

$S_{BCT} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7 \cdot \sin 120^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + S_{AOB} + S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(49 +$

$S_{ABT} = S_{ABCTD} - S_{BCT} - S_{ADT} = S_{ABCDT} - 7\sqrt{3}$

$S_{ABCDT} = S_{ABCD} + S_{CTD} =$



67

$268 - 25 = 243$

$243 = 81 \cdot 3$

Черновик

$$67+66=133$$

$$\frac{133\cdot\left(67^2-(67+66)\right)}{2}=\frac{133\cdot\left(67^2-133\right)}{2}=$$

$$= \cancel{133}$$

$$67^2=(70-3)^2=4900-420+9=4489$$

$$133\cdot\left(67^2-133-133\right)$$

$$4489-133=4156$$

$$133\cdot 4156$$

$$\frac{4156}{2}=2078$$

$$133\cdot 2078=$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 2\ \ } \\ \times\ 2078 \\ 133 \\ \hline 6234 \\ +\ 6234\ \ \\ 2078\ \ \ \ \\ \hline \boxed{276374} \end{array}$$

Черновик

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{t} + k = 10 \\ t^2 - 2k + 7k = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{t} + k = 10 \\ t^2 + 5k = 81 \end{cases}$$

$| \cdot t$

$k = 10 - \dfrac{6}{t}$

$\cancel{t^2 + \frac{30}{t} - 50 = 81}$

$\cancel{t^3 + 30 - 131t = 0}$

$t^2 + 50 - \dfrac{30}{t} = 81$

$t^3 - 31t - 30 = 0$

$k = 10 - \dfrac{6}{6} = 9$

$t_1 = -1$

$x^2y^2 = 9 \qquad x^2y^2 = 9$

$y^2 = 6 - x^2 \qquad x^2(6-x^2) = 9$

$(t+1)(t^2 - t - 30) = 0$

$x^4 - 6x^2 + 9 = 0$

$(t+1)(t-6)(t+5) = 0$

$\cancel{x^2+y^2 = -1} \qquad x^2+y^2 = 6$

$(x^2-3) = 0$

$x = \pm\sqrt{3}$

$y = \pm\sqrt{3}$

211005455 (U212636 M1277027)