Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005432**

ID профиля: **161761**

Вариант 10

Черновик

$\sqrt{x+3} - \sqrt{y-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$y - x \geq 0 \Rightarrow y \geq x$

$x = 2:$ $\quad -x^2+4x+21 \quad \frac{-4}{-2} = 2 \quad x \in [-3; y]$

$2\sqrt{21+4x-x^2} \leq 10$

$-(x^2-4x-21) = -((x^2-yx+3x-21) = -(x+3)(x-y)$

$= (x+3)(y-x)$

$\sqrt{x+3} = a \quad \sqrt{x+3} \vee \sqrt{y-x}$

$\sqrt{y-x} = b \quad x+3 \vee y-x$

$a - b + 4 = 2ab \quad 2x \vee 4 \quad x \vee 2$

$5-(2-x)$

$5+(2-x)$

$2-x=t$

$a+4 = b(2a+1)$

$a^2+8a+16 = b^2(4a^2+4a+1)$

$x+3+8\sqrt{x+3}+16 = (y-x)(4x+12+4\sqrt{x+3}$

$a+4 = b(2a+1)$

$\sqrt{5-t} - \sqrt{5+t} + 4 = 2\sqrt{25-t^2}$

$\frac{a+4}{2a+1} = b$

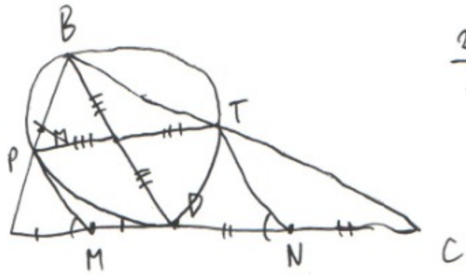
$a(1-2b) = b-4$

$x^2+3 = \cancel{49-14x+x^2}$

$x+3 = 7-x+9-6\sqrt{7}$

$3 \geq -x \geq -y$

$\frac{2a+1}{a+4} = b$



$\sqrt{\frac{10-\sqrt{99}}{2}} - \sqrt{\frac{10+\sqrt{99}}{2}} + 4$

$\sqrt{y-x} \geq 3$

$y - x \geq 9 \quad -2 \geq x$

$(c+3)(c-2)$

c^2

$\frac{\sqrt{x+3}+4}{2}$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$a^2+8a+16 = 4a^2b^2+4ab^2+b^2 \quad 3-y-9=-13$

$a(8-4b^2) = 4a^2b^2+b^2-a^2-16 \quad 13\cdot(10+3)$

$130+39$

$a - b + 0{,}25b^2 + 4 - 0{,}25b^2$

$a^2+a-b+b^2+4 = (a+b)^2 \quad y \quad \sqrt{13} <$

$x+3+\sqrt{x+3}-\sqrt{y-x}+y-x+4 = y+3$

$2\,1_0 +$

$\frac{\sqrt{13}}{2} \vee 3{,}5$

$a-b+a^2+b^2-6 = 2ab$

252

-169

83

$a-b+(a-b)^2-6=0$

$\sqrt{13} < y$

$a-b=x$

$-\sqrt{13} > -y$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{y-x} = 2$

$x^2+x-6=0$

~~$x+3+y-x-\sqrt{}$~~ y

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \{2; -3\}$

$\sqrt{x+3} = 2+\sqrt{y-x}$

$x+3 = 4+y-x+4\sqrt{y-x}$

$x - 4 = \sqrt{y-x}$

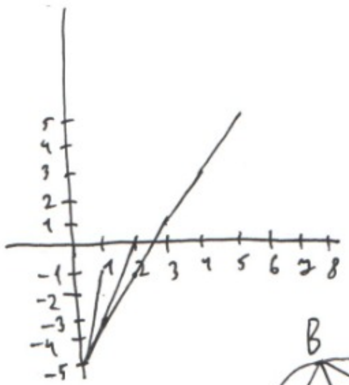
$x^2-8x+16 = y-x$

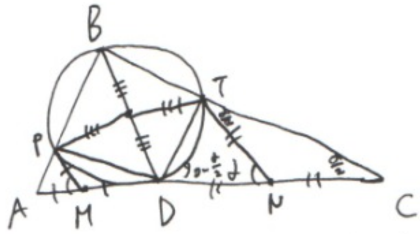
$x^2-7x+9=0$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$

211005432 (U161761 M1276380)

Черновик





$(4x-y)^2$

$(2a-y)^2+(a+6x)^2-28x^2-4xy=0$

$y=\dfrac{x^2\cdot a - x\cdot(2a^2)+a^3+3}{a}$

$y=x^2-2ax+a^2+\dfrac{3}{a}$

$y=(x-a)^2+\dfrac{3}{a}$

$x=a$
$y=\dfrac{3}{a}$

$5a^2+8x^2+y^2-4ay-4xy+12ax$ $\quad y=2x-5$

$(2a-y)^2+(2x-y)^2+(a+6x)^2 - 32x^2-y^2=0$

$y^2-y\cdot(4a+4x)+(12ax-8x^2-5a^2)=0$

$\dfrac{3}{5}=\dfrac{TC}{BT+TC}$

$y=\dfrac{4a+4x\pm\sqrt{16a^2+32ax+16x^2-48ax+32x^2+20a^2}}{2}$

$\dfrac{5}{3}=1+\dfrac{BT}{TC}$

$y=\dfrac{4a+4x\pm\sqrt{36a^2-16ax+48x^2}}{2}$

$TC\cdot\dfrac{2}{3}=BT \quad \dfrac{2}{3}=\dfrac{BT}{TC}$

$TC=x$
$BT=\dfrac{2}{3}x$

$y=2a+2x\pm\sqrt{9a^2-4ax+12x^2}$

~~$y<2x+5$~~

$(a-2x)^2+8a^2+8x^2$

$y=2x-5$

$\dfrac{4}{9}x^2+\dfrac{9}{4}y^2=5$

~~$2x-5>$~~

$a>\dfrac{3}{a}$

$y>2x-5$

$a^2<3$ $\quad 4-y^2+y^2=4$

$a^2>3$ $\quad -\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$

$5>2x-4$

$a>\sqrt{3}$ $\quad -\sqrt{3}<a<0$

$x^2=9-\dfrac{9y^2}{4}$

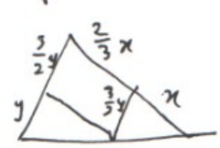
$x>2a+2x$

$\dfrac{4}{9}\cdot\left(9-\dfrac{9y^2}{4}\right)+y^2=4$

$\dfrac{AP+PB}{AP}=\dfrac{5}{2}$

$\dfrac{16}{5}+\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{PB}{AP}=\dfrac{3}{2}$



$\dfrac{9}{4}y^2+x^2=9$ $\quad \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{9}=1$

$\dfrac{4}{9}x^2+y^2=4$

$x^2=\dfrac{36}{5}$

$y^2=\dfrac{4}{5}$

$AP=y$
$PB=\dfrac{3}{2}y$

$\dfrac{13}{4}y^2+\dfrac{13}{9}x^2=13$

211005432 (U161761 M1276380)

$\dfrac{16}{5}+\dfrac{9}{5}=5$ $\quad \dfrac{9}{5}+\dfrac{36}{5}=$

Чистовик

№2.

$\sqrt{21+4x-x^2} = \sqrt{(x+3)(7-x)} = \sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 7].$

Сделаем замену: $a = \sqrt{x+3} \geq 0$; $b = \sqrt{7-x} \geq 0$.

Заметим, что $a^2+b^2 = x+3+7-x = 10 \Rightarrow 4 = a^2+b^2-6$.

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$a - b + a^2+b^2-6 = 2ab,$

$(a-b) + (a-b)^2 - 6 = 0$

Замена: $(a-b) = c$.

$c^2 + c - 6 = 0$

$(c+3)(c-2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=-3 \\ c=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=-3 \\ a-b=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-3 & (1) \\ \sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2 & (2) \end{array}\right.$

Рассмотрим (1):

$\sqrt{x+3} = \sqrt{7-x} - 3$

~~Но $-3 \leq x \leq 7 \Rightarrow 3 \geq -x \geq -7 \Rightarrow 10 \geq 7-x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{10} \geq \sqrt{7-x} \geq 0$, но~~

$\sqrt{7-x} \geq 3 \Rightarrow 7-x \geq 9 \Rightarrow -2 \geq x \Rightarrow -3 \leq x \leq -2.$

$x+3 = 7-x-2\cdot3\sqrt{7-x}+9,$ (возвели в квадрат, т.к. обе части полож.)

$2x - 13 = -6\sqrt{7-x},$

$13-2x = 6\sqrt{7-x}$ $\quad x<0 \Rightarrow 13-2x>0 \Rightarrow$ возведем в квадрат.

$169 - 52x + 4x^2 = 36(7-x)$

$169 - 52x + 4x^2 = 252 - 36x$

$4x^2 - 16x - 83 = 0$

$x = \dfrac{16 \pm \sqrt{16^2+4\cdot4\cdot83}}{8} = \dfrac{16 \pm 4\sqrt{16+83}}{8} = \dfrac{4 \pm \sqrt{99}}{2}$

$\dfrac{4+\sqrt{99}}{2} > 0$, а мы сказали что $-3 \leq x \leq -2$ в начале $\Rightarrow$ не подходит.

$\dfrac{4-\sqrt{99}}{2} \vee -3$ $\qquad$ $\dfrac{4-\sqrt{99}}{2} \vee -2$

$4-\sqrt{99} \vee -6$ $\qquad$ $4-\sqrt{99} \vee -4$

$10 \vee \sqrt{99}$ $\qquad$ $8 \vee \sqrt{99}$

$\sqrt{100} > \sqrt{99}$ $\qquad$ $\sqrt{64} < \sqrt{99}$

$-3 < \dfrac{4-\sqrt{99}}{2} < -2 \Rightarrow x = \dfrac{4-\sqrt{99}}{2}$ подходит.

211005432 (U161761 M1276380)

Чистовик

№ 2 (продолжение)

Итак, из (1) мы получили один корень: $x = \frac{4-\sqrt{99}}{2}$.

Рассмотрим (2):

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$

$\sqrt{7-x} = \sqrt{x+3} - 2$

$\sqrt{x+3} \geq 2$

$x+3 \geq 4 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 7$

$7 - x = x + 3 - 2\cdot 2\sqrt{x+3} + 4$ (возвел в квадрат т.к. обе части полож.)

$-2x = -4\sqrt{x+3}$

$x = 2\sqrt{x+3}$ (обе части полож. $\Rightarrow$ возведем в квадрат)

$x^2 = 4x + 12$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 6$, т.к. $1 \leq x \leq 7 \Rightarrow x = -2$ не подх.

Проверим $x = 6$: $\left.\begin{array}{l}\sqrt{6+3} - \sqrt{7-6} + 4 = 3 - 1 + 4 = 6 \\ 2\sqrt{21+4\cdot 6 - 6\cdot 6} = 2\cdot\sqrt{21+24-36} = 2\cdot\sqrt{9} = 6\end{array}\right\}$ сходится $\Rightarrow$ ~~x~~ $x=6$ – корень.

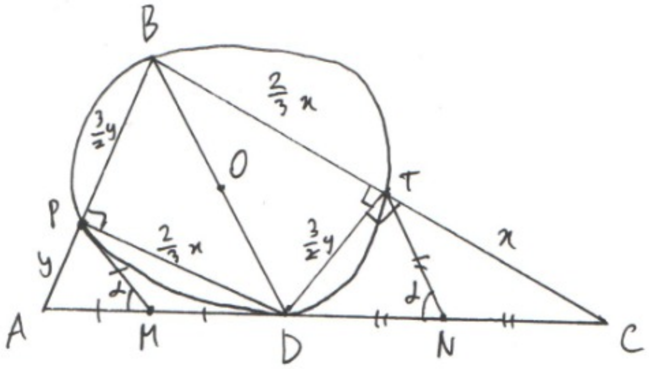
Итак, получены 2 корня: $x = 6$ и $x = \frac{4-\sqrt{99}}{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{4-\sqrt{99}}{2};\ 6\right\}$

211005432 (U161761 M1276380)

Чистовик

№1



а) BPDT – вписанный в окр. 4-угольник

$\angle BTD$ и $\angle BPD$ опираются на диаметр $BD \Rightarrow \angle BTD = \angle BPD = 90^\circ$.

$\angle DTC = 180^\circ - \angle BTD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow TN = DN = NC$, т.к. TN – медиана из прямого угла

Аналогично $\angle APD = 90^\circ$ и $PM = AM = MD$ т.к. PM – медиана из прямого угла

Пусть $\angle TND = \alpha$. Тогда $\angle TNC = 180^\circ - \alpha$. $TN = NC \Rightarrow \triangle TNC$ – равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NTC = \angle TCN = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Но $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMA = \angle TND = \alpha$.

$PM = AM \Rightarrow \triangle APM$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle PAM = \angle APM = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Тогда $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$.

Ответ: 90°.

б) В пункте а) мы выяснили, что $\angle B = 90^\circ$. Значит $\angle PDT = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ BPDT – прямоугольник.

$MP = 1 \Rightarrow AD = 2 \cdot 1 = 2$

$NT = \frac{3}{2} \Rightarrow DC = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$

$AC = AD + DC = 2 + 3 = 5$.

$\left.\begin{array}{l}\angle BCA \text{ – общий} \\ \angle ABC = \angle DTC = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DTC$ по 2-м углам $\Rightarrow \frac{BC}{TC} = \frac{BT + TC}{TC} = \frac{AC}{DC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{BT}{TC} + 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{BT}{TC} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow TC = x,\ BT = \frac{2}{3}x$.

$\left.\begin{array}{l}\angle BAC \text{ – общий} \\ \angle ABC = \angle APD = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle APD$ по 2-м углам $\Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AP + PB}{AP} = \frac{AC}{AD} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{PB}{AP} + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{PB}{AP} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = y,\ PB = \frac{3}{2}y$

211005432 (U161761 M1276380)

Чистовик

№ 1 (продолжение)

$DT = PB = \frac{3}{2}y$ (т.к. $PBTD$ — прямоуг.); $PD = BT = \frac{2}{3}x$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = (\sqrt{5})^2 \\ \left(\frac{3}{2}y\right)^2 + x^2 = 9 \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{4}{9}x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 5 & (1) \\ \frac{9}{4}y^2 + x^2 = 9 & (2) \\ \frac{4}{9}x^2 + y^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

$(2) - (1)$: $x^2 - \frac{4}{9}x^2 = 9 - 5$

$\frac{5}{9}x^2 = 4$

$x^2 = \frac{36}{5} \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$y^2 = \frac{(9 - x^2)\cdot 4}{9} = \frac{(9 - \frac{36}{5})\cdot 4}{9} = \frac{9\cdot 4}{5\cdot 9} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (из (2))

$BC = x + \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}x = \frac{5\cdot 6\sqrt{5}}{3\cdot 5} = 2\sqrt{5}$

$AB = y + \frac{3}{2}y = \frac{5}{2}y = \frac{5\cdot 2\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \sqrt{5}.$

$S_{ABC} = \frac{AB\cdot BC}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2} = 5.$

Ответ: 5.

211005432 (U161761 M1276380)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005432**

ID профиля: **161761**

Вариант 10

Черновик

$\frac{6}{\ }$

$x^2+y^2=t$

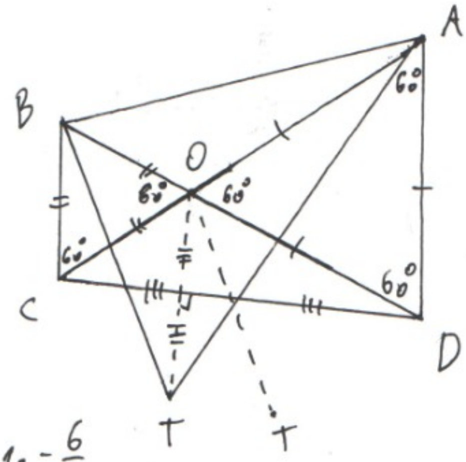
$x^2y^2=p$

$x^4+y^4=t^2-2p$

$5+5+6+5+5+7$

$=33$

15



$\begin{cases}\frac{6}{t}+p=10\\ t^2-2p+7p=81\end{cases}$ $\begin{cases}p=10-\frac{6}{t}\\ t^2+50-\frac{30}{t}=81\end{cases}$ $\begin{cases}p=10-\frac{6}{t}\\ t^3-31t-30=0\end{cases}$

$\times\begin{array}{r}67\\34\\\hline 268\\2010\\\hline 2278\end{array}$

$\times\begin{array}{r}68\\68\\\hline 544\\408\\\hline 4624\end{array}$

$t^3-31t-30 \,|\, t+1$

$-\ t^3+t^2 \quad t^2-t-30$

$-t^2-31t-30$

$-\ -t^2-t$

$-30t-30$

$-\ -30t-30$

$t^2-6t+5t-30$

$(t-6)(t+5)$

$+\begin{array}{r}605948\\4488\\\hline 610436\end{array}$

$69-x=x$

$(t+1)(t-6)(t+5)=0$

$t=-1$

$p=16$

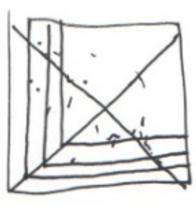
$(x;\ x)$

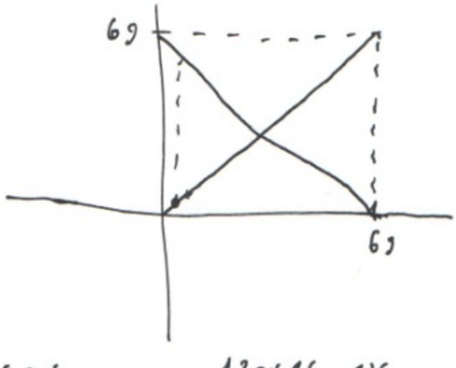
$+\begin{array}{r}2278\\2\\\hline 4556\end{array}$

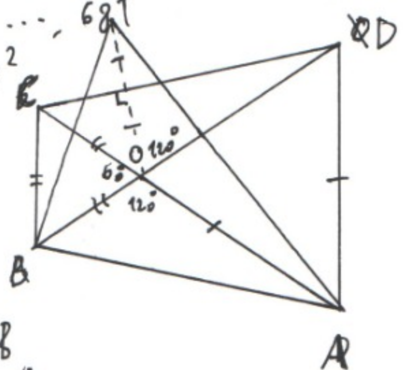
$-\begin{array}{r}605948\\4488\\\hline 601460\end{array}$

$1, 2, \ldots, 68$

68^2







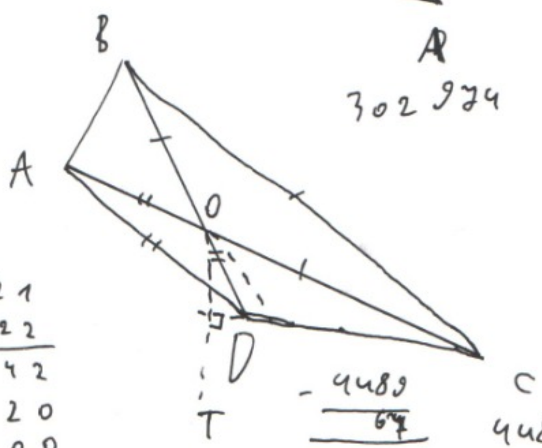
$\times\begin{array}{r}4489\\4490\\\hline 404010\\179560\\1795600\\\hline 2015610\end{array}$

$-\begin{array}{r}4624\\136\\\hline 4488\end{array}$

$120+16=136$

$+\begin{array}{r}4556\\4488\\\hline 9044\end{array}$

302974



396

72

81

4040

$\times\begin{array}{r}4421\\4422\\\hline 8842\\88420\\1768400\\17684000\\\hline 19549662\end{array}$

4624

16

16

$-\begin{array}{r}2015610\\19549662\end{array}$

$\quad 302974$

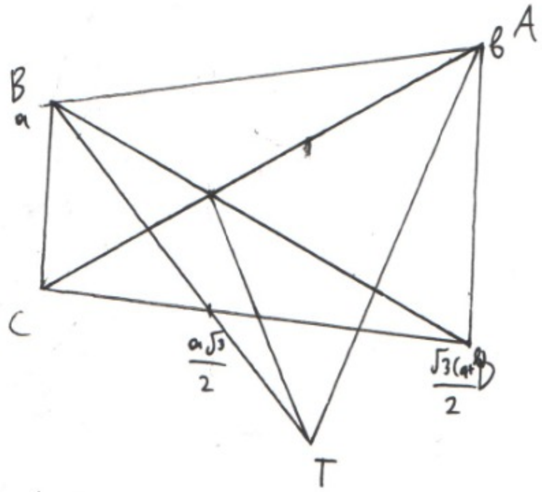
17

14

$-\begin{array}{r}4489\\67\end{array}$

$-\begin{array}{r}4489\\67\\\hline 4422\end{array}$

Черновик



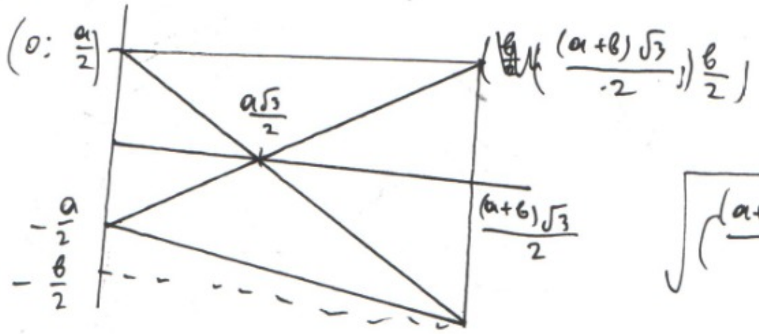
1.
5^3+14
$6y$

$a^2-\frac{a^2}{4}$

$\frac{3a^2}{4}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$4a^2-a^2=3a^2$

$a\sqrt{3}$



$\sqrt{\left(\frac{(a+в)\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{(в-a)}{2}\right)^2}$

$\sqrt{\frac{3(a^2+2aв+в^2)+(в^2-2aв+a^2)}{4}}$

$y=-\frac{a+в}{4}$ $\quad(\frac{в\sqrt{3}}{2};-\frac{a+в}{2})$

$x=\frac{(a+в)\sqrt{3}}{4}$

$\frac{(a+в)\sqrt{3}-2a\sqrt{3}}{4}=\frac{(в-a)\sqrt{3}}{4}$ $\quad\sqrt{4a^2+4aв+4в^2}$

$\frac{\sqrt{3}\cdot 2в}{4}=\frac{в\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{a+в}{2}$

$\frac{в^2\cdot 3}{4}+\frac{(2a+в)^2}{4}$

$3в^2+4a^2+4aв+в^2$

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Замена: $x^2+y^2=a$, $a>0$, $x^2y^2=b$, $b\geq 0$

$x^4+y^4 = a^2-2b$

$$\begin{cases} \frac{6}{a}+b=10 \\ a^2-2b+7b=81 \end{cases} \begin{cases} b=10-\frac{6}{a} \\ a^2+5\cdot(10-\frac{6}{a})=81 \end{cases} \begin{cases} b=10-\frac{6}{a} \\ a^2+50-\frac{30}{a}=81 \end{cases} \begin{cases} b=10-\frac{6}{a} \\ a^3-31a-30=0 \end{cases}$$

$a^3-31a-30=0$

$a=-1$ – корень, поделим на $(a+1)$:

$$\begin{array}{l|l} a^3-31a-30 & a+1 \\ \hline -\;a^3+a^2 & a^2-a-30 \\ \quad -a^2-31a-30 & \\ -\;\;-a^2-a & \\ \quad\quad -30a-30 & \\ -\;\;\;-30a-30 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$a^3-31a-30=(a+1)(a^2-a-30)=(a+1)(a-6)(a+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=6 \\ a=-5 \end{array}\right.$

Но подходит лишь $a=6$, т.к. $x^2+y^2\geq 0$

Тогда $b=10-\frac{6}{6}=9$

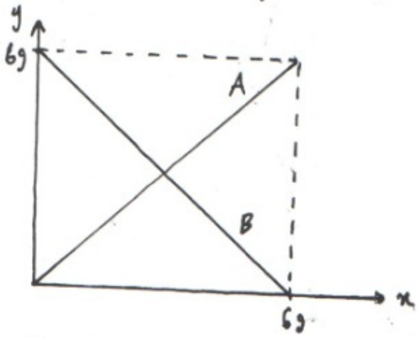
$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases} \begin{cases} x^2=6-y^2 \\ 6y^2-y^4=9 \end{cases} \begin{cases} x^2=6-y^2 \\ y^4-6y^2+9=0 \end{cases} \begin{cases} x^2=6-y^2 \\ (y^2-3)^2=0 \end{cases} \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=3 \end{cases} \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $\{(\sqrt{3};\sqrt{3});(\sqrt{3};-\sqrt{3});(-\sqrt{3};\sqrt{3});(-\sqrt{3};-\sqrt{3})\}$

Чистовик

№ 5

Всего свободных узлов в квадрате $68 \cdot 68 = 4624$.



Назовём диагональ из $(0; 0)$ в $(69; 69)$ A, а диагональ из $(0; 69)$ в $(69; 0)$ B.

Найдём кол-во способов выбрать 2 узла так, что каждый из них на диагонали A или B и прямая, ~~на~~ проходящая через эти узлы, не параллельна O_x и O_y.
Диагонали A и B не имеют общего узла, т.к. тогда $69 - x = x \Leftrightarrow 69 = 2x$, но 69 - неч.
Если оба узла на одной диагонали: $67 + 66 + \ldots + 1 = \frac{67 \cdot 68}{2} = 67 \cdot 34 = 2278$.
Т.к. диагоналей 2 и они не имеют пересечений, удвоим: $2278 \cdot 2 = 4556$.
Итак, 4556 - число способов выбрать 2 узла на одной диагонали, что прямая, проходящая через них, не параллельна O_x и O_y.
Теперь если оба узла на разных диагоналях:
будем идти по диагонали A и считать кол-во способов выбрать второй узел на диагонали B для рассматриваемого узла на диагонали A.

для узла $(1; 1)$: $68 - 2 = 66$ (т.к. не подходят лишь узлы $(1; 68)$ и $(68; 1)$)
$(2; 2)$: $68 - 2 = 66$
...
$(68; 68)$: $68 - 2 = 66$.

Итого: $66 \cdot 68 = 4488$.

Тогда кол-во способов выбрать 2 узла так, что они оба на диагоналях и прямая, проходящая через них, не параллельна O_x и O_y, равно $4556 + 4488 = 9044$.

Найдем кол-во способов выбрать 2-й узел во всем квадрате для узла на диагонали A так, что прямая, проходящая через эти узлы, не параллельна O_x и O_y:

для $(1; 1)$: $68 \cdot 68 - 1 - 67 - 67 = 4624 - 1 - 134 = 4489$.
$(2; 2)$: $68 \cdot 68 - 1 - 67 - 67 - 1 = 4488$ (т.к. не рассматриваем узел $(1; 1)$, ведь уже рассмотрели)
$(3; 3)$: $68 \cdot 68 - 1 - 67 - 67 - 2 = 4486$
...
$(68; 68)$: $68 \cdot 68 - 1 - 67 - 67 - 67 = 4422$

Сумма $4422 + 4423 + \ldots + 4489 = \frac{4489 \cdot 4490}{2} - \frac{4421 \cdot 4422}{2} = \frac{20155610}{2} - \frac{19549662}{2} =$
$= \frac{605948}{2} = 302974$.

Чистовик

№ 5 (продолжение)

Для диагонали B столько же случаев, то есть в сумме 302974 · 2 = = 605 948. Но мы два раза посчитали тот случай, когда 2 узла находятся на разных диагоналях. Это 4488 способов. То есть тогда ответ равен 605 948 + 4488 = ~~601 460~~. 610 436.

Ответ: ~~601460~~. 610 436.

211005432 (U161761 M1276381)

Чистовик

№7.

~~Сер. перпендикуляры ΔBOC и ΔAOD лежат на одной прямой.~~

$\angle CBO = \angle BDA \Rightarrow BC \parallel AD$

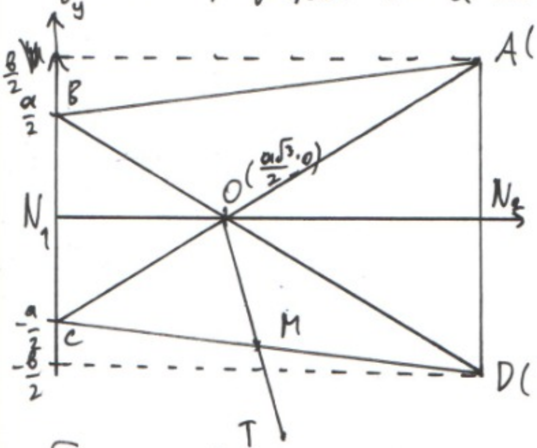
$$\left.\begin{array}{l}\angle BOA = \angle COD \text{ как верт.}\\ CO = BO\\ AO = BO\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OBA = \Delta OCD \Rightarrow AB = CB \Bigg\} \Rightarrow$$

$ABCD$ — либо равнобокая трапеция с основаниями BC и AD, либо прямоугольник.

В любом случае сер. перпендикуляры BC и AB лежат на одной прямой

введем систему координат:

пусть середины BC и AD лежат на O_x, причем середина BC лежит в $(0;0)$:



Сторона $\Delta OBC = a \Rightarrow B_y = \frac{a}{2}$; $C_y = -\frac{a}{2}$

$O_y = 0$

$O_x = \sqrt{BO^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$A_x = D_x = O_x + \sqrt{OA^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}(a+b)}{2}$

Пусть M — середина CD.

$M_x = \frac{C_x + D_x}{2} = \frac{0 + \frac{(a+b)\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{3}}{4}$.

$M_y = \frac{C_y + D_y}{2} = \frac{-\frac{a}{2} - \frac{b}{2}}{2} = -\frac{a+b}{4}$

Тогда $T_x = M_x + (M_x - O_x) = 2M_x - O_x = \frac{(a+b)\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

$T_y = M_y + (M_y - O_y) = 2 \cdot M_y - O_y = -\frac{a+b}{2} - 0 = -\frac{a+b}{2}$

$l(A;B) = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2} = \sqrt{\left(\frac{(a+b)\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2 + 6ab + 3b^2 + b^2 - 2ab + a^2}{4}} =$

$= \sqrt{a^2 + ab + b^2}$

$l(B;T) = \sqrt{(B_x - T_x)^2 + (B_y - T_y)^2} = \sqrt{\left(0 - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3b^2 + 4a^2 + 4ab + b^2}{4}} = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$

$l(A;T) = \sqrt{(A_x - T_x)^2 + (A_y - T_y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}(a+b)}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{a+b}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{3a^2 + a^2 + 4ab + 4b^2}{4}} = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$

Чистовик

№ 7 (продолжение)

Как можно заметить, $\ell(A;B) = \ell(B;T) = \ell(A;T) = \sqrt{a^2+ab+b^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABT$ – правильный $\Rightarrow$ пункт а) доказан.

б) $BC = 2 \Rightarrow a = 2$

$AD = 7 \Rightarrow b = 7$

~~$S_{ABCD} =$~~ N_1 – середина BC, N_2 – середина AD, N_1N_2 – высота $ABCD$

$S_{ABCD} = \frac{(BC+AD)}{2} \cdot N_1N_2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{(2+7)\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABT} = \sin 60° \cdot AB \cdot BT \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a^2+ab+b^2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (4+14+49) = \frac{\sqrt{3} \cdot 67}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3}}{4} : \frac{81\sqrt{3}}{4} = \frac{67}{81}.$

Ответ: $\frac{67}{81}$.

Ответ: пункт а) доказан

пункт б) $\frac{67}{81}$.

211005432 (U161761 M1276381)