Часть 1

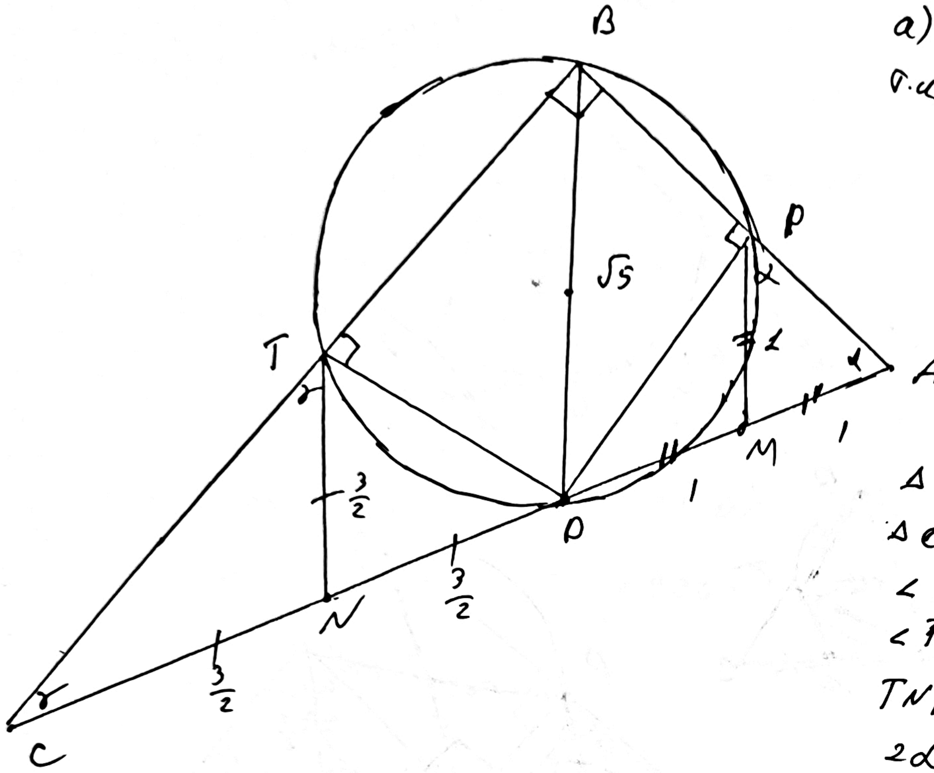
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005375**

ID профиля: **842465**

Вариант 10

N1. Чистовик.



а) $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$, т.к. они вписанные и опираются на диаметр BD.

$\triangle CTD$ и $\triangle APD$ – пр/уг $\Rightarrow$

$\Rightarrow CN = ND = TN$

и

$AM = MD = PM$ (медиана в пр/уг. треугольнике).

Пусть $\angle BAC = \alpha$ и $\angle BCA = \gamma$.

$\triangle APM$ – р/б $\Rightarrow \angle APM = \alpha$.

$\triangle CTN$ – р/б $\Rightarrow \angle CTN = \gamma$.

$\angle PMD = \angle PAM + \angle APM = 2\alpha$

$\angle TND = \angle CTN + \angle TCN = 2\gamma$.

$TN \parallel PM \Rightarrow \angle PMD + \angle TND = 180^\circ$

$2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$

$\alpha + \gamma = 90^\circ$

$\beta = \angle ABC = 180^\circ - \alpha - \gamma = 90^\circ$.

$\angle ABC = 90^\circ$

б) $MP = 1 \Rightarrow AD = 2$

$NT = \frac{3}{2} \Rightarrow CD = 3$

$AC = AD + CD = 5$.

$AB = AC\cos\alpha = 5\cos\alpha$.

Th cos в $\triangle BAD$:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$.

$5 = 25\cos^2\alpha + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 5\cos^2\alpha$

$1 = 5\cos^2\alpha$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow AB = 5\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

$CB^2 = AC^2 - AB^2$

$CB^2 = 25 - 5 = 20$

$CB = 2\sqrt{5}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CB \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.

$S_{\triangle ABC} = 5$.

№2. Чистовик.

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$$

ОДЗ

$x \in [-3; 2]$.

$$\sqrt{x+3}+4=\left(2\sqrt{x+3}+1\right)\sqrt{7-x}$$

$$x+3+16+8\sqrt{x+3}=(7-x)\left(4x+13+4\sqrt{x+3}\right)$$

$$8\sqrt{x+3}-(7-x)\sqrt{x+3}\cdot 4=(7-x)(4x+13)-x-19$$

$$4\sqrt{x+3}\,(x-5)=-4x^2+72-14x$$

$$2\sqrt{x+3}\,(x-5)=-2x^2-7x+36$$

$$4(x+3)(x^2+25-10x)=4x^4+49x^2+36^2-144x^2-504x+28x^3$$

$$4x^3+100x-40x^2+12x^2+300-120x=4x^4-95x^2+28x^3-504x+1296$$

$$4x^4+24x^3-67x^2-484x+996=0$$

Чистовик.

№3.1

A: $5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$y^2-4y(a+x)+8x^2+5a^2+12ax=0$

Рассмотрим, как квадр. отн. y:

должен быть.

$\frac{D}{4} = 4a^2+4x^2+8ax-8x^2-5a^2-12ax = -4x^2-a^2-4ax = -(2x+a)^2 \geq 0$

т.е. $2x+a=0$

$x=-\frac{a}{2}.$

$\frac{D}{4}=0$ при $x=-\frac{a}{2} \Rightarrow y=2(a+x)=2(a-\frac{a}{2})=a.$

A: $\begin{cases} x_a=-\frac{a}{2} \Rightarrow a=-2x \\ y_a=a \end{cases} \Rightarrow y=a=-2x.$ $A(-\frac{a}{2}; a)$

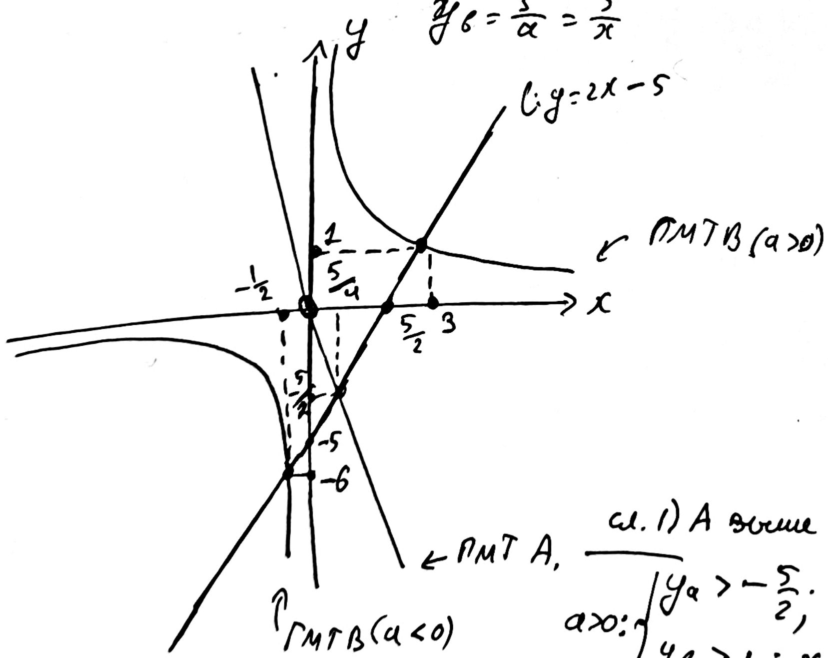
т.е. точка A ездит по прямой $y=-2x$ при различных знач. a.

Парабола: $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$ т.к. парабола $\Rightarrow a \neq 0$. (иначе, (исчезн. при x^2)=0).

$y=(x-a)^2+\frac{3}{a}.$

$B(a; \frac{3}{a})$ $x_B=a$

$y_B=\frac{3}{a}=\frac{3}{x}$ точка B ездит по гиперболе $y=\frac{3}{x}.$



$l \cap \frac{3}{x}$:

$\frac{3}{x}=2x-5$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=1 \\ x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-6 \end{array}\right.$

$l \cap -2x$:

$2x-5=-2x$

$x=\frac{5}{4} \Rightarrow y=-\frac{5}{2}$

сл. 1) A выше l и B выше l:

$a>0: \begin{cases} y_a>-\frac{5}{2};\ x_a<\frac{5}{4} \\ y_B>1;\ x_B<3 \end{cases}$ ①

$a<0: \begin{cases} y_a>-\frac{5}{2};\ x_a<\frac{5}{4} \\ y_B > -6;\ x_B < -\frac{1}{2} \end{cases}$ ②

№3.2

Числовик.

①

$a>0$

$$\begin{cases} a>-\frac{5}{2} \to a>-\frac{5}{2} \\ -\frac{a}{2}<\frac{5}{4} \to a>-\frac{5}{2} \\ \frac{3}{a}>1 \to a<3, \text{т.к } a>0 \\ a<3 \to a<3 \end{cases}$$

$a \in (0;3)$.

② $a<0$

$$\begin{cases} a>-\frac{5}{2} \\ -\frac{a}{2}<\frac{5}{4} \end{cases} \to a<-\frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{a}>-6 \mid \cdot a<0 \to a<-\frac{1}{2} \\ a<-\frac{1}{2} \to a<-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$a \in (-\infty; -\frac{5}{2})$

ч. 2) А и В ниже С:

$a>0$: $\begin{cases} x_a>\frac{5}{4};\ y_a>-\frac{5}{2} \Rightarrow a>-\frac{5}{2} \Rightarrow a>0 \\ x_b>3,\ y_b<1 \Rightarrow a>3 \end{cases} \to a>3$

$a \in (3;+\infty)$.

$a<0$: $\begin{cases} x_a>\frac{5}{4};\ y_a>-\frac{5}{2} \Rightarrow a>-\frac{5}{2} \\ x_b>-\frac{1}{2};\ y_b<-6 \Rightarrow a>-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a>-\frac{1}{2}$

$a \in (-\frac{1}{2};0)$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (0;3) \cup (3;+\infty)$

№2

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

Заметим, что $21+4x-x^2=(x+3)(7-x)$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7, \end{cases}$

Делаем неравносильные преобразования, потом проверим корни, т.к. могут появиться посторонние.

$x+3+7-x+16-2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x} - 8\sqrt{7-x} + 8\sqrt{x+3} = 4(x+3)(7-x) = 84+16x-4x^2$

$x+\underbrace{3+16}_{19} + 2\cdot 4\cdot\sqrt{x+3} = \underbrace{84+16x-4x^2+7-x}_{91} + 2\cdot 2\cdot(7-x)\cdot\sqrt{x+3}$

$\cancel{x+}\ \overset{4}{\cancel{8}}\sqrt{x+3} = \overset{36}{\cancel{72}} + \overset{7}{\cancel{14}}x - \overset{2}{\cancel{4}}x^2 + \overset{2}{\cancel{4}}(7-x)\sqrt{x+3}$

$2\sqrt{x+3}(2-7+x) = 36+7x-2x^2$

$2\sqrt{x+3}(x-5) = 36+7x-2x^2$

$4(x+3)(x-5)^2 = (36+7x-2x^2)^2$

$(4x+12)(x^2+25-10x) =$

$a^2-2ab+b^2 = 4a^2b^2+8-8ab$

$a^2-4a^2b^2+b^2-8+6ab=0$

$a^2(1-4b^2)+a\cdot 6b+b^2-8=0$

$D = 36b^2-4(1-4b^2)(b^2-8) =$

$(a-b)+4 = 2ab = 36b^2-4(b^2-8+4b^4+36b^2) =$

$(a-b) = 2(ab-2) = 36b^2-16b^4+32-148b^2 =$

$= 32-16b^4-112b^2$

$\sqrt{x+3}+4 = (2\sqrt{x+3}+1)\cdot\sqrt{7-x}$

$x+19+8\sqrt{x+3} = (4x+13+4\sqrt{x+3})(7-x) = (4x+13)(7-x)+4(7-x)\sqrt{x+3}$

$4\sqrt{x+3}(x-5) = (4x+13)(7-x)-x-19$

$16b^4+112b^2-32$

$4\sqrt{x+3}(x-5) = -4x^2+72+14x$

$4(x+3)(x-5)^2 = (36+7x-2x^2)^2$

$(4x+12)(x^2-10x+25) = (1296+49x^2+4x^4-144x^2+504x-28x^3)$

$4x^3 \cancel{-40x^2} + 100x \underset{-28x^2}{\cancel{+12x^2}} \overset{-20x}{\cancel{-120x}} + 300 = 1296 \cancel{-9}5x^2+4x^4-28x^3+504x$

$4x^4-32x^3-67x^2+524x+996=0$

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$8x^2+12ax=2(4x^2+6ax)$

$9a^2$

$4x^2+6ax+9a^2=(2x+3a)^2$

$\cancel{8x^2+12ax+18a^2+y^2-4ay+4a^2=12a^2}$

$\cancel{12ax=4ax+8ax}$

$12ax=-4ax+16ax$

$5a^2-4ay+\underline{8x^2}-\underline{4xy}+\underline{y^2}+\underline{12ax}=0$

$(4x^2+16ax+16a^2)$

$4\cdot 2\cdot 2$

$\underbrace{(y^2-4xy+4x^2)}_{(y-2x)^2}+(4x^2+12ax+9a^2)-4ay-4a^2=0$

$\cancel{(y-2x)^2+(2x+3a)}^2-$

$(\cancel{y-2x})^2$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$y^2-4y(a+x)+8x^2+12ax+5a^2=0$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

$3<-6a$

$(x-a)^2+\frac{3}{a}.$

$\frac{D}{4}=4(a+x)^2-8x^2+12ax-5a^2$

$\frac{3}{2}<-a$

$a>-\frac{1}{2}$

$4a^2+4x^2+8ax-8x^2-12ax-5a^2=0$

$-4x^2-a^2-4ax=-(2x+a)^2$

$\frac{4(a+x)}{2}=2(a+x)$

$\frac{3}{a}>-6\ |\cdot a<0$

$\frac{3}{x}=2x-5$

$3<-6a\ |:-6<0$

$-\frac{1}{2}>a$

$3=2x^2-5x$

$-1:$

$2x^2-5x-3=0$

$\cancel{2+5-3=0}$

$D=25+3\cdot 2\cdot 4=49$

$x=\frac{5\pm 7}{4}\to 3,\ \to -\frac{1}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005375**

ID профиля: **842465**

Вариант 10

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+2x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a$; Заметим, что $a \geq 0$ и $b \geq 0$.
$x^2y^2=b$.

Тогда $x^4+y^4=a^2-2b$.

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a} + b = 10 \quad (1) \\ a^2+5b = 81 \quad (2) \end{cases}$$

$(2) - 5\cdot(1)$:

$$a^2+5b-\frac{30}{a}-5b = 81-50$$

$$a^2-\frac{30}{a} = 31$$

$$a^3-31a-30=0$$

$$(a+1)(a^2-a-30)=0$$

$$\underbrace{(a+1)}_{\geq 1}(a-6)\underbrace{(a+5)}_{\geq 5}=0$$

$\geq 1 \longrightarrow$ т.к. $a \geq 0$

Значит, $a=6$.

(1): $\dfrac{6}{6}+b=10 \Rightarrow b=9$.

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$$

$$x^2+\frac{9}{x^2}=6$$

$$x^4-6x^2+9=0$$

$$(x^2-3)^2=0$$

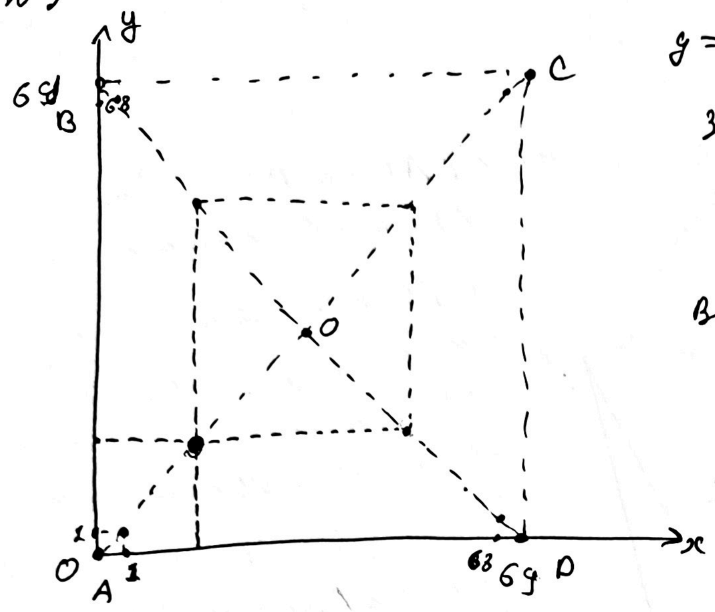
$$x^2=3.$$

$$y^2=\frac{9}{x^2}=3.$$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

Чистовик

№5



$y = x$ и $y = 69 - x$ — диагонали квадрата.

Заметим, что их точка пересечения $O\left(\frac{69}{2}; \frac{69}{2}\right)$ — не узел сетки.

Всего точек с координатами $\in \mathbb{Z}$, таких, что $x, y \in [1; 68]$.

на $y = x$: $(1;1)$, $(2;2)$, $\vdots$, $(68;68)$ — 68 шт.

$y = 69 - x$: $(1;68)$, $(2;67)$, $\vdots$, $(68;1)$ — 68 шт.

Эти мн-ва не пересекаются!

Всего точек внутри: 68^2.

Пусть X — искомое количество способов.

Первый случай:

хотя бы один узел на $y = x$ (один или два) и 0 узлов на $y = 69 - x$.

$$68 \cdot \underbrace{(68^2 - 1 - 67 - 67 - 66)}_{\text{„Запрещены"}} = 68 \cdot (68^2 - 3 \cdot 67) \text{ способов.}$$

↑ выбрали точку на $y = x$ (узел)

„Запрещены": 1) уже выбранный узел.
2) по 67 узлов, находящихся с выбранным в одной горизонтали или вертикали
3) 66 узлов на $y = 69 - x$
(два из 68-ми мы уже учли в 2)).

Второй случай:

хотя бы один узел на $y = 69 - x$ (один или два) и 0 узлов на $y = x$.

Аналогично первому случаю, $68 \cdot (68^2 - 3 \cdot 67)$ способов

Третий случай

один узел на $y = x$ и один узел на $y = 69 - x$.

$68 \cdot 66$ способов

↑ выбрали узел на $y = x$

← выбрали узел на $y = 69 - x$, не в одной линии с предыдущим.

1-ый, 2-ой и 3-ий случаи, очевидно, не пересекаются.

(в 1-ом — 0 узлов на $y = 69 - x$; ≥ 1 узел на $y = x$; во 2-ом — 0 узлов на $y = x$; ≥ 1 узел на $y = 69 - x$;

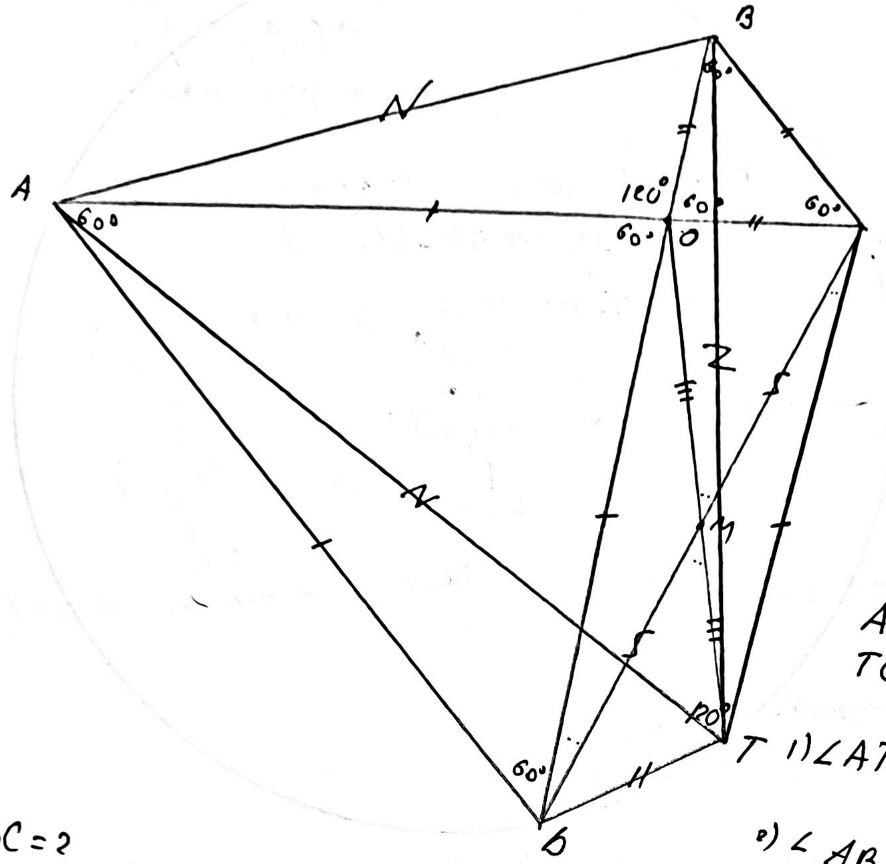
в 3-ем — по 1 узлу на $y = x$ и $y = 69 - x$).

Имстовели.

Итого, $x = 2\cdot 68\cdot(68^2-3\cdot 67)+68\cdot 66 = 2\cdot 68\,(68^2-3\cdot 67+33) = 606016$

Чистовик

№ 6



а) $\angle CAD = \angle CBD = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow ABCD$ – вписанный.

$OCTD$ – параллелограмм, т.к. в нем диагонали OT и CD делятся точкой пересечения M пополам.

Значит, $\angle CTD = \angle OCD = 120°$.

$\angle CTD + \angle DBC = 120° + 60° = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow BCTD$ – вписанный.

Имеем:

$A \in$ окр.(CBD)
$T \in$ окр.(CBD) $\Rightarrow ABCTD$ – вписан.

1) $\angle ATB = \underset{60°}{\underset{\shortparallel}{\angle ACB}}$ (опираются на $\breve{AB}$) $\Rightarrow \underline{\angle ATB = 60°}$.

2) $\angle ABT = 180° - \angle ADT =$
$= 180° - (\angle ADB + \angle ODT) =$
$= 180° - 60° - \angle ODT = 120° - \angle ODT$.
$\angle ODT = 180° - \angle COD = 180° - 120° = 60°$
(т.к. $OCTD$ – пар/грам)
т.е. $\underline{\angle ABT} = 120° - 60° = \underline{60°}$.

3) $\underline{\angle BAT} = 180° - \angle ABT - \angle ATB = \underline{60°}$

В $\triangle ABT$ все углы по $60° \Rightarrow$ он правильный, ч.т.д.

б) $BC = 2$
$AD = 2$.

$S_{ABCD} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOB} + \overbrace{2 \cdot S_{\triangle AOB}}^{S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}} =$

$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$, т.к. они равные ($\angle AOB = \angle COD$; $BO = OC$; $AO = OD$).

$= \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7 \cdot 7}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2 \cdot 7}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 + \frac{49}{2} + 7\right) = \frac{67\sqrt{3}}{4}$.

$S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$

Th cos для $\triangle AOB$:

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos 120°$.

$AB^2 = AO^2 + OB^2 + AO \cdot OB = 49 + 4 + 7 \cdot 2 = 67$

$S_{ABT} = \frac{67\sqrt{3}}{4}$.

$S_{ABCD} = S_{ABT} \Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = 1$.

Ответ: 1.

№1

$$\begin{cases}\dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10\\[4pt] x^4+y^4+7x^2y^2=81\end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a$;

$x^2y^2=b$.

Тогда $x^4+y^4=a^2-2b$.

$$\begin{cases}\dfrac{6}{a}+b=10 \quad (1)\\[4pt] a^2+5b=81 \quad (2)\end{cases}$$

$(2)-5\cdot(1)$:

$a^2+5b-\frac{30}{a}-5b=81-50$

$a^2-\frac{30}{a}=31$

$a^3-31a-30=0$

$(a-1)(a^2+a+30)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a^2+a+30=0 \end{array}\right. \Rightarrow \underline{a=1}.$

$D=1-30\cdot4<0.$