# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005355**

ID профиля: **348621**

Вариант 10

чистовик №3 3

1. $5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$

$5a^2 + 4a(3x - y) + 8x^2 - 4xy + y^2 = 0$ решим отн. $a$

$D/4 = 4(3x-y)^2 - 5(8x^2 - 4xy + y^2) = 36x^2 - 24xy + 4y^2 - 40x^2 + 20xy - 5y^2 = -4x^2 - 4xy - y^2 =$

$= -(2x+y)^2 \leq 0 \Rightarrow 2x + y = 0$

$y = -2x$

$a = \frac{-2(3x-y)}{5} = \frac{-10x}{5} = -2x \Rightarrow x = -\frac{a}{2}$

$y = a$

$A(-\frac{a}{2}; a)$ $y = -2x$

B – вершина параболы: $ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$

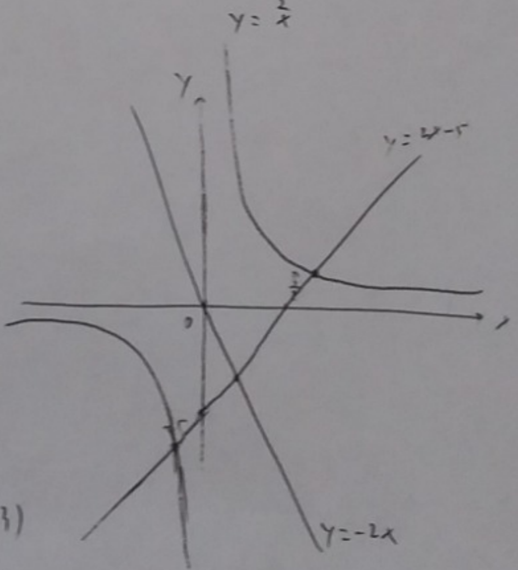
$ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3$ $|:a$ т.к. это парабола $a \neq 0$

$y = x^2 - 2ax + \frac{a^3+3}{a}$

$x_0 = a$

$y_0 = a^2 - 2a^2 + \frac{a^3+3}{a} = \frac{a^3+3-a^3}{a} = \frac{3}{a}$

$B(a; \frac{3}{a})$ $y = \frac{3}{x}$




$\frac{3}{x} = 2x - 5$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$D = 25 + 3 \cdot 2 \cdot 4 = 49$

$x = \frac{5 \pm 7}{4} = 3; -\frac{1}{2}$

B выше прямой при $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; 3)$

ниже $a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (3; +\infty)$

$-2x = 2x - 5$

$4x = 5$ A выше при $x < \frac{5}{4}$ т.к. $-\frac{a}{2} < \frac{5}{4}$

$x = \frac{5}{4}$ $a > -\frac{5}{2}$

чистовик №2

$\boxed{2}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2} = 2\sqrt{(7-x)(x+3)}$   ОДЗ: $-3 \le x \le 7$

$\sqrt{x+3} = a$

$\sqrt{7-x} = b$

$a - b + 4 = 2ab$ ; $a+4 \geq b$  $a^2+8a+16 \geq b^2$  * $x+3+8\sqrt{x+3}+16 \geq 7-x$

$(a-b+4)^2 = 4a^2b^2$

$a^2+b^2+16+8a-8b-2ab = 4a^2b^2$ ; $a^2+b^2 = x+3+7-x = 10$

$10+16+8(a-b)-2ab = 4a^2b^2$ ; $a-b = 2ab-4$

$26+8(2ab-4)-2ab = 4a^2b^2$

$26+16ab-2ab-32 = 4a^2b^2$ $|:2$

$-3+7ab = 2a^2b^2$

$t = ab$

$2t^2-7t+3=0$

$D = 49-3\cdot2\cdot4 = 25$

$t = \frac{7\pm5}{4} = \frac{1}{2};\ 3$

$ab = \frac{1}{2}$

$\sqrt{21+4x-x^2} = \frac{1}{2}$ $\Updownarrow$

$x^2-4x+\frac{1}{4}-21=0$

$\frac{D}{4} = 4+21-\frac{1}{4} = 25-\frac{1}{4} = \frac{99}{4}$

$x = 2\pm\frac{\sqrt{99}}{2}$

$\sqrt{21+4x-x^2} = 3$

$x^2-4x+9-21=0$

$x^2-4x-12=0$

$\frac{D}{4} = 4+12 = 16$

$x = 2\pm4 = 6;\ -2$

Ответ: $x = 2\pm\frac{\sqrt{99}}{2};\ 6;\ -2$

* $x+3+8\sqrt{x+3}+16 \geq 7-x$

$8\sqrt{x+3} \geq -2x-12$

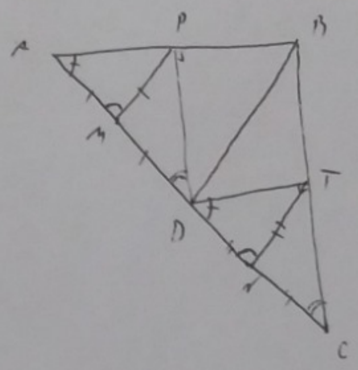
$4\sqrt{x+3} \geq -x-6$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+6\geq0\\ x+3\geq0\end{cases}\\ \begin{cases}x+6<0 & \text{— невозможно т.к. } x\geq-3\\ \dots\end{cases}\end{array}\right.$ $\Rightarrow x\geq-3$ т.е. $a+4\geq b$

Чистовик

1

м




Дано:

PBTD - вписанный,
BD - диагональ

AM=MD

DN=NC

PM || TN

$\angle ABC = ?$

$\angle DTB = \angle BPD = 90^\circ$ т.к. опираются на диагональ

⇓

$\angle APD = 90^\circ$ $\angle DTC = 90^\circ$

⇓

$PM = AM = MD$ $TN = DN = NC$

как медианы в прямоуг △

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT \Rightarrow \angle MAP = \angle NDT$ и $\angle DCT = \angle ADP \Rightarrow$

$\triangle APD \sim \triangle DTC \sim \triangle ABC$

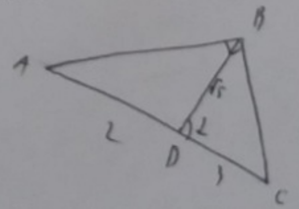
⇓

$\angle ABC = 90^\circ$

б) $MP = 1$ $AD = 2$ $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} =$

$NT = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $DC = 3$ $= \frac{1}{2} 2\sqrt{5}\sin\alpha + \frac{1}{2} 3\sqrt{5}\sin\alpha =$

$BD = \sqrt{5}$ $= \frac{5}{2}\sqrt{5}\sin\alpha$




по Т cos: $AB^2 = 4 + 5 + 4\sqrt{5}\cos\alpha$

$BC^2 = 9 + 5 - 6\sqrt{5}\cos\alpha$

по Т Пифагора

$AB^2 + BC^2 = 25$

$9 + 4\sqrt{5}\cos\alpha + 14 - 6\sqrt{5}\cos\alpha = 25$

$-2\sqrt{5}\cos\alpha = 2$

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$S_\triangle = \frac{5}{2}\sqrt{5}\sin\alpha = \frac{5}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 5$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$ $S_\triangle = 5$

осталось решить систему

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > \frac{5}{2} \\ a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 3) \end{cases} \\ \begin{cases} a < \frac{5}{2} \\ a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (3; +\infty) \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a \in \left(\frac{5}{2}; 3\right) \\ a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{5}{2}; 3\right)$

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$(2\sqrt{2}x)^2+2\cdot 2\sqrt{2}x\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}a+\frac{9}{2}a^2$

$ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

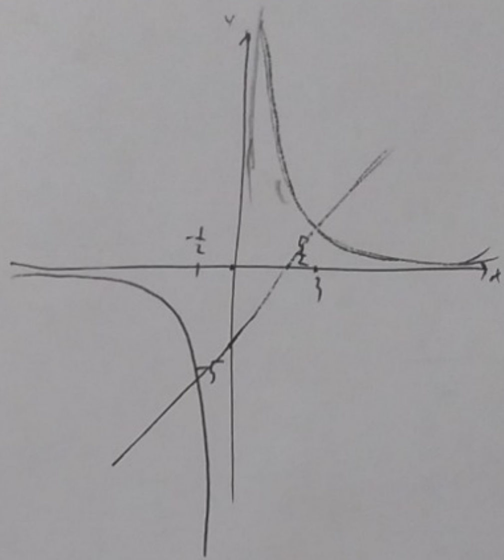
$ay=ax^2-2a^2x+a^3+3$

$y=x^2-2ax+\frac{a^3+3}{a}$

B: $x=a$

$a^2-2a^2+\frac{a^3+3}{a}=\frac{a^3+3}{a}-a^2=\frac{3}{a}$

$B\ (a;\frac{3}{a})$





$\frac{3}{x}=2x-5$

$2x^2-5x-3=0$

$D=25+3\cdot 2\cdot 4=49$

$x=\frac{5\pm 7}{4}=3;-\frac{1}{2}$

$4x^2+y^2-4xy$

$16a^2-8ay+16x^2-8xy+8y^2+24ax=0$

$y^2-8xy$

$5a^2+4a(3x-y)+8x^2-4xy+y^2=0$

$\frac{D}{4}=4(3x-y)^2-40x^2+20xy-5y^2=36x^2-24xy+4y^2-40x^2+20xy-5y^2=-4x^2-4xy-y^2=$

$=-(2x+y)^2$

$y=-2x$

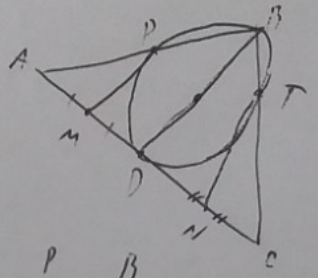
$a=\frac{-2(3x-y)}{5}=\frac{-10x}{5}=-2x$

$x=-\frac{a}{2}$

$y=a$

211005355 (U348621 M1277666)

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}=2\sqrt{25-(x-2)^2}$

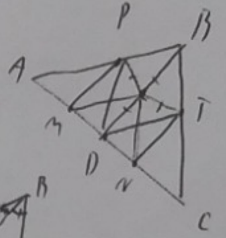


$-3\le x\le 7$

$|x-2|\le 5$

$(5-|x-2|)(5+|x-2|)=$

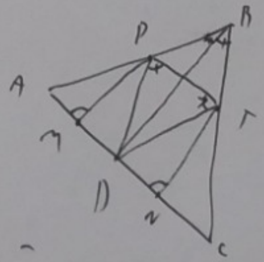
$(7-x)(x+3)$



$a-b+4=2ab$

$a(2b-1)=4-b$

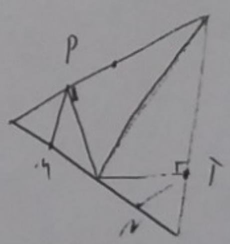
$a=\frac{4-b}{2b-1}$



$b=\frac{a+4}{2a+1}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{2}}{2a+1}=\frac{1}{2}+\frac{7}{4a+2}$

$b^2=\frac{a^2+8a+16}{4a^2+4a+1}$

$-\quad+\quad-$ ; $\frac{1}{2}$ ; $4$



$7-x=\frac{x+3+8a+16}{4x+12+4a+1}$

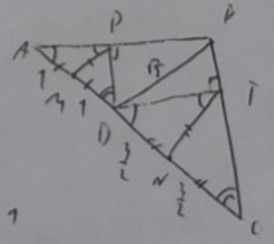
$b\in[\frac{1}{2};4]$

$b^2\in[\frac{1}{4};16]$

$\frac{1}{4}\le 7-x\le 16$

$x+\frac{1}{4}\le 7\le x+16$

$x\le 6\frac{3}{4}$



$a^2+b^2+16+8a-8b-2ab=4a^2b^2$

$16+16+8(a-b)-2ab=4a^2b^2$

$26+8(2ab-4)-2ab=4a^2b^2$

$26+16ab-32-2ab=4a^2b^2$

$13b+7ab-16=2a^2b^2$

$2t^2-7t+\cancel{8}3=0$

$D=49-\cancel{...}8\cdot3=25$

$t=\frac{7\pm5}{4}=\frac{1}{2};3$

$ab=\frac{1}{2};3$

$MP=1$

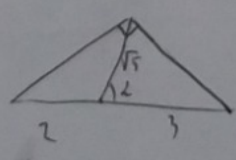
$NT=\frac{3}{2}$

$BD=\sqrt{5}$

$AC=5$

$PD^2+PB^2=5$

$PD^2+AP^2=4$



$3=\sqrt{5}\sin\alpha$

$\frac{1}{2}\sqrt{5}\sin\alpha$

$\frac{3}{2}\sqrt{5}\sin\alpha=\frac{3}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=3$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$9+5-6\sqrt{5}\cos\alpha+4+5+4\sqrt{5}\cos\alpha=25$

$14+9-2\sqrt{5}\cos\alpha=25$

$-2\sqrt{5}\cos\alpha=2$

$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005355**

ID профиля: **348621**

Вариант 10

№4 Чистовик

1

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$x^2+y^2 = a \geq 0$

$x^2y^2 = b \geq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a} + b = 10 \\ a^2 - 2b + 7b = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 + ab = 10a \\ a^2 + 5b = 81 \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{81-a^2}{5}$$

$6 + a\dfrac{81-a^2}{5} = 10a$

$30 + 81a - a^3 = 50a$

$a^3 - 31a - 30 = 0$

$a = -1$ корень

$$\begin{array}{l|l} a^3 - 31a - 30 & a+1 \\ \hline -\ a^3 + a^2 & a^2 - a - 30 \\ \quad -a^2 - 31a & \\ \quad -\ -a^2 - a & \\ \qquad -30a - 30 & \\ \qquad -\ -30a - 30 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$(a+1)(a^2-a-30) = 0$ т.к. $a+1 > 0$

$a^2 - a - 30 = 0$

$D = 1 + 30\cdot 4 = 121$

$a = \dfrac{1 \pm 11}{2} = 6;\ -5$ не подходит

$b = \dfrac{81-a^2}{5} = \dfrac{81-36}{5} = 9$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 6 \\ x^2y^2 = 9 \end{cases}$$

по Т. Виета $x^2$ и $y^2$ являются корнями ур.

~~$t^2 - 6t + 9 = 0$~~

$t^2 - 6t + 9 = 0$

$(t-3)^2 = 0$

$x^2, y^2 = 3$

$x, y = \pm\sqrt{3}$

Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$ $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

$ab -$

$-\dfrac{a^2}{4}$ -

$4 + 8a^2$

Чистовик

№5

точек на прямой $y=x$ (не включая $(0;0)$ и $(69;69)$) $70-2=68$

на прямой $y=69-x$ также 68

выбираем (.) на $y=x$, 68 способов, вторую $68^2-n$ способов, где $n$ кол-во (.) на этой вертикали и горизонтали $n=67\cdot 2$ $((70-3)\cdot 2)$

границы и первая (.)

получаем

$68(68^2-67\cdot 2)$ способов

На др. диагонали так же получается $2\cdot 68(68^2-67\cdot 2)$, вычитаем случаи, когда обе (.) на диагоналях таких всего $68\cdot(68-2)$ (вычитаем (.) на этой же вертикали и горизонтали т.к. их мы не считаем)

Кроме (.) в центре, но такой нет т.к. $x=69-x$
$x=\frac{69}{2}$ не целое число

$$68\cdot(68^2-67\cdot 2)-68\cdot 67=68^3-68\cdot 67\cdot 2-68\cdot 67=68^3-68\cdot 67\cdot 3=68\cdot(68^2-67\cdot 3)=$$
$$=68\cdot(68^2-68\cdot 3+3)=68(68(68-3)+3)=68\cdot(68\cdot 65+3)$$

$4420+3=4423$

$4423 \times 68$: 35384, 26538, 300764

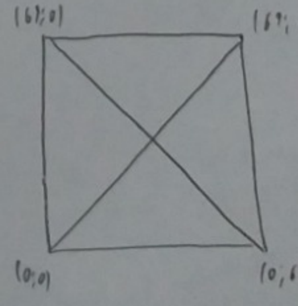
$68 \times 65$: 340, 408, 4420

~~68 × 65: 340, 408, 4420~~

$4470+3=4473$

~~4473 × 68: 35784, 26838, 304764~~

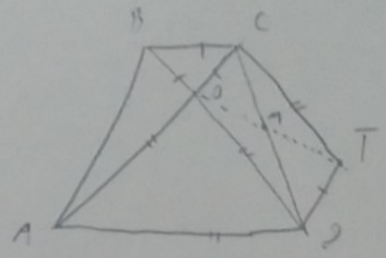
Ответ: ~~1964764~~ или $68\cdot(68\cdot 65+3)$ (что тоже самое)
300764



Дано

△BOC – прав

△AOD – прав




Пусть $OB = a$

$OD = b$

тогда $\angle BOA = 120^\circ$

$AB = \sqrt{a^2+b^2+ab}$

$CT = b$ т.к. $OCTD$ – ~~Пара~~ параллелограмм ($OM = MT$, $CM = MD$)

$\angle OCT = 180^\circ - \angle COD = 120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow BT = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120^\circ} = \sqrt{a^2+b^2+ab}$

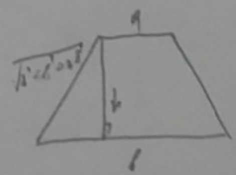
$DT = a$ $\angle ADT = 120^\circ \Rightarrow AT = \sqrt{a^2+b^2+ab}$

$AB = BT = TA = \sqrt{a^2+b^2+ab} \Rightarrow$ △ABT – прав

б) $BC = a = 2$

$AD = b = 7$

$\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ ABCD – трапеция, правильная т.к. $BC \parallel AD$ и $BC \neq AD$




$S_{ABCD} = \dfrac{a+b}{2}\cdot h = \dfrac{(a+b)^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABT} = \left(\sqrt{a^2+b^2+ab}\right)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2+2ab} = \dfrac{4+49+14}{4+49+28} = \dfrac{67}{81}$

$h^2 = (a^2+b^2+ab) - \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2 = a^2+b^2+ab - \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{ab}{2} - \dfrac{a^2}{4} =$

$4h^2 = 3a^2+3b^2+6ab = 3(a+b)^2$

$h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$

Ответ: ч.т.д.; $\dfrac{67}{81}$

211005355 (U348621 M1277667)