Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

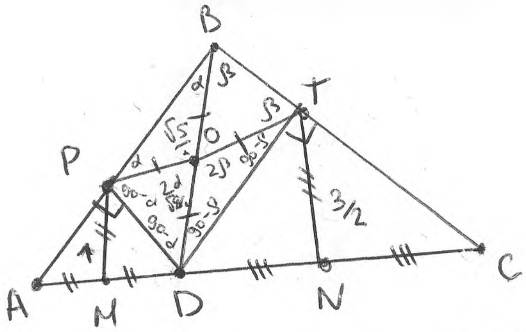
Шифр: **211005354**

ID профиля: **319107**

Вариант 10

Чистовик.

Задача 1.



1) Пусть $\angle PBO = \alpha$ и $\angle OBT = \beta$; O – центр. окр.
$\Rightarrow \angle BPO = \alpha$, т.к. $\triangle POB$ - р/б и $\angle BTO = \beta$, т.к. $\triangle BOT$ - р/б.

2) $\angle OBT$ и $\angle OTB = \beta \Rightarrow \angle DOT = 2\beta \Rightarrow \angle ODT = 90-\beta = \angle OTD$.
Аналогично $\angle POT = 2\alpha \Rightarrow \angle OPD = 90-\alpha = \angle ODP$.

3) Можно заметить, что $\angle BPD = \alpha + 90 - \alpha = 90$. $\Rightarrow \angle DTC = 90^\circ$.
Тоже самое с $\angle BTD \Rightarrow \angle APD = 90^\circ$.

4) M - середина AD и $\angle APD = 90^\circ \Rightarrow AM = MD = MP$
Аналогично $TN = ND = NC$

5) Знаем, что $PM \parallel TN$ также MD и NC – на одной прямой $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle PMD = \angle TNC$,
Также $PM = MD$ и $TN = NC \Rightarrow \triangle PMD \sim \triangle TNC \Rightarrow PD \parallel TC. \Rightarrow PD \parallel BC.$
$\Rightarrow \angle APD = \angle ABC = 90^\circ$.

$\boxed{\text{Ответ на пункт а) } 90^\circ.}$

$MP = 1$; $NT = 3/2$; $DB = \sqrt{5} \Rightarrow$ радиус окружности $= \sqrt{5}/2$

6) Раз $\angle ABC = \angle BTD = \angle BPD = 90^\circ$, то $\square DPBT$ – прямоугольник.
$\Rightarrow$ O лежит на прямой PT.

7) $\triangle MPD \sim \triangle TNC \Rightarrow \frac{PD}{TC} = \frac{PM}{TN} \Rightarrow PD \cdot 3/2 = \cancel{PM}\ TC$

$S_{\square} PDBT = PD \cdot TC$.

$PD^2 + TD^2 = 5$.

$PD^2 + PD^2 \cdot 9/4 = 5 \Rightarrow PD^2 \cdot \frac{13}{4} = 5 \Rightarrow PD^2 = \frac{20}{13}$

$PD = \sqrt{20/13}$

$TD = \sqrt{20/13} \cdot 3/2$

$\Rightarrow S_{\square} PDBT = \frac{\cancel{20}^{10}}{13} \cdot 3/\cancel{2} = \frac{30}{13}$

Продолжение на след. странице

Чистовик
Задача 1
продолжение

2

$S_{\triangle}APD = PA \cdot PD/2.$

$PD = \sqrt{20/13}$

$PM = MD = AM = 1 \Rightarrow AD = 2$

$PD^2 + AP^2 = AD^2$ – Т. Пифагора

$\frac{20}{13} + AP^2 = 4$

$AP^2 = 4 - \frac{20}{13} = \frac{52-20}{13} = \frac{32}{13} \Rightarrow AP = \sqrt{32/13}$

$S_{\triangle}APD = \sqrt{32/13} \cdot \sqrt{20/13} : 2 = \frac{\sqrt{640}}{26} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{5}}{13 \cdot \cancel{2}} = \frac{4\sqrt{10}}{13}$

К. подобия $\frac{TC}{PD} = 3/2 \Rightarrow$

$S_{\triangle}TDC = \frac{\cancel{4}\sqrt{10}}{13} \cdot \frac{9}{\cancel{4}} = \frac{9\sqrt{10}}{13}$

Суммарная площадь: $\frac{30}{13} + \frac{4\sqrt{10}}{13} + \frac{9\sqrt{10}}{13} =$

$= \frac{30}{13} + \sqrt{10}$

$\boxed{\text{Ответ: а) } 90^0 \quad \text{б) } \frac{30}{13} + \sqrt{10}.}$

Чистовик

Задача 2. ③

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}.$$

1) Решим $21+4x-x^2=0$.

$D=16+4\cdot 21=100$

$x_1, x_2=-3; 7 \Rightarrow 21+4x-x^2=(x+3)(7-x)$

2) Пусть $\sqrt{x+3}=a$; $\sqrt{7-x}=b$.

$a-b+4=2ab$

3) Выразим $2ab=a^2+b^2-(a-b)^2$. Также $a^2+b^2=(x+3)+(7-x)=10$

$(a-b)+4=10-(a-b)^2$

$(a-b)^2+(a-b)-6=0$

4) Решим это уравнение

$D=25$

$(a-b)_1; (a-b)_2=2; -3$

$\{a-b=2 \Rightarrow ab=3$

$a-3/a=2$

$a^2-2a-3=0$

$D=16$

$a_1 a_2 = \boxed{3}; \boxed{-1}$

$b_1 b_2 = \boxed{1}; \boxed{-3}$

5.1) $x+3=9$, $7-x=1$ $\Rightarrow$ $\boxed{x=6}$ или $x+3=1$, $7-x=9$ $\Rightarrow$ $\boxed{x=-2}$

$\{a-b=-3; ab=0,5$

$2a^2+6a-1=0$

$D=44$

$a_3; a_4 = \frac{-3+\sqrt{11}}{2}; \frac{-3-\sqrt{11}}{2}$

$b_3; b_4 = \frac{3+\sqrt{11}}{2}; \frac{3-\sqrt{11}}{2}$

5.2) $x+3=\frac{(-3+\sqrt{11})^2}{4}$

$7-x=\frac{(3+\sqrt{11})^2}{4}$

$\Downarrow$

$\frac{4-3\sqrt{11}}{2}=\boxed{x=\frac{(\sqrt{11}-3)^2}{4}-3}$

или

$\frac{4+3\sqrt{11}}{2}=\boxed{x=\frac{(-3-\sqrt{11})^2}{4}-3}$

Других корней нет, т.к. на каждом этапе рассматривались все возможные варианты корней промежуточных уравнений.

6.) ОДЗ: $x\geq -3$, $x\leq 7$

6 и -2 подходят под ОДЗ.

Проверим остальные

$\frac{4-3\sqrt{11}}{2}<7$	$\frac{4-3\sqrt{11}}{2}>-3$	$\frac{4+3\sqrt{11}}{2}<7$	$\frac{4+3\sqrt{11}}{2}>-3$
$4-3\sqrt{11}<14$	$4-3\sqrt{11}>-6$	$4+3\sqrt{11}<14$	$4+3\sqrt{11}>-6$
$-10<3\sqrt{11}$	$10>3\sqrt{11}$	$3\sqrt{11}<10$	$10+3\sqrt{11}>0$
это верно	$\frac{100}{9}>11$	$\sqrt{11}<\frac{10}{3}$	это верно.
	$100>99$	$11<\frac{100}{9}$	
	это верно	$99<100$	
		это верно	

$\boxed{\text{Ответ: } 6; -2; \frac{4-3\sqrt{11}}{2}; \frac{4+3\sqrt{11}}{2}}$

Черновик

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2 \cdot \sqrt{(x+3)}\sqrt{(7-x)}$

~~$\sqrt{x+3} - \sqrt{7+x} + 4 =$~~

$21+4x-x^2 = (x+3)(7-x)$

$D = 16+4 \cdot 21 = 100$

$x_1, x_2 = \frac{-4 \pm 10}{-2} =$

$= -3; 7$

4

$a - b + 4 = 2ab \quad = a^2+b^2 - (a-b)^2$

~~$a-b+4 = (a+b)^2 + a^2 + b^2$~~

$(a-b)^2 = 2^2(ab-2)^2$

$a^2+b^2-2ab = 4(ab-2)^2$

$a^2+b^2-2ab = 4(a^2b^2+4-2\cdot 2ab)$

$a^2+b^2-2ab = 4a^2b^2+16-16ab$

$a^2+b^2 = 4a^2b^2+16-14ab$

~~$x+3+7-x = 4(x+3)(7-x)+16-44$~~

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 + 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = x+3+7-x$

$(2\sqrt{(x+3)} \cdot \sqrt{(7-x)} - 4)^2 + 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 10$

$4(x+3)(7-x) + \cancel{16}^{6} - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{7-x} + 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{7-x} = \cancel{10}$

$4(x+3)(7-x) + 6 = 14\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{7-x}$

$2(x+3)(7-x) + 3 = 7\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{7-x}$

$(a-b) + 4 = 10 - (a-b)^2$

$(a-b)^2 + (a-b) - 6 = 0$

$D = 1^2 + 4 \cdot 6 = 25$

$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2; -3$

$\boxed{a-b=2}$

$2+4 = 2ab$

$\boxed{ab=3}$

$\boxed{a-b=-3}$

$-3+4 = 2ab$

$\boxed{a \cdot b = 0{,}5}$

$a - 3/a = 2$

$a^2 - 3 = 2a$

$a^2 - 2a - 3 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16$

$a_1, a_2 = \frac{2 \pm 4}{2} = \boxed{3}; \boxed{-1}$

$b = \boxed{1}; \boxed{-3}$

$\frac{(-3-\sqrt{11})^2}{4} - 3 =$

$= \frac{9+11+6\sqrt{11}-12}{4} =$

$= \frac{8+\sqrt{11} \cdot 6}{4} = \frac{4+\sqrt{11} \cdot 3}{2}$

$\frac{(\sqrt{11}-3)^2}{4} - 3 =$

$= \frac{11+9-2 \cdot 3 \cdot \sqrt{11}}{4} - 3 =$

$= \frac{8-6\sqrt{11}}{4} = \frac{4-3\sqrt{11}}{2}$

$11 < \frac{100}{9}$

~~2+1,5x=-3~~

$2 - 1{,}5x = -3$

$5 = 1{,}5x \qquad x = \frac{10}{3} = 3{,}333$

$a - 0{,}5/a = -3$

$a^2 - 0{,}5 = -3a$

$2a^2 - 1 = -6a$

$2a^2 - 1 = -6a$

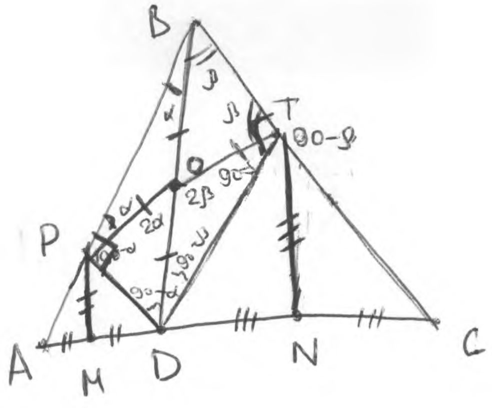
$2a^2 + 6a - 1 = 0$

$D = 36 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 44$

$a_1, a_2 = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{4} \Rightarrow \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}$

$\boxed{\frac{-3+\sqrt{11}}{2}; \quad \frac{3+\sqrt{11}}{2}}; \quad \boxed{\frac{-3-\sqrt{11}}{2}; \quad \frac{3-\sqrt{11}}{2}}$

Черновик



5

$$\frac{AP}{2}\cdot PD + \frac{PD\cdot DT}{2} + \frac{DT\cdot TC}{2}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005354**

ID профиля: **319107**

Вариант 10

Чистовик

Задача 4.

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

Пусть $x^2 = a$; $y^2 = b$

ОДЗ: $x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow x^2>0$ и $y^2 \geq 0$ или $x^2 \geq 0$ и $y^2>0$.

$$\begin{cases} \frac{6}{a+b} + ab = 10 \\ a^2+b^2+7ab = 81 \end{cases}$$

$(a^2+b^2+2ab)+5ab = 81$

$(a+b)^2 + 5ab = 81$

$(a+b)^2 + 5(10 - 6/a+b) = 81$

Пусть $t_1 = a+b$

$t^2 + 50 - \frac{30}{t} = 81$

$t^2 - 30/t = 31$

$t^3 - 30 - 31t = 0$

Подходит $t = -1$. $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} t^3-31t-30 & t+1 \\ \hline -\underline{t^3+t^2} & t^2-t-30 \\ -t^2-31t-30 & \\ -\underline{-t^2-t} & \\ -30t-30 & \\ -\underline{-30t-30} & \\ 0 & \end{array}$$

$t^2 - t - 30 = 0$

$D = 121$

$t_2, t_3 = \frac{1 \pm 11}{2} = 6; -5.$

Но $t = a+b = x^2+y^2 \Rightarrow t \geq 0 \Rightarrow t \neq -5$ и $t \neq -1 \Rightarrow t = 6$ только

$\frac{6}{\underbrace{a+b}_{t=6}} + ab = 10 \Rightarrow \begin{cases} ab = 9 \\ a+b = 6 \end{cases} \Rightarrow$

$a = 3.$

$b = 3.$

$x = \sqrt{3}; -\sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}; -\sqrt{3}$

Ответ: $\boxed{\begin{matrix} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{matrix}}$

Чистовик

Задача 6. ②

Будем подсчитывать способы отдельно по ситуациям.

1) [Первая верш — на диагонали
[Вторая верш — не на диагонали.

Выбрать верш на диагонали $= 68 \cdot 2$.

Выбрать вне диагонали $= 68 \cdot 68 - 68 \cdot 2$.

Выбрать вне диагонали, и чтобы было на разных вертикалях и горизонталях. $= 68 \cdot 68 - 68 \cdot 2 - 66 \cdot 2$.

$66 \cdot 2$, т.к. в каждой вертик/горизонт. 2 клетки заняты диагоналями

Итого: $\underbrace{68 \cdot 2} \cdot \underbrace{(68 \cdot 68 - 68 \cdot 2 - 66 \cdot 2)}$

2) [Первая верш. — на диагонали
[Вторая — тоже на диагонали

Выбрать верш на диагонали $= 68 \cdot 2$.

Выбрать еще одну верш на диагонали так, чтобы были разные горизонтали и вертикали: $68 \cdot 2 - 4$.

Итого: $\dfrac{\underbrace{68 \cdot 2} \cdot \underbrace{(68 \cdot 2 - 4)}}{2}$

2 ← так как можно сначала взять II, а потом уже I и можно сначала I, потом II. подсчет дважды.

Сложить $68 \cdot 2 (68 \cdot 68 - 68 \cdot 2 - 66 \cdot 2) + \dfrac{68 \cdot \cancel{2} (68 \cdot 2 - 4)}{\cancel{2}} =$

$= 68^3 \cdot 2 - 68^2 \cdot 2^2 - 66 \cdot 68 \cdot 2^2 + \cancel{68^2} \cdot 2 - 68 \cdot 2^2 =$ $\quad 68^2 = (70-2)^2 = 4900 + 4 - 280$

$= 68^3 \cdot 2 - 68^2 \cdot 2 - (67 \cdot 68) 4 = 2 \cdot 68 (68^2 - 68 - 2 \cdot 67) =$

$= 2 \cdot 68 (4900 \cancel{+4} - 280 - 68 - \overset{130}{\cancel{134}}) = 2 \cdot 68 (\cancel{5000}\ 4900 - 68 - 410) =$

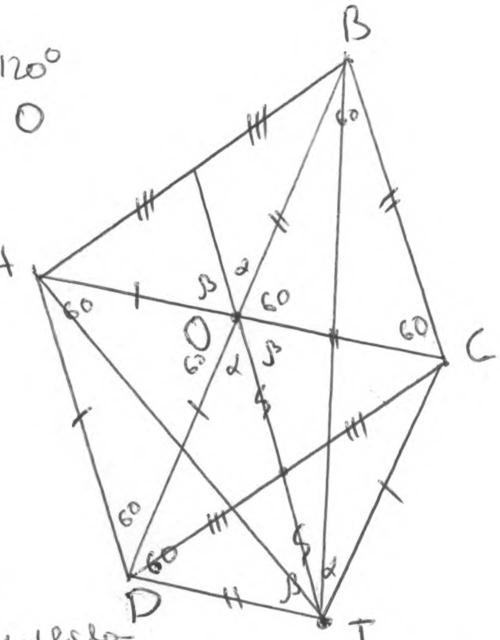
$= 2 \cdot 68 (4490 - 68) = 2 \cdot 68 (4422) = 2 \cdot 300696 = 601392.$

Ответ: 601392

Чистовик.
Задача 6.

③

$\triangle OBC = \triangle AOB$, т.к.
$AO = OD$, $OB = OC$ и $\angle AOB =$
$= \angle BOC = 120^\circ$

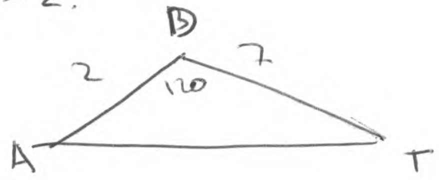


В $\triangle AOB$ проводит ~~медиану~~ из O чевиану, но известно, на какие углы она разделит $\angle AOB$. И это такие же углы, на которые делит медиана $\angle BOC$ в таком же $\triangle$. $\Rightarrow$ проведенная чевиана будет медианой.

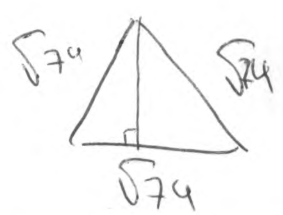
$\angle DOT = \alpha$ и угол $\angle DTO$ равен β, т.к. DOTC - параллелограмм по построению $\Rightarrow$ $\angle ODT = 60$, т.к. $\alpha + \beta = 120$ $\Rightarrow$ $\angle ADT = 120^\circ$. А еще $AD = OD$ и $DT = OC$ $\Rightarrow$
$\triangle ADT = \triangle ODC \Rightarrow AT = DC = AB$.
Аналогично $BT = DC = AB \Rightarrow$ $\underline{\triangle ATB - \text{правильный}}$

ЧТД.

$AD = 7$; $BC = 2$.



$AT^2 = 4 + 49 - 2 \cdot \cos 120 \cdot 4 \cdot 7 = 53 + 21 = \underline{74}$.



$S_{\triangle ATB} = \dfrac{\cancel{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{74}}{2}\right) \cdot \sqrt{74 - \frac{74}{4}}}{\cancel{2}} = \dfrac{\sqrt{74} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{74}}{2} = \boxed{\dfrac{74\sqrt{3}}{4}}$

Продолжение

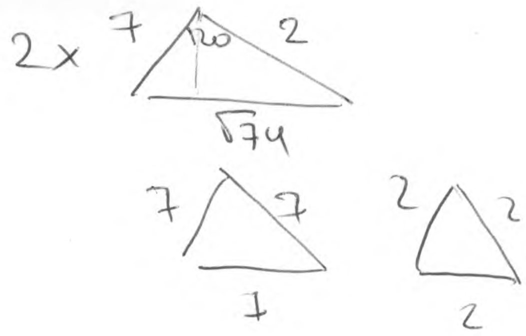
чистовик

$S_{\square ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle DOC} + S_{\triangle AOB} =$

$= 2S_{\triangle AOB} + \cancel{S_{\triangle BOC}} + S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BOC}$.

4

$S_{\triangle AOB} =$



Черновик.

5

$$\frac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10$$

$$x^4+y^4+7x^2y^2=81$$

$$\frac{6}{a+b}+ab=10$$

$$a^2+b^2+7ab=81$$

$$(a+b)^2+\left(10-\frac{6}{a+b}\right)5=81$$

$$t=a+b$$

$$t^2+50-\frac{30}{t}=81$$

$$t^2-\frac{30}{t}=31$$

$$t^3-30=31t$$

$$t^3-31t-30=0$$

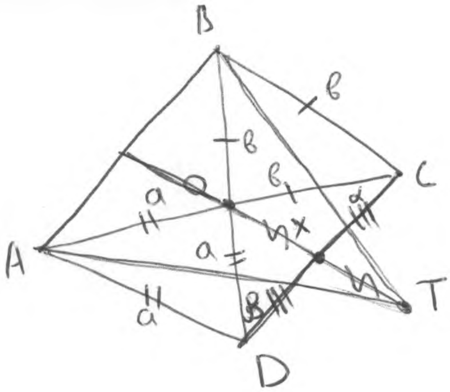
$$t_1=-1$$

$$t^2-t-30=0$$

$$D=1+4\cdot30=121$$

$$t_2,t_3=\frac{1\pm11}{2}=6;-5$$

$$\begin{array}{r|l} t^3-31t-30 & t+1 \\ \underline{t^3+t^2} & t^2-t-30 \\ -t^2-31t-30 & \\ \underline{-t^2-t} & \\ -30t-30 & \\ \underline{-30t-30} & \\ 0 & \end{array}$$



$$a^2+b^2-2\cdot\cos120\cdot ab=DC^2$$

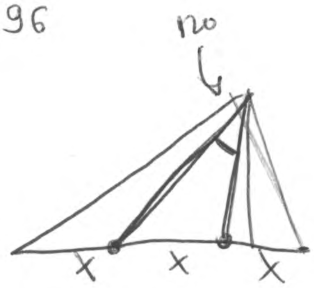
$$a^2+b^2+ab=DC^2$$

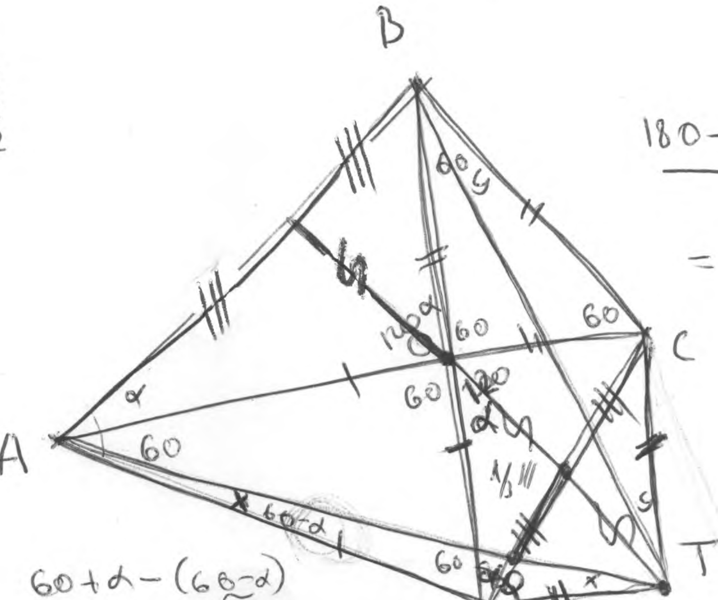
$$\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\alpha}{a}$$

$$x^2=a^2+\frac{a^2+b^2+ab}{4}-$$
$$-2\cos\alpha\cdot a\left(\frac{ab+a^2+b^2}{2}\right)$$

$$x^2=b^2+\frac{a^2+b^2+ab}{4}-2\cos\beta\, b\left(\frac{ab+a^2+b^2}{2}\right)$$

$$\begin{array}{r} \times\ 4422 \\ 68 \\ \hline 35376 \\ +\ 26532 \\ \hline 300696 \end{array}\qquad \begin{array}{r} \times\ 300696 \\ 2 \\ \hline 601392 \end{array}$$





$$\frac{180-(60+\angle\alpha)}{2}=\frac{120-2\alpha}{2}=60-\alpha$$

$$60+\alpha-(60-\alpha)=2\alpha$$

$\alpha\to30$
$\beta\to30$