# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005350**

ID профиля: **198929**

Вариант 10

Чистовик

№ 2

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$ $\qquad$ $x+3 \geq 0$

$21+4x-x^2 = (x+3)(7-x)$ $\qquad$ $x \geq -3$

$7-x \geq 0$

$t = x-2$ $\qquad$ $-5 \leq x-2 \leq 5$ $\qquad$ $-5 \leq t \leq 5$ $\qquad$ $x \leq 7$

$\sqrt{t+5} - \sqrt{5-t} + 4 = 2\sqrt{25-t^2}$ $\qquad$ $-3 \leq x \leq 7$

$(\sqrt{t+5} - \sqrt{5-t} + 4)^2 = 4(25-t^2)$

$t+5+5-t+16-2\sqrt{25-t^2}+8\sqrt{t+5} - 8\sqrt{5-t} = 100-4t^2$

$26 - 2\sqrt{25-t^2} + 8\sqrt{t+5} = 8\sqrt{5-t} + 100 - 4t^2$

$-\sqrt{25-t^2} + 4\sqrt{t+5} = 4\sqrt{5-t} + 37 - 2t^2$

$t+5$ возрастает на $t \in [-5; 5] \Rightarrow \sqrt{t+5} \uparrow$ на том же промежутке

$5-t$ убывает на $t \in [-5; 5] \Rightarrow \sqrt{5-t} \uparrow$ на ~~это~~ том же промежутке. Тогда $f(t) = \sqrt{t+5} - \sqrt{5-t} + 4 \uparrow$ на $t \in [-5; 5]$

$25-t^2 \uparrow$ на $t \in [-5; 0]$ и $25-t^2 \downarrow$ на $t \in [0; 5]$, тогда $g(t) = 2\sqrt{25-t^2} \uparrow$ на $t \in [-5; 0]$ и $2\sqrt{25-t^2} \downarrow$ на $t \in [0; 5]$

$t \in [0; 5]$:

$f(t) \uparrow$, $g(t) \downarrow$, $f(t) = g(t)$, функции непрерывны, тогда на этом промежутке не больше одного решения.

$t = 4$:

$f(t) = \sqrt{4+5} - \sqrt{5-4} + 4 = 3 - 1 + 4 = 6$

$g(t) = 2\sqrt{25-4^2} = 2 \cdot 3 = 6$

$f(4) = g(4)$, значит $t = 4$ – корень и единственный корень на $t \in [0; 5]$

... производная станет выше другой

$t \in [-5; 0]$:

Сравним $f'(t)$ и $g'(t)$

$$f'(t) = (\sqrt{t+5})' - (\sqrt{5-t})' = \frac{1}{2\sqrt{t+5}} + \frac{1}{2\sqrt{5-t}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5-t} + \sqrt{5+t}}{2\sqrt{25-t^2}}$$

$$g'(t) = (2\sqrt{25-t^2})' = \frac{(25-t^2)'}{\sqrt{25-t^2}} = \frac{-2t}{\sqrt{25-t^2}}$$

~~$t=0$:~~ $t = -5$:

$f(-5) = \sqrt{-5+5} - \sqrt{5+5} + 4 = 4 - \sqrt{10}$

$g(-5) = 2\sqrt{25-25} = 0$

$f(-5) \neq g(-5)$

$t \neq -5$:

$f'(t) = g'(t)$:

$$\frac{\sqrt{5-t} + \sqrt{5+t}}{2\sqrt{25-t^2}} = \frac{-2t}{\sqrt{25-t^2}} \qquad \sqrt{25-t^2} > 0 \quad (-5 < t \leq 0)$$

$\sqrt{5-t} + \sqrt{5+t} = -4t$

$$\sqrt{5-t} + \sqrt{5+t} = \frac{(5-t) - (5+t)}{\sqrt{5-t} - \sqrt{5+t}} = \frac{-2t}{\sqrt{5-t} - \sqrt{5+t}}$$

$t = 0$:

$f(0) = \sqrt{5} - \sqrt{5} + 4 = 4$

$g(0) = 2\sqrt{25-0} = 10$

$f(0) \neq g(0)$

$t < 0$:

$\sqrt{5-t} > \sqrt{5+t}$

$\sqrt{5-t} - \sqrt{5+t}$

$$\frac{-2t}{\underbrace{\sqrt{5-t} - \sqrt{5+t}}_{>0}} = -4t \qquad -2t > 0 \ (t<0)$$

$\sqrt{5-t} - \sqrt{5+t} = 0{,}5$

$\sqrt{5-t} \downarrow$ на $t \in [-5; 0]$

$-\sqrt{5+t} \downarrow$ на $t \in [-5; 0]$

$\sqrt{5-t} - \sqrt{5+t} \downarrow$ на $t \in [-5; 0]$,

значит если $\sqrt{5-t_0} - \sqrt{5+t_0} = 0{,}5$,

то при $t > t_0$ $\sqrt{5-t} - \sqrt{5+t} < 0{,}5$

а при $t < t_0$ $\sqrt{5-t} - \sqrt{5+t} > 0{,}5$

Значит при каком-то $t_0$

Одна производная станет выше другой

(а именно $f'(t)$ станет больше $g'(t)$)

Рассмотрим $t_0$:

$t=-2$:

$\sqrt{5+2}-\sqrt{5-2}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$

$\sqrt{7}-\sqrt{3}>\sqrt{6{,}25}-\sqrt{4}=2{,}5-2=0{,}5$

$\sqrt{7}-\sqrt{3}>0{,}5$, $t_0>-2$

$t=-1$:

$\sqrt{5+1}-\sqrt{5-1}=\sqrt{6}-\sqrt{4}<\sqrt{6{,}25}-\sqrt{4}=0{,}5$

$t_0<-1$

$-2<t_0<-1$

$t>t_0$: $(t\in[-5;0])$

$\sqrt{5-t}-\sqrt{5+t}\geq 0{,}5$ : $f'(t)\geq g'(t)$

$t<t_0$: $\sqrt{5-t}-\sqrt{5+t}<0{,}5$ : $g'(t)>f'(t)$

$\cancel{\sqrt{5-(-2)}}$ $\sqrt{5-2}-\sqrt{5+2}+4<f(t_0)<\sqrt{5-1}-\sqrt{5+1}+4$

$\sqrt{3}-\sqrt{7}+4<f(t_0)<6-\sqrt{6}$

$2\sqrt{25-4}<g(t_0)<2\sqrt{25-1}$

$f(t_0)<g(t_0)$

$2\sqrt{21}<g(t_0)<2\sqrt{24}$

$2\sqrt{21}\ \vee\ 4$

$\sqrt{21}>2$

$g(t_0)>f(0)$

$f(-5)=4-\sqrt{10}$

$g(-5)=0$

$t\in[-5;t_0]$

$4-\sqrt{10}>0$

$4-\sqrt{10}\leq f(t)\leq f(t_0)$

$E_1f=[4-\sqrt{10};f(t_0)]$

$0\leq g(t)\leq g(t_0)]$

$E_1g=[0;g(t_0)]$

$E_1f\subset E_1g$, функции непрерывны, $g'(t_0)>f'(t_0)\Rightarrow$ на этом промежутке есть корень, и он только один (единственное пересечение графиков функций

$t \in [t_0; 0]$

$f(t_0) \leq f(t) \leq 4 \qquad f(0) = 4$

$g(t_0) \leq g(t) \leq 10 \qquad g(0) = 10$

Множества значений функций не совпадают, значит на этом промежутке нет решений.

$t \in [-5; t_0]$ : 1 решение

$$\sqrt{5+t} - \sqrt{5-t} + 4 = 2\sqrt{25-t^2}$$

№ 1

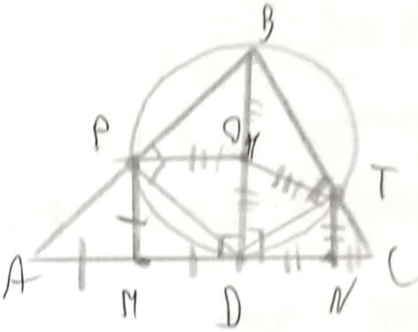
Дано: $\Delta ABC$; $D \in AC$; окр. $(O_1)$, $D = BD$; окр. $(O_1) \cap AB = P$; окр. $(O_1) \cap BC = T$; $M$ - середина $AD$; $N$ - середина $CD$; $PM \parallel TN$

а) $\angle ABC = ?$

б) $MP = 1$; $NT = 3$; $BD = \sqrt{5}$

$S_{\Delta ABC} = ?$

Решение




а) $PM \parallel TN \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT$ (соответственные)

$\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ (опираются на диаметр окружности).

$\angle APB = \angle BTC = 180^\circ$ (~~см~~ разв. углы)

$\angle APD + \angle BPD = \angle APB$

$\angle APD = 90^\circ$

Аналогично $\angle CTD = 90^\circ$, тогда $\Delta APD$ и $\Delta DTC$ - прямоуг., но в них $PM$ и $TN$ - медианы ($M$ - середина $AD$; $N$ - середина $DC$), тогда $PM = AM = MD$; $TN = DN = NC$,

~~$APM =$~~ $\Delta APM$, $\Delta DNT$ - равнобедр.

$\Delta APM \sim \Delta DNT$ ($\frac{DN}{AM} = \frac{NT}{PM}$ ($DN = NT$, $AM = PM$), $\angle AMP = \angle DNT$),

тогда $\angle PAD = \angle TDC$, но $\Delta DTC$ - прямоуг.

$\angle TCD = 90^\circ - \angle TDC = 90^\circ - \angle PAD$

$\angle PAD + \angle ABC + \angle TCD = 180^\circ$ (св. треуг. $\Delta ABC$)

$\angle ABC = 180^\circ - (\angle PAD + 90^\circ - \angle PAD) = 90^\circ$

б) $\angle PBT = \angle ABC = 90^\circ$, значит $\angle PBT$ опирается на диаметр; $PT$ - диаметр, $O_1 \in PT$

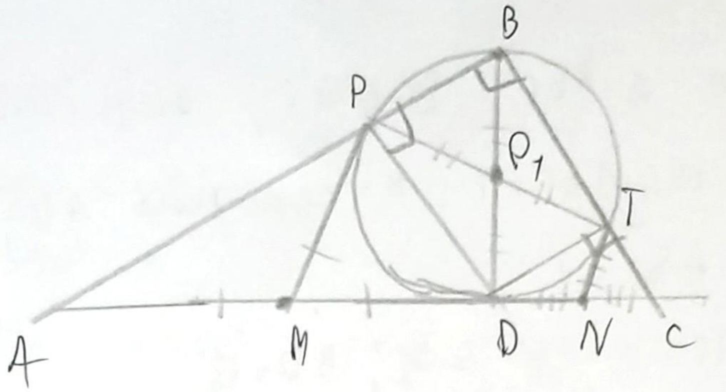
Сделаем другой рисунок

∢ $\triangle ABC$ и $\triangle DTC$

$\angle PAD = \angle TDC$ (док.)

$\angle ABC = \angle DTC = 90^\circ$

$\triangle ABC \sim \triangle DTC$




$$\frac{TC}{BC} = \frac{DC}{AC} = \frac{DN+NC}{DN+NC+AM+MD} = \frac{2TN}{2PM+2TN} = \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{3}{5}$$

$BT = \frac{2}{5} BC$

Аналогично $\triangle APD \sim \triangle ABC$ ($\angle BPD = 90^\circ$; $\angle ABC = 90^\circ$; $PD \perp AB$; $BC \perp AB$; $PD \parallel BC$, а дальше – док-во равенства двух пар углов)

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{2PM}{2PM+2TN} = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}$$

$AP = \frac{2}{5} AB$

$PB = \frac{3}{5} AB$

$\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ – прямоуг.

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ (Th Пифагора)

$AB^2 + BC^2 = (2PM + 2TN)^2$

$AB^2 + BC^2 = (3+2)^2$

$AB^2 + BC^2 = 25$

~~$\angle BPD = 90^\circ \Rightarrow \triangle BPD$ – прямоуг~~

~~$BP^2 + PD^2 = BD^2$ (Th Пифагора)~~

~~$\frac{9}{25} AB^2 +$~~

$\frac{9}{5} AB^2 + \frac{4}{5} BC^2 = 25$

$\frac{9}{5} AB^2 + \frac{4}{5} BC^2 = AB^2 + BC^2$

$\frac{4}{5} AB^2 = \frac{1}{5} BC^2$

$BC = 2AB$

$AB^2 + 4AB^2 = 25$ $\quad AB = \sqrt{5}$ $\quad BC = 2\sqrt{5}$

$PT = BD = \sqrt{5}$ (диаметры)

$\triangle BPT$ – прямоуг

$PB^2 + BT^2 = PT^2$ (Th Пифагора)

$\frac{9}{25} AB^2 + \frac{4}{25} BC^2 = 5$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = 5$ (прямоуг. треуг.)

Ответ: $S_{ABC} = 5$; $\angle ABC = 90^\circ$

№ 3

A: $5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

~~$9x^2+12ax+4a^2+y^2-4ay+4a^2-x^2-4a^2=0$~~

$y^2-y(4a+4x)+8x^2+12ax+5a^2=0$

$D=(-(4a+4x))^2-4(8x^2+12ax+5a^2)=16x^2+32ax+16a^2-$

$-32x^2-48ax-20a^2=-16x^2-16ax-4a^2=-4(4x^2+4ax+a^2)=$

$=-4(2x+a)^2$

$-4(2x+a)^2\leq 0$, но значения для (координаты) A есть

$D=0$ $(2x+a)=0$

$x=-0,5a$

$y=\frac{4a+4x}{2}=2a+2x=$ ~~$2a-1$~~ $a$

A: ~~$(-0,5;\ 2a-1)$~~ $(-0,5a;\ a)$

B: $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$a=0$

$3=0$

Не рассматривали $a=0$

$ay=ax^2-2a^2x+a^3+3$

$y=x^2-2ax+a^2+\frac{3}{a}$

Вершина параболы: $x_0=-\frac{b}{2a}$

$x_0=\frac{2a}{2\cdot 1}=a$

$y_0=a^2-2a^2+a^2+\frac{3}{a}$

$y_0=\frac{3}{a}$

B: $(a;\ \frac{3}{a})$

A: $(-0,5a;\ a)$, B $(a;\ \frac{3}{a})$

$2x-y=5$

$y=$ ~~$5-2x$~~ $2x-5$

Ниже прямой: $y < \cancel{5-2x}\ 2x-5$

A: $\cancel{-10}\ a < \cancel{5+a}\ -a-5$

$a \in \mathbb{R}$

B: $\frac{3}{a} < 5-2a$

$2a-5+\frac{3}{a} < 0$

$a > 0$:

$2a^2-5a+3 < 0$

$2a^2-2a-3a+3 < 0$

$(2a-3)(a-1) < 0$

$1 < a < 1,5$

$a < 0$:

$2a^2-5a+3 > 0$

$(2a-3)(a-1) > 0$

$\left[\begin{array}{l} a > 1,5 \\ a < 1 \end{array}\right.$, но $a < 0$

$a < 0$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005350**

ID профиля: **198929**

Вариант 10

Чистовик №4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2}+x^2y^2=10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2=81 \end{cases}$$

$a=x^2+y^2$, $b=x^2y^2$ $\quad a\geq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a}+b=10 \\ x^4+2x^2y^2+y^4+5x^2y^2=81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a}+b=10 \\ a^2+5b=81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=10-\dfrac{6}{a} \\ b=\dfrac{81-a^2}{5} \end{cases}$$

$$\frac{81-a^2}{5}=10-\frac{6}{a}$$

$$81a-a^3=50a-30$$

$$a^3-31a-30=0$$

$$a^3+a^2-a^2-a-30a-30=0$$

$$(a^2-a-30)(a+1)=0$$

$$(a-6)(a+5)(a+1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-5 \\ a=6 \end{array}\right., \text{ но } a\geq 0$$

$a=6$

$b=10-\frac{6}{a}$

$b=9$

$$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases} \qquad x^2+\frac{9}{x^2}=6 \qquad x\neq 0 \ (x^2y^2=9)$$

$$x^4-6x^2+9=0$$

$$y^2=\frac{9}{x^2} \qquad (x^2-3)^2=0 \qquad x^2=3 \qquad x^2=3:$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right. \qquad 3+y^2=6$$

$$y^2=3$$

$$\begin{cases} x^2=3 \\ y^2=3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \cancel{x=\sqrt{3}} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $x=\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$; $x=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$; $x=-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$; $x=-\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$

Чистовик

№5

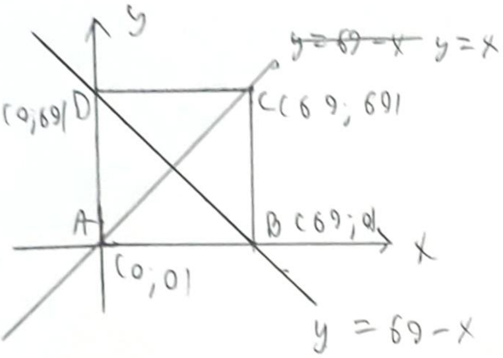
Прямая $y=x$:

$0=0;\ 69=69$

Прямая $y=69-x$:

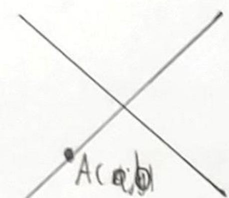
$0=69-69;\ 69=69-0$

То есть, на плоскости прямые выглядят так:




Способы выбрать узлы так, что один из узлов будет находиться на прямых, а другой – ~~не~~ нет:

Рассмотрим ~~точку~~ узел A на одной из прямых




~~1)~~ Второй узел ~~не~~ ~~д~~ не должен иметь координаты $x_B=a$ ($x_A=a$) и $y_B=b$ ($y_A=a$), ведь в противном случае они будут лежать на одной из прямых $y=b;\ x=a$, которые параллельны координатным осям. Таких узлов $2\cdot(\cancel{69}\,70-1-1)-1$

второй узел ~~встрет~~ лежит не на границе квадрата

← исключаем сам первый узел (он посчитан дважды)

узлы на $y=b$ и $x=a$

количество ~~узл~~ узлов в каждой горизонтали или вертикали в квадрате

Итого 135 узлов. 1)

Также в этом случае второй узел не находится на прямых, а узлов внутри прямых $2\cdot(70-1-1)-1$

← исключаем рамки

← исключаем первый ~~сам~~ узел

в каждой диагонали $69-0+1$ узлов

две прямые

Итого 135 узлов

Однако, есть два узла, содержащиеся в обеих группах:

узел с координатами $(69-a; b)$ и узел с координатами $(a; 69-b)$

] $a = b$

$69 - 69 + a = b$

$69 - (69 - a) = b$

↑

$(69 - a; b)$ лежит на второй диагонали

~~(69 − a; b)~~ $(69 - a; b)$ и $(a; b)$ лежат на $y = b$

Аналогично ~~69 − a;~~ для $(a; 69 - b)$ и $(a; b)$

Итого второй узел не может находиться внутри квадрата в $135 + 135 - 2$ узлах

268 узлов ~~Также он не может находиться в первом узле~~ ~~269 узлов~~

Всего внутри $(70 - 1 - 1)^2$ узлов

Значит, второй узел может ~~выбран~~ ~~26~~ $68^2 - 268$ способами

(узел внутри квадрата не на прямых)

$68 \cdot 68 = (70 - 2)(70 - 2) = 4900 - 280 + 4 = 4624$

$4624 - 268 = 4356 = 66^2$

Но всего первый узел можно выбрать $(70 - 1 - 1) \cdot 2$ способами

Тогда способов выбрать узлы так, что один из узлов будет на одной из прямых, а другой – нет 6~~$6^2 \cdot 68 \cdot 2$~~ $68 \cdot 2\,(66^2 - 1)$

~~Количество~~ Способы выбрать узлы так, что они оба будут на прямых:

Способы выбрать узлы на одной прямой:

узлов на диагонали в квадрате; без учёта первого узла

$$\frac{(70 - 1 - 1)(70 - 1 - 1 - 1)}{2} = \frac{68 \cdot 67}{2}$$

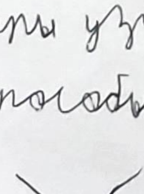
Но прямых две

$68 \cdot 67$

Пары узлов A; B и B; A – одно и то же

Способы выбрать узлы на разных прямых:

Сначала рассмотрим точку A




Вторым узлом можно выбрать любые точки второй прямой, кроме $(69-a; b)$, $(a; 69-b)$ (аналогично

~~это~~ варианту, где один узел на прямой, а другой — нет). Тогда для данной точки можно выбрать 70 − 1 − 1 − 2 вторых узла. А всего точек на прямой (внутри квадрата) 68, значит способов выбрать узлы на разных прямых 68 · 66

Итого способов выбрать два узла ~~$6 \cdot 6^2 \cdot 68 \cdot 2$~~ $68 \cdot 2(66^2 - 1) + \frac{68 \cdot 67}{2} \cdot 2 +$

$+ 68 \cdot 66 = 34(4(66^2 - 1) + 2 \cdot 66 + 67 \cdot 2) =$

~~$= 34 \cdot (4 \cdot 4356 + 195) = 34 \cdot (17424 + 195) =$~~

~~$= 34 \cdot 17627$~~ ~~$17619$~~

$= 68(2 \cdot (66^2 \cancel{-1}) + 133) =$

$= 68 \cdot (8712 \cancel{-2} + 133) =$

$=$ ~~$68 \cdot 8843$~~ $68 \cdot 8845$

~~$8845 \times 68 = 70760 + 53070 = 601460$~~

~~$8843 \times 68 = 70744 + 53058 = 601324$~~

$8845 \times 68 = 601460$

Ответ: ~~601460 способов~~ ~~601324 способа~~
601460 способов.

$4624 - 135 + \ldots + 4624 - 270 + 2 \cdot 68 =$

$= \frac{136 \cdot (9248 - 405)}{2} =$

$= 34(2 \cdot 8845) =$

$= 34 \cdot 17686$

$\frac{133 + 66}{2} \cdot 68 +$

$+ \frac{67 \cdot 68}{2} =$

$= \frac{200}{2} \cdot 68 = 133 \cdot 68$

$94 \cdot 94 =$

$= 10000 - 1200 + 36 =$

$= 8836$

$96 \times 96$: $576 + 826 = 8836$

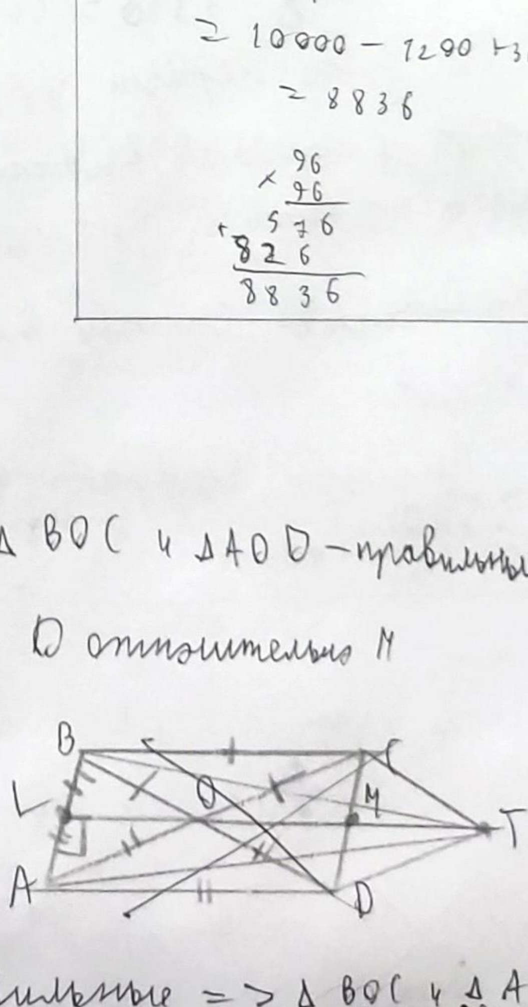
№ 3

Дано: ABCD — выпукл; AC ∩ BD = O; Δ BOC и Δ AOD — правильные; M — середина CD; T симметрична O относительно M

а) (!) Δ ABT — правильный

б) BC = 2; AD = 7

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = ?$




Решение: Δ BOC и Δ AOD — правильные => Δ BOC и Δ AOD — равнобедренные, ~~AO = DO, CO = BO~~ равнобедренные

$BO = CO$, $AO = OD$, тогда $\Delta AOB = \Delta COD$

$\angle AOB = \angle COD$ (вертик.)

OM – медиана в $\Delta COD$, тогда это и биссектриса, но биссектриса в одном вертикальном угле – биссектриса в другом вертикальном угле. $OM \cap AB = L$; OL – биссектриса в $\Delta AOB$, тогда OL – высота и медиана

MT – продолжение OM (построение симметричных объектов)

$LO \in TL$, $OM \in TL$, $MT \in TL$, тогда $TL \perp AB$, TL – медиана в $\Delta ABT$ (L – середина AB); TL – одновременно и медиана, и высота, значит $\Delta ABT$ – равнобедренный, тогда он правильный, ч.т.д.

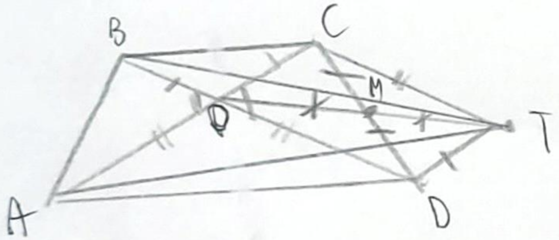
~~Д; OM – медиана~~

$OM = MT$

$CM = MD$

Диагонали делятся пополам =>

=> CTDO – парал.




$\angle BCO = \angle ADO =$ ~~60~~ (~~прав. треуг.~~ равнобедр. треуг. с общим верш. ~~углов~~ углом)

$\angle OCT = \angle ODT$ (противоположные)

$\angle ADT = \angle BCT$ (сумма равных углов)

$BC = DT$

$AD = CT$, тогда $\Delta BCT = \Delta ADT$, значит

~~BCT =~~ $BT = AT$, $\Delta$ ~~BAT~~ ABT – р.б.; $\Delta ABT$ – правильный,

ч.т.д.