Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005213**

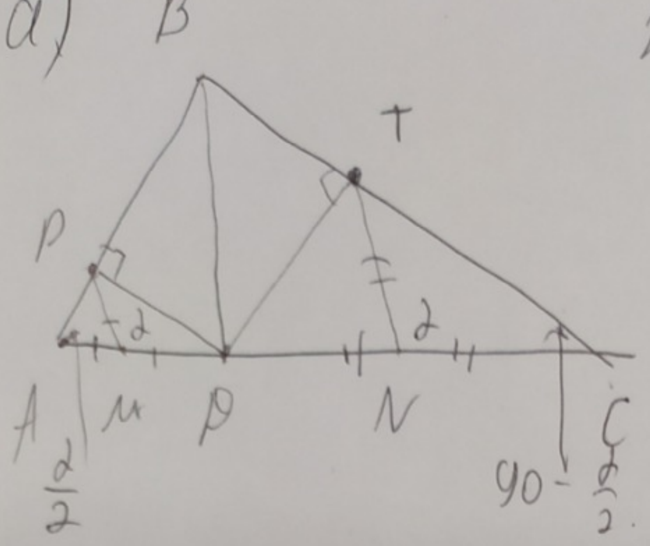
ID профиля: **263268**

Вариант 10

1 стр. чистовик

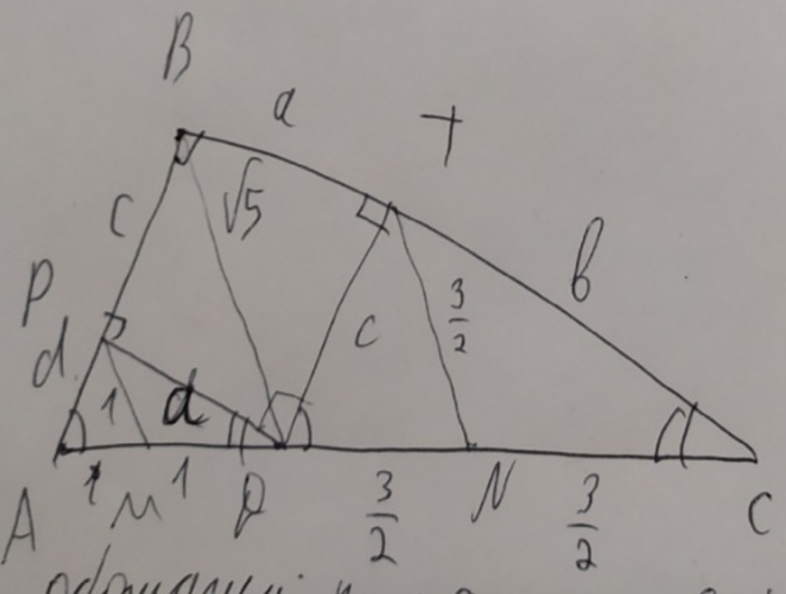
№1 (1 часть)

а)



Заметим, что $\angle BTD = \angle BPD = 90^\circ$, т.к. они опираются на диаметр окружности. $\angle DTC = \angle ~~PDA~~ DPA = 90^\circ$ как смежные. Т.к. PM, TN - медианы в прямоугольных треугольниках, то $\triangle DMD$, $\triangle TNC$ - равнобедренные. Пусть $\angle TNC = \alpha$, знач. $\angle PMD = \alpha$, т.к. $TN \parallel PM$. Вычитанием углов получаем, что $\angle DCA = 90 - \frac{\alpha}{2}$, $\angle DAC = \frac{\alpha}{2}$. Значит $\boxed{\angle ABC = 90^\circ}$.

б)



Обозначим: $BT = a$, $TC = b$, $BP = c$, $PA = d$ (см. рис.)

Тогда очевидно, $DT = c$, $PD = a$.

Из подобия $\triangle TDC$, $\triangle APD$: $b = \frac{3}{2}a$, $d = \frac{2}{3}c$.

По теореме Пифагора для $\triangle ABC$, $\triangle BTD$: $a^2 + c^2 = 5$

$(\frac{5}{2}a)^2 + (\frac{5}{3}c)^2 = 25$

211005213 (U263268 M1273639)

2 Стр.

Итоги
№1 (2 часть)

Отсюда:

$\cancel{b = \frac{3}{\sqrt{5}}}$ $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $b = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $c = \sqrt{\frac{21}{5}}$, $d = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{21}{5}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{5}} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{5}{6}\sqrt{21}}$

3 кл. Чистовик

№2

~~Пусть~~

Произведем замену переменных: $\sqrt{x+3}=a$, $\sqrt{7-x}=b$.

Заметим, что исходное уравнение можно переписать так:

$$a-b=2ab-4$$

Заметим также, что $\cancel{(a+b)^2=10}$ $a^2+b^2=10$

$$a^2+b^2-2ab=4(ab)^2+10-16ab$$

Отсюда:

$$\left[\begin{array}{l} ab=3 \\ ab=0,5 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 21+4x-x^2=3 \\ 21+4x-x^2=0,5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-18=0 \\ x^2-4x-20,5=0 \end{array}\right.$$

Первое уравнение:

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot18}}{2}=2\pm\sqrt{4+18}=2\pm\sqrt{22}$$

Второе уравнение:

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot20,5}}{2}=2\pm\sqrt{24,5}$$

Ответ:

$$x=\left[\begin{array}{l} 2\pm\sqrt{22} \\ 2\pm\sqrt{24,5} \end{array}\right.$$

211005213 (U263268 M1273639)

4 стр.

Чистовик

№3 (1 часть)

Попробуем выразить y через x, a в первом уравнении (для точки A):

$$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$$

$$y^2-4y(a+x)+5a^2+8x^2+12ax=0$$

Найдем дискриминант D этого уравнения:

$$D=16(a+x)^2-4(5a^2+8x^2+12ax)=$$
$$=-4(5a^2+8x^2+12ax-4a^2-8ax-4x^2)=$$
$$=-4(a^2+4x^2+4ax)=\boxed{-4(2x+a)^2}$$

. D_1 дискриминант больше,

Очевидно, больше или равен нулю, быть не может, => $D=0$, => $\cancel{2x=-a}$ $2x+a=0$; тогда: ~~равен~~ нулю

$x=-\frac{a}{2}$

$$y=\frac{4(a+x)\pm\sqrt{D}}{2}=2(a+x)=a$$

5 шт.

Чистовик (~~2 часть~~)

№3 (2 часть)

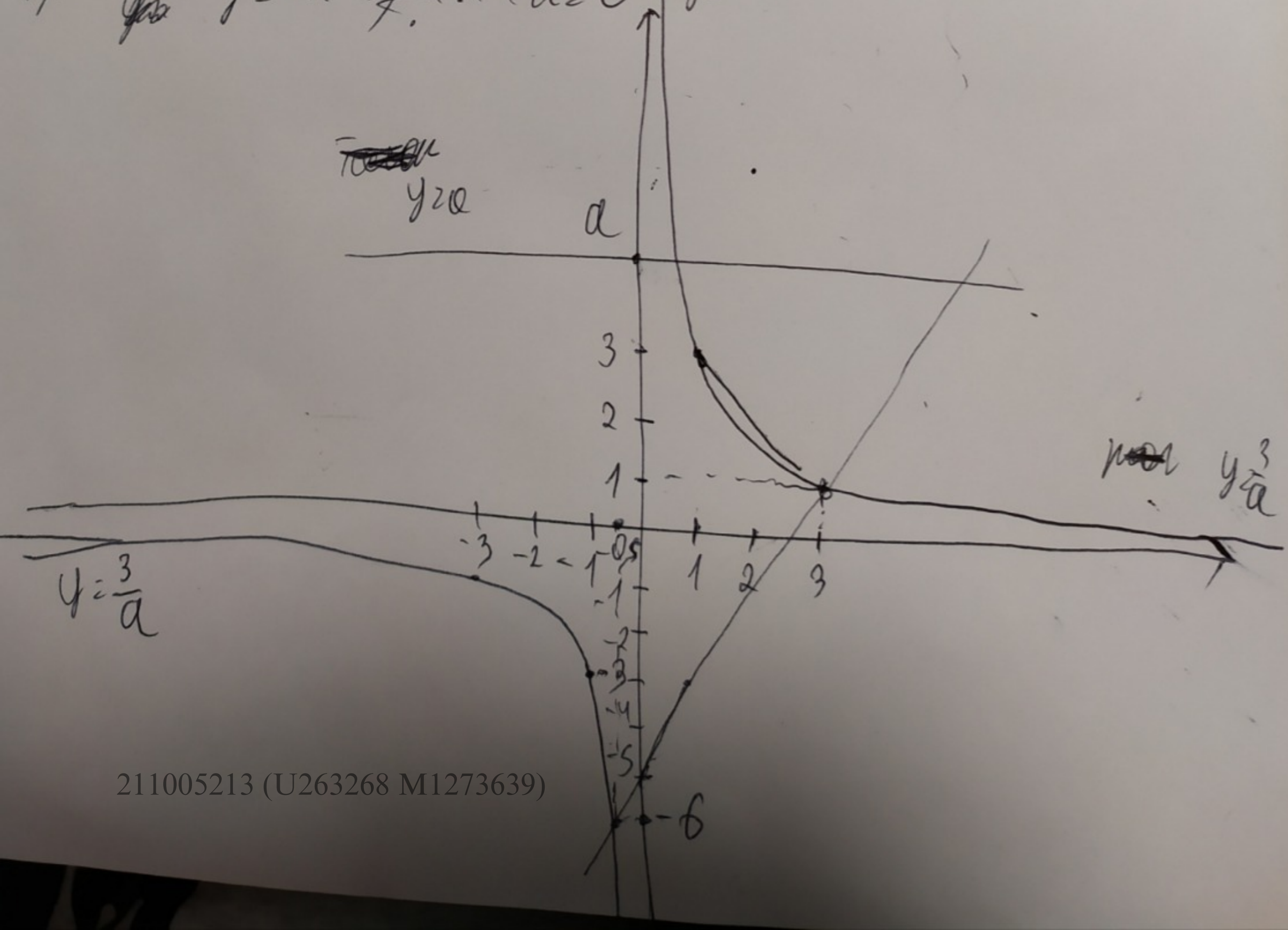
Теперь перейдем к уравнению для точки В.
Найдем вершину параболы:

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$$

Найдем x, при котором достигается минимум y:

$$y' = 2x - 2a = 0 \Rightarrow \boxed{x = a}$$

При $x = a$, $y = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a^2} = \boxed{\frac{3}{a}}$. Получаем, что все возможные координаты точки В лежат на графике $y = \frac{3}{x}$. Построим этот график, а также прямые $y = 2x - 5$, ~~$2x + a = 0$~~, $y = a$



211005213 (U263268 M1273639)

6

Черновик N 3 (3 часть)

~~N 3 (3 часть)~~

~~Теперь не совсем ясно, что с положением точки A, точки~~

~~Поправить решение?~~

~~$a \in |^3$~~

Теперь не совсем ясно с прямой y: а если точка A находится где угодно на этой прямой, то решений нет.

211005213 (U263268 M1273639)

$5a^2-4ay+8x^2-4xy+y^2+12ax=0$

$y^2-4y(a+x)+5a^2+8x^2+12ax=0$

$$y=\frac{4(a+x)\pm\sqrt{16(a+x)^2-4(5a^2+8x^2+12ax)}}{2}$$

$y=2(a+x)\pm\sqrt{4(a^2+2ax+x^2)-20a^2-32x^2-48ax}$

$y=2(a+x)\pm\sqrt{-16a^2-40ax-28x^2}=$

$=2(a+x)\pm4\sqrt{-(4a^2+10ax+7x^2)}$

$4a^2+10ax+7x^2$

$(2a+\frac{10}{4}x)^2+7x^2-\frac{100}{16}x^2=$

$\frac{16}{7}$

211005213 (U263268 M1273639)

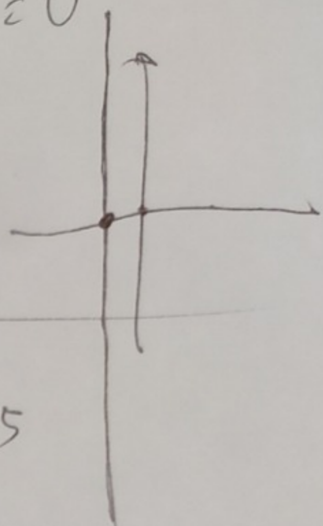
$a=-2x$

$2x = -4a$
$x = -\frac{a}{2}$

$5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$
$3x^2 + 3y^2 + 12ax = 0$

$5a^2 - 4ay + 4x^2 - 4xy + \cancel{4xy} \, 2y^2$

$5a^2 - 4ay + (2x - y)^2 + 12ax$



$ay = ax^2 - 2a^2x + a^3 + 3$

$y = ax^2 - 2ax + a^2 + \frac{3}{a}$

$y = 2x - 5$

$y' = 0 \quad 2x - 2a$

$\frac{3}{x} = 2x - 5$

$2x = 2a$

$y = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$

$\frac{3}{x} = 2x - 5$

y_{max}

$3 = 2x^2 - 5x$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

2a

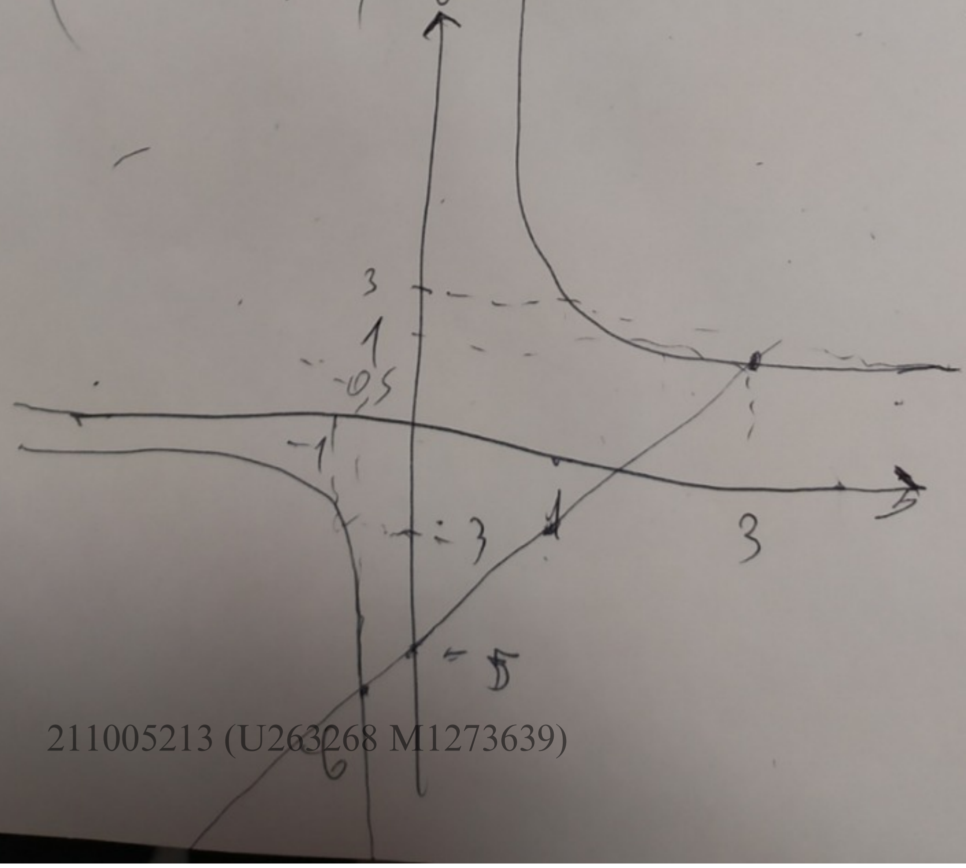
$4a^2 - 4ay + y^2 + a^2 + 8x^2 - 4xy + 12ax = 0$

$(\cancel{2a - y})^2 + a$

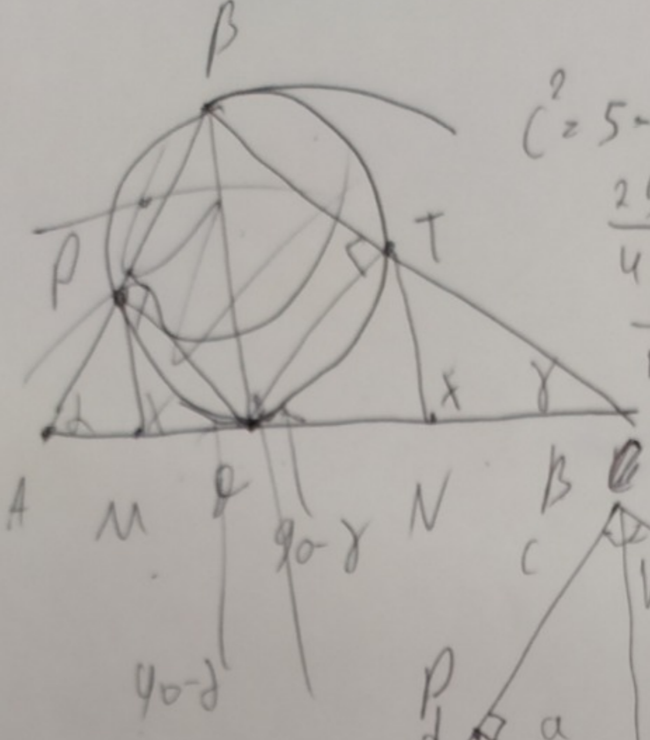
$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4}$

$x = \frac{5 \pm 7}{4}$

$x = \left[\begin{array}{l} 3 \\ -0,5 \end{array} \right.$



211005213 (U263268 M1273639)



$5a^2=4$

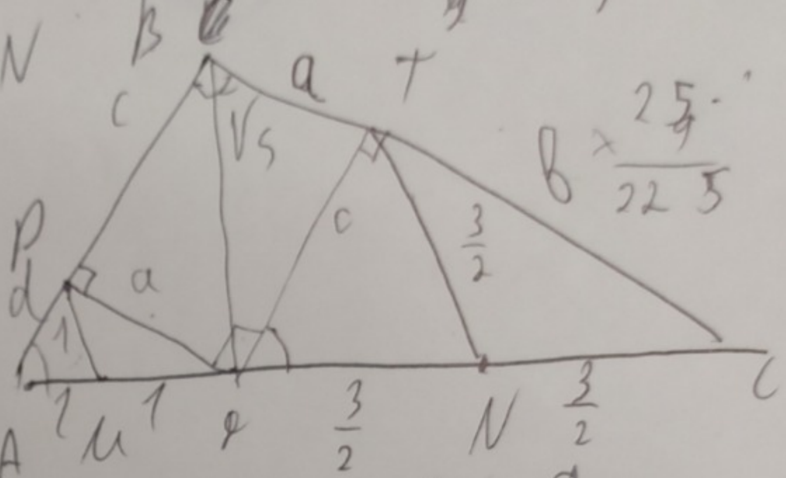
$a=\frac{2}{\sqrt5}$

$c^2=5-a^2$

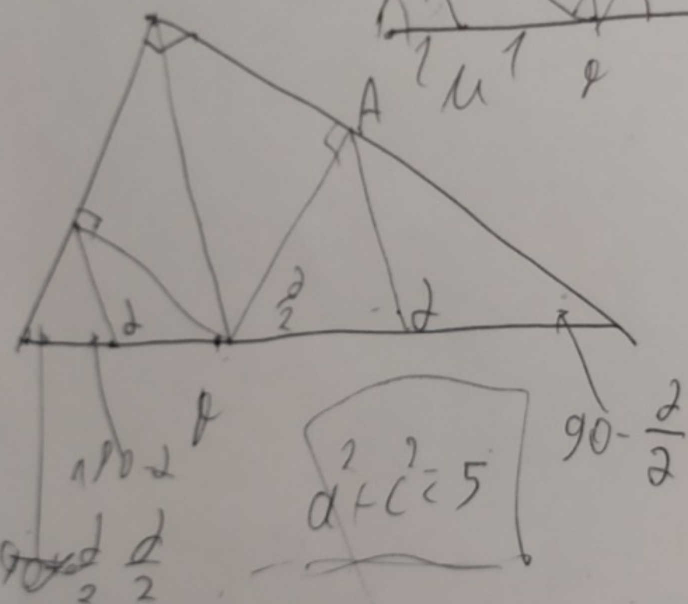
$\frac{25}{4}a^2+\frac{25}{9}(5-a^2)=25$

$\frac{25}{4}a^2-\frac{25}{9}a^2=25-\frac{125}{9}$

$\frac{125}{9}a^2=\frac{100}{9}$



$b=\frac{25}{225}$



$\frac{b}{3}=\frac{a}{2}$

$2b=3a$

$b=\frac32 a$

$\frac{c}{3}=\frac{d}{2}$

$2c=3d \Rightarrow d=\frac23 c$

$\boxed{a^2+c^2=5}$

$(a+b)^2+(c+d)^2=5$ $\quad (a+b)(c+d)=4$

$=\frac52 a\cdot\frac53 c=25$

$\left(\frac52 a\right)^2+\left(\frac53 c\right)^2=25$

$b=\frac{3}{\sqrt5}$ $\quad c^2=5-\frac45$

$c^2=\frac{21}{5}$ $\quad \sqrt{\frac{21}{5}}$

$S=\frac12\left(\sqrt{\frac{21}{5}}\left(1+\frac23\right)\frac{5}{\sqrt5}\right)=$

$=\frac56\sqrt{21}$

$d=\frac23\sqrt{\frac{21}{5}}$

211005213 (U263268 M1273639)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005213**

ID профиля: **263268**

Вариант 10

5 стр. Чистовик

№4 (1 часть)

Возьмём уравнение №1 и умножим его на 5:

$\frac{30}{x^2+y^2} + 5x^2 \cdot y^2 = 50$

Вычтем из второго первое уравнение:

$x^4 + y^4 + 7x^2y^2 - \frac{30}{x^2+y^2} - 5x^2y^2 = 31$

$(x^2+y^2)^2 - \frac{30}{x^2+y^2} = 31$

Произведём замену переменных:

$x^2+y^2 = a$. Тогда получаем:

$a^2 - \frac{30}{a} = 31$

$a^3 - 31a - 30 = 0$

$a^3 - 30(a+1) - a = 0$

$a(a^2-1) - 30(a+1) = 0$

$a(a-1)(a+1) - 30(a+1) = 0$

$(a+1)(a^2 - a - 30) = 0$

Т.к. a только больше нуля, то $a \neq -1$:

$a^2 - a - 30 = 0$

$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 30}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2}$

$a = \left[\begin{array}{l} 6 \\ -5 \end{array}\right.$. Очевидно, решение $a = -5$ тоже отбрасывается.

211005213 (U263268 M1273640)

6 стр.

Шишевич
№4 (2 часть)

$x^2+y^2=6$. Тогда: $1+x^2y^2=10$, $x^2y^2=9$, $xy=\left[\begin{matrix}3\\-3\end{matrix}\right.$

Возьмем решение $xy=3$, $y=\frac{3}{x}$:

$x^2+\frac{1}{x^2}=6$

$x^4-6x^2+1=0 \Rightarrow x^2=\frac{6\pm\sqrt{}\;4\sqrt{2}}{2}=3\pm2\sqrt{2}$

~~$x=\pm\sqrt{3\pm2}$~~

$\boxed{x=\pm\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}}$

$\boxed{y=\frac{3}{\pm\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}}}$

Заметим, что при $y=-\frac{3}{x}$ мы получим те же решения. Заметим также, что мы учли ОДЗ, получив $x^2+y^2=6$.

Ответ: $x=\pm\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}$; $y=\frac{3}{\pm\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}}$, причем выбор $\pm$ одинаков для x, y.

$$\frac{6}{x^2+y^2}+(xy)^2=10$$

$$x^4+y^4+7x^2y^2=81$$

$$6+x^4y^2+x^2y^4=10x^2+10y^2$$

$$x^4+7x^2y^2+y^4-81=0$$

$$x^4y^2+x^2(y^4-10)+6-10y^2=0$$

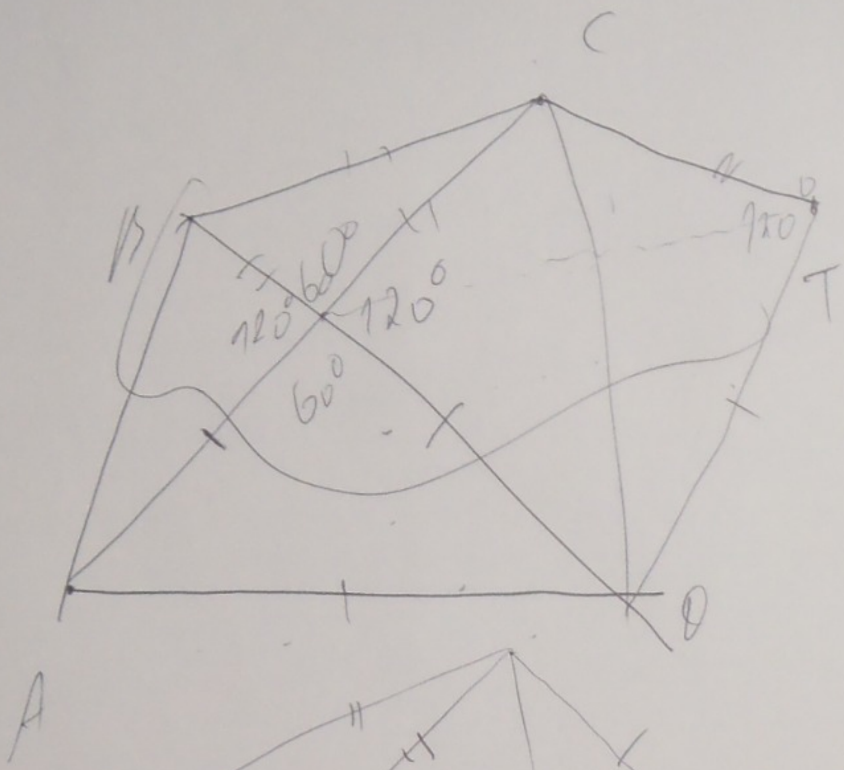
$$x^2=\frac{10-y^4\pm\sqrt{(y^4-10)^2-4y^2(6-10y^2)}}{}$$

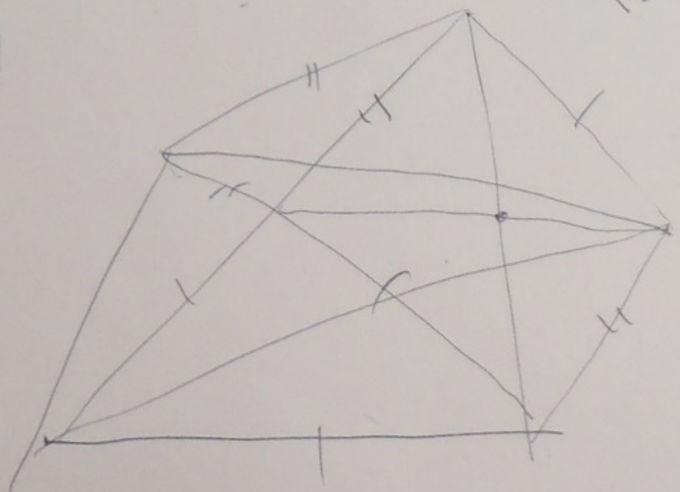
$36-4=32$

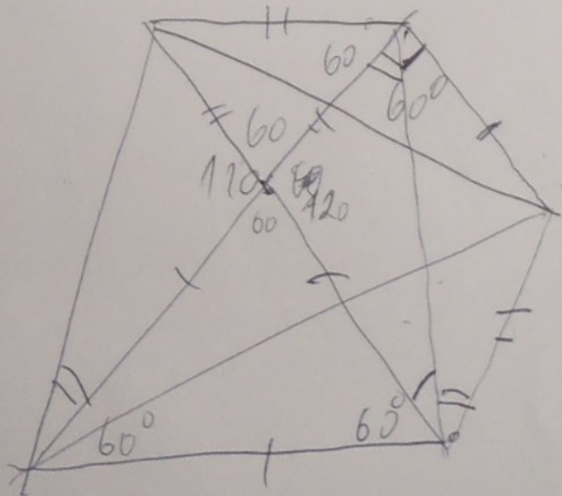
$\cancel{44}$

2

211005213 (U263268 M1273640)







211005213 (U263268 M1273640)

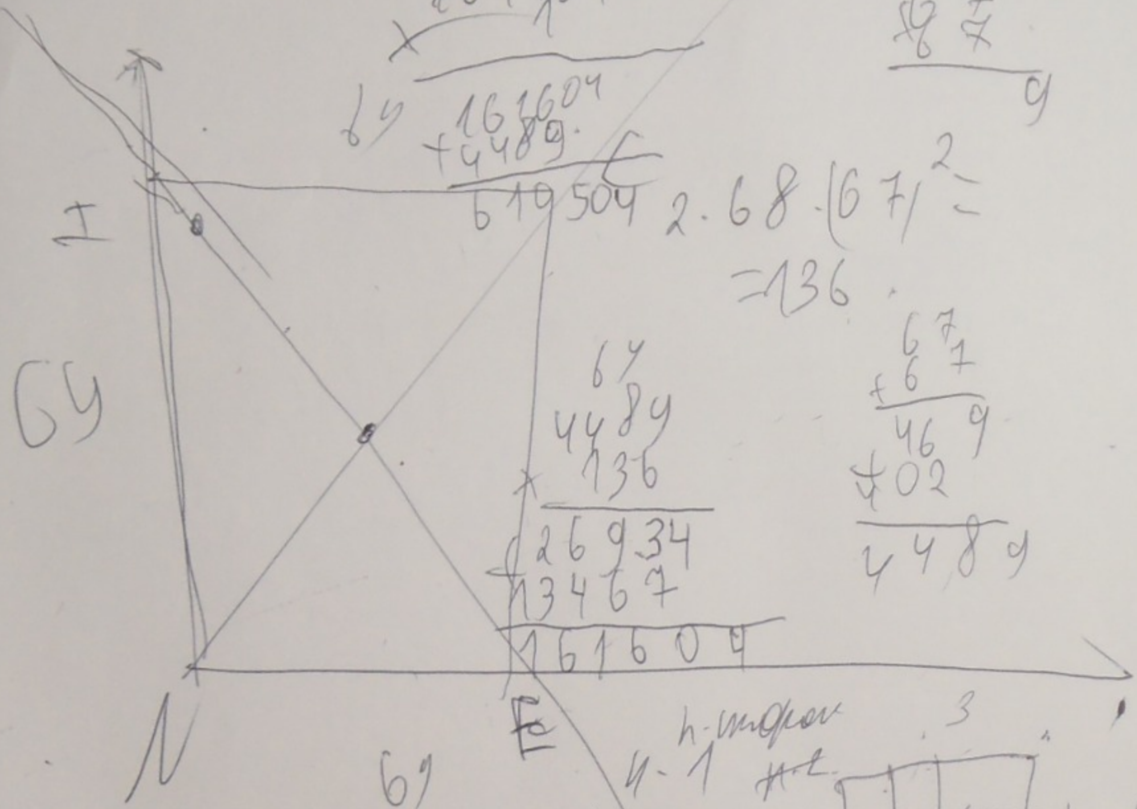
$6 + x^4y^2 + x^2y^4 = 10x^2 + 10y^2$ $\quad (\cancel{n^2-2n+3})(n-1)$

$\times\ 161604$, 1

64 $\quad 161604 + 4489 = 619504$

$\frac{67 + 67}{9}$

$2 \cdot 68 \cdot (67)^2 =$
$= 136$



I

64

N

E

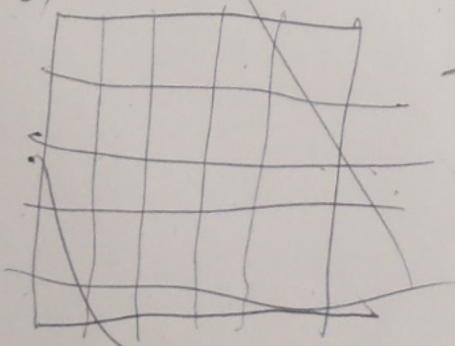
64×4489, 136: 26934, 13467, 161604

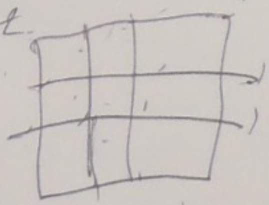
$67 + 67 = 469$, 402, 4489

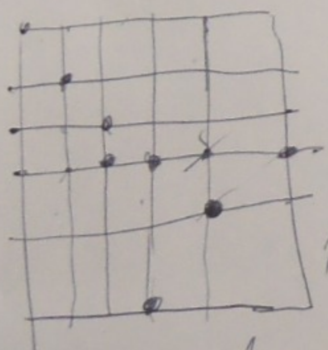
n-цифров

$n-1$ $\quad n-2$ $\quad 3$

69







1

$n^2 - 2n + 3$

$(n-1)^2$

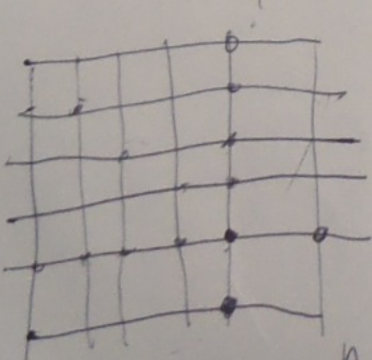
$(2n-5)$

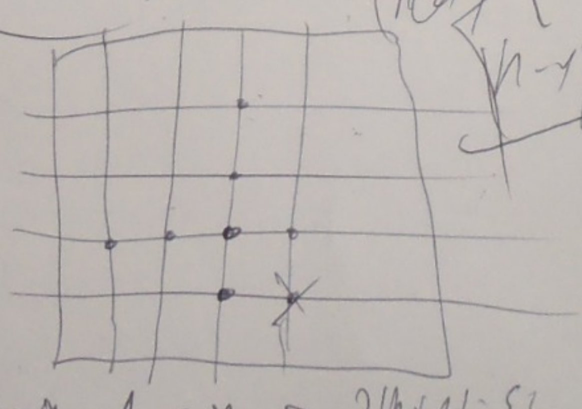
$(n-1)$

1

6

$k -$





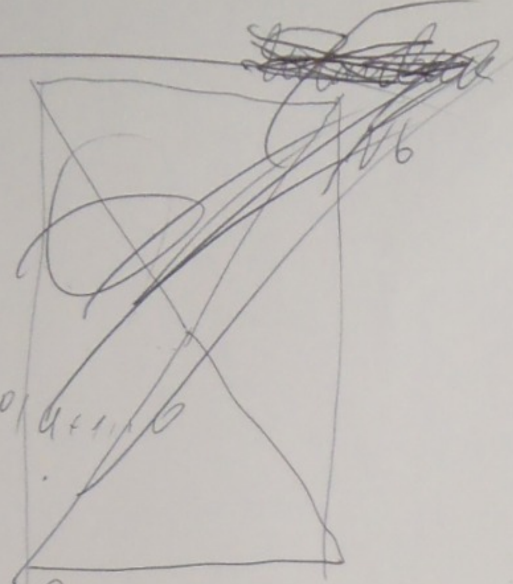
1

$n - 2 + n - 4 - 1 = 2n - 5$ $\quad 2(n+1) - 5$

$2n - 3$

211005213 (U263268 M1273640)

1. Сиур



$a(a-1)(a+1)$

$(a+1)(a^2-a-30)=0$

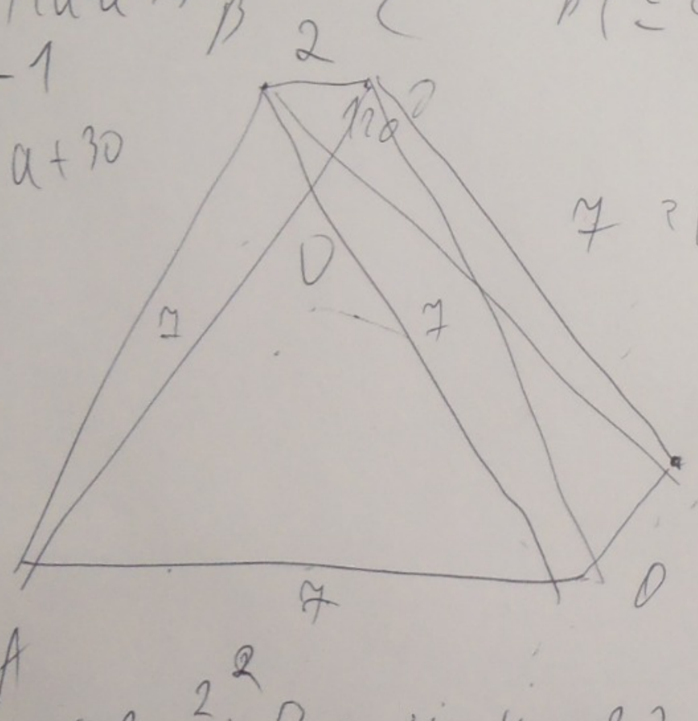
$a \neq -1$

$a^2 - a + 30$

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times\ 3 \\ \hline 201 \end{array}$$

$BT = c = \sqrt{4+49 - \cancel{2}\cdot 2\cdot 7\cdot \cancel{\cos 120}}$

$7 = \sqrt{53+14} = \sqrt{67}.$



SAn

$$\begin{array}{r} 4,5 \\ 45 \\ \times\ 45 \\ \hline 225 \\ +180\ \\ \hline 2025 \\ \times\ 1,4 \\ \hline 81\cancel{00} \end{array}$$

$(x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2$

$\frac{30}{x^2+y^2} = 5x^2y^2 = 50$

$x^4+y^4+7x^2y^2 = 81$

$a(a^2-1) - 30(a+1) = 0$

$31 = (x^2+y^2)^2 - \frac{30}{x^2+y^2}$

$31 = a^2 - \frac{30}{a}$

$a^3 - 31a - 30 = 0$

$a^3 - 30(a+1) - a = 0$

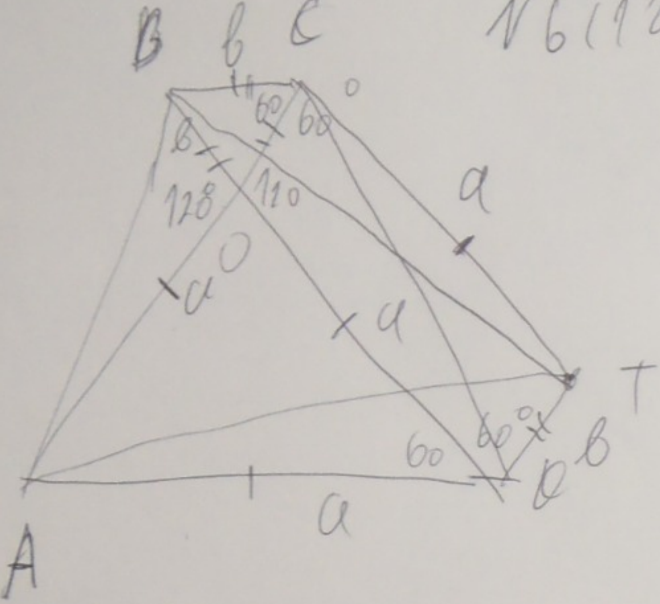
211005213 (U263268 M1273640)

1 шт.

Ишмоден

№ 6 (1 часть)

а)



Т.к. ~~Оба~~ точка O симметрична точке T относительно середины CD, то CODT – параллелограмм, $\Rightarrow BC = b = TD = BO$, $CT = a = AD = AO$, $\angle BCT = 120^\circ = \angle ADT = \angle AOB = 120^\circ$, $\Rightarrow \Delta BCT = \Delta ADT = \Delta AOB$ по двум сторонам и углу между ними, $\Rightarrow AB = BT = AT$, $\Rightarrow \Delta ABT$ – правильный, ч.т.д.

б) Теперь известно, что $AD = a = 7$, $BC = b = 2$. Найдем сторону ΔABT по теореме косинусов для ΔBCT, для угла $\angle BCT = 120^\circ$; $(BC = c)$

$$BC = c = \sqrt{4 + 49 - 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \cos 120} = \sqrt{67}.$$

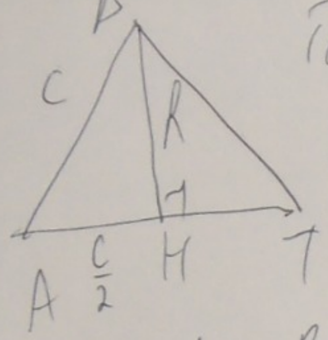
211005213 (U263268 M1273640)

2 стр.

Шиловцук

№6 (2 часть)

Нарисуем ~~Δ АВ А~~ Δ АВТ отдельно, проведем в нем высоту $BH = h$



По теореме Пифагора $h = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{201}}{2}$

$S_{ABT} = \frac{AT \cdot BH}{2} = \frac{\sqrt{67} \cdot \sqrt{201}}{4} = \frac{67 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Теперь найдем площадь ~~трапеции~~ ABCD. Это трапеция, т.к. $\angle BCA = \angle CAD = 60^\circ$, $\Rightarrow BC \parallel AD$.

Аналогично найдем высоты в ΔAOD, ΔBOC:
$h_{AOD} = \frac{7 \cdot \sqrt{3}}{2}$, $h_{BOC} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Площадь трапеции ABCD: $S_{ABCD} = \frac{(h_{AOD} + h_{BOC}) \cdot 9}{2} = \cancel{\sqrt{3} \cdot 4{,}5} = 4{,}5^2 \cdot \sqrt{3}$.

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 4{,}5^2 \cdot \sqrt{3}} = \boxed{\frac{67}{81}}$

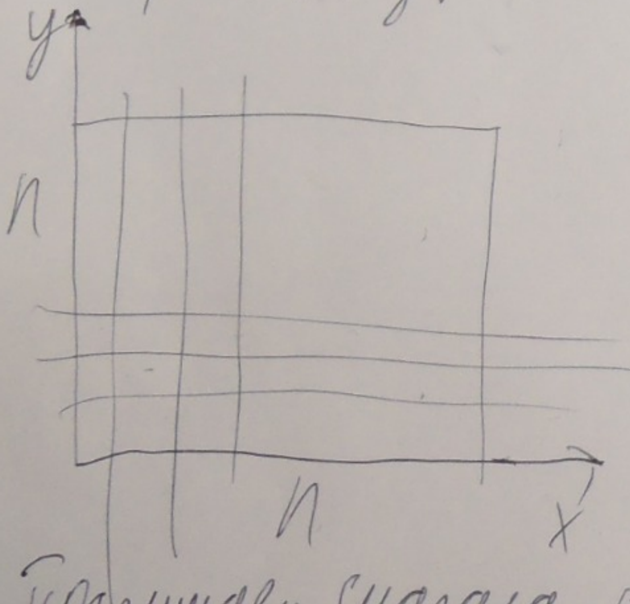
$\boxed{\text{Ответ: } \frac{67}{81}}$

211005213 (U263268 M1273640)

3 стр   чистовик   N5 (1 часть)

Рассмотрим квадрат не 69×69, а n×n.

Очевидно, что в нем просто провели диагонали, ~~что~~ проходящие через узлы клеточной сетки, и нужно посчитать, сколько способов соединить узлы, один из которых лежит на диагонали, а ~~другой~~ координаты другого не совпадают ~~по коор~~ не совпадают с первым ни по x, ни по y:



Посчитаем сначала, ~~ско~~ со сколькими узлами узел на диагонали соединяться <u>не</u> может. Заметим, что это всегда одинаковое количество: при сдвиге узла диагонали на 1 по x и по y вверх, „закрываются" два старых, „открываются" два новых узла.

4 стр. Игнатович

№5 (2 часть)

Очевидно, что если сторона квадрата n, то узлов, для него закрытых, будет $n-1+n-1-1=$ $=2n-3$ (~~также очевидно что кол-во узлов не~~ включая сам ~~не включая границы~~ узел). Также очевидно, что общее кол-во узлов, не включая границы равно $(n-1)^2$. Значит общее кол-во узлов, с которыми какой-то узел на границе может соединиться, равно $(n-1)^2-(2n-3)=n^2-2n+1-2n+3=$ $=n^2-4n+4=(n-2)^2$. Всего узлов на диагонали $n-1$, $\Rightarrow$ количество способов для диагонали и равно $(n-1)(n-2)^2$, для двух диагоналей, очевидно, $\boxed{2(n-1)(n-2)^2}$. При $n=69$, кол-во способов равно 610504