Часть 1

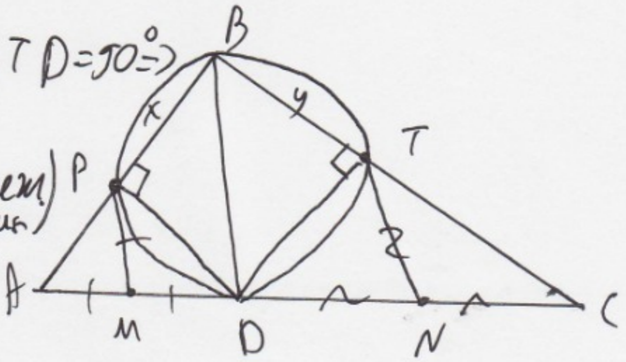
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005211**

ID профиля: **289013**

Вариант 10

№1 Чистовик



а) 1) т.к BD - диаметр то $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ \Rightarrow$

~~2) т.к~~ $\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90^\circ$ (как смеж угл)

2) т.к M и N - середина, то в $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ PM и TN - медианы соответственно $\Rightarrow$ по св-ву медиан прямоуг. $\triangle$ $PM = AM = MD$ и $TN = DN = N$

3) по условию $PM \parallel TN \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT$ (как равные углы при пересеч двух парал прямых (PM; TN) секущей AC

4) тогда $\triangle APD \sim \triangle DTC$ (т.к они прямоугольные и углы при медианах равны) тогда $\angle TDC = \angle BAC$ и $\angle PDA = \angle TCD$ тогда рассмотрим $\triangle APD$; $\angle APD = 90^\circ$; $\angle PDA = \angle BCD$ тогда $\triangle APD \sim \triangle ABC$ (по 2 углам) $\Rightarrow \underline{\angle ABC = \angle APD = 90^\circ}$

б) ~~1) как было доказано ранее~~ (1)• из $\triangle BTD$: $BT^2 + TD^2 = BD^2$ (т. Пиф)

из $\triangle TCD$ (по св-ву касат. и секущей) (2)• $CD^2 = TC^2 + TD^2$ (по т. Пиф)

(3) • $CD^2 = TC(TC + TB)$

$TD^2 + TC^2 = TC^2 + TC \cdot TB$ (из (2) и (3))

$TD^2 = TC \cdot TB$

из (1) $BD^2 = TB^2 + TB \cdot TC \longrightarrow BD^2 = TB(TB + TC) = TB \cdot BC$

аналогично для $\triangle APD$: $BD^2 = BP \cdot AB$

пусть $BP = x$; $BT = y$; $AD = 2MP$; $DC = 2TN$

~~пот~~ $PD = a \cdot TC$; $a = \frac{1}{1,5}$

$PD = \frac{2}{3}(BC - y)$; $TD = \frac{3}{2}(AB - x)$

$4 = \frac{4}{9}(BC - y)^2 + (AB - x)^2$; $9 = \frac{9}{4}(AB - x)^2 + (BC - y)^2$

$x^2 + \frac{4}{9}(BC - y)^2 = 3$ $y^2 + \frac{9}{4}(AB - x)^2 = 5$

$\frac{5}{4}(AB - x)^2 + \frac{5}{9}(BC - y)^2 = 3$, тогда $\frac{5}{4}(5 - x^2) + \frac{5}{9}(5 - y^2) = 5$ (египетск. $\triangle$)

$S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

$\boxed{1}$

Ответ: а) 90° б) 6

№2

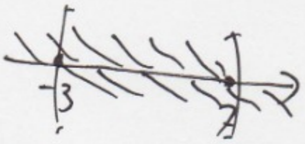
Чистовик

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$ $\quad | \; x^2-4x-21$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(7-x)(x+3)}$ $\quad x_1 = 7$

$x_2 = -3$

$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \end{cases}$



$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(7-x)(x+3)} - 4$

$x+3+7-x-2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 16+4(7-x)(x+3)-16\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$14\sqrt{(x+3)(7-x)} = 6+4(7-x)(x+3)$

$196(x+3)(7-x) = 36+16(7-x)^2(x+3)^2+48(7-x)(x+3)$

пусть $(x+3)(7-x) - t$, тогда:

$16t^2 - 148t + 36 = 0$

$4t^2 - 37t + 9 = 0$

$D = 1369 - 36 \cdot 4 = 35^2$

$t_{12} = \frac{37 \pm 35}{8} = \frac{1}{4}$ или 9

$\left[\begin{array}{l} -x^2+4x+21 = \frac{1}{4} \\ -x^2+4x+21 = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-20\frac{3}{4} = 0 \; ① \\ x^2-4x-12 = 0 \; ② \end{array}\right.$

①

$4x^2 - 16x - 83 = 0$

$D = (3 \cdot 2 \cdot \sqrt{11})^2$

$x_{12} = \frac{8 \pm 6\sqrt{11}}{4} = 2 \pm 1{,}5\sqrt{11}$ - входит в промежутки

②

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$D = 4 + 12 = 4^2$

$x_1 = \frac{2 \pm 4}{1} = 6$ или -2

Ответ: -2; $2 - 1{,}5\sqrt{11}$; 6; $2 + 1{,}5\sqrt{11}$

②

N 3

Чистовик

$$\begin{cases} 5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0 & (*) \\ ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0 & (**) \end{cases}$$

(**) $x^2 - 2ax - y + a^2 + \frac{3}{a} = 0$

$x^2 - 2ax + (a^2 + \frac{3}{a}) = y$

вершина $B_{x_0} = \frac{-b}{2a} = \frac{2a}{2} = a$

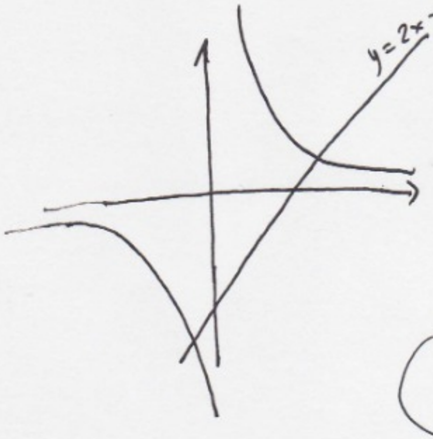
$B_{y_0} = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{3}{a} = \frac{3}{a}$

$B = (a; \frac{3}{a})$

прямая: $y = 2x - 5$

(*) $4a^2 + 12ax + 9x^2 - x^2 - 4xy - 4y^2 +$
$+ 4y^2 \overset{-}{+} 4ya + a^2 - y^2 = 0$

$y^2 = (x + 2y)^2 - (2a + 3x)^2 - (2y \overset{-}{+} a)^2$



③

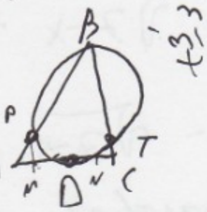
Черновик

N1

$3,35 \times 3,35$
1675
1005
1005
11,2225

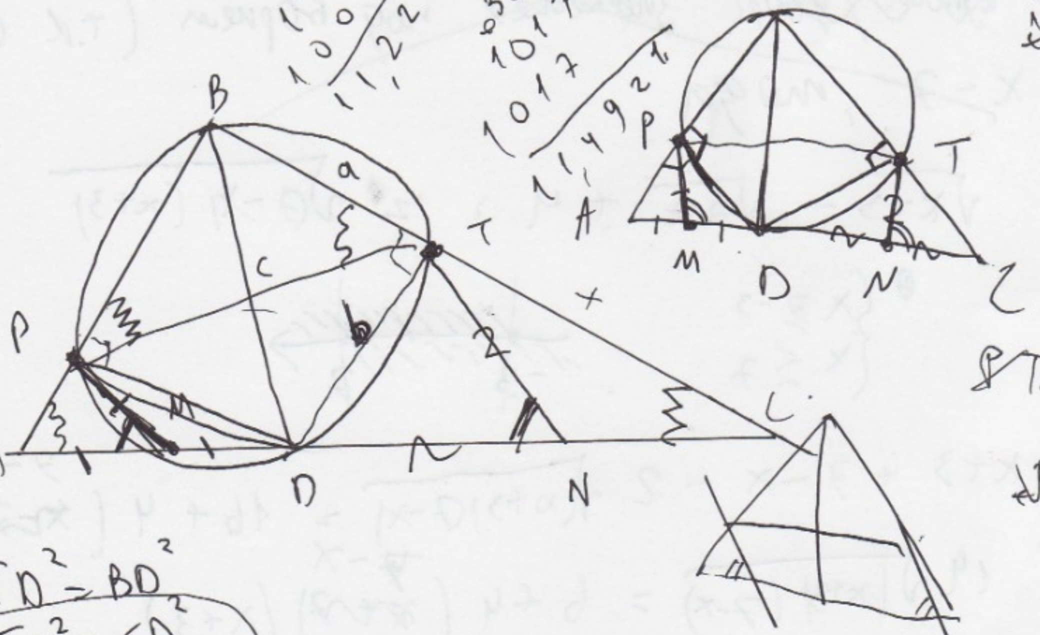
$3,32 \times 3,32$
664
996
996
11,0224

$3,39 \times 3,39$
3051
1017
1017
11,4921



$3,32 \times 1,5$
1650
332
4,970

$3,4 \times 1,5$
170
34
5,10



PT — ср. линия

$3,5 \times 3,5$
175
105
12,25

$\sqrt{11}^2 =$

$a^2+b^2=c^2$

$BT^2+TD^2=BD^2$

1 $\boxed{TC^2+TD^2=CD^2}$

по св-ву касат. и секущей

$CD^2 = TC\cdot(TC+TB)$

2 $\boxed{CD^2 = TC^2+TC\cdot TB}$

$TD^2 = TC\cdot TB$

$BD^2 = TB^2 + ~~TB^2 - TC^2~~ TB\cdot TC$

$BD^2 = TB(TB+TC)$

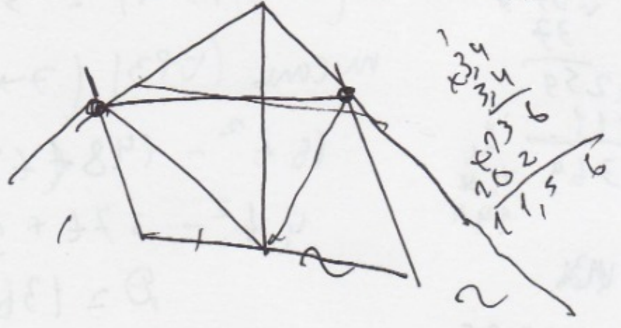
$BD^2 = TB\cdot(BC)$

по той же аналогии

$BP^2 = BP\cdot(AB)$

$TB\cdot BC = BP\cdot AB$

$\frac{TB}{BP} = \frac{AB}{BC}$ т.е $TB = AB\cdot x$; $BP = BC\cdot x$



$3,4 \times 3,4$
136
102
11,56

△APD ~ △PTC

~~т.к~~ ∠ABC = ∠APD

Т. А

$5-x^2 \,|\cdot \frac{9}{4}$

$\frac{25}{4} - \frac{50}{4}x\frac{5^2}{4} + \frac{25}{9} - \frac{10}{9}4\frac{5^2}{9} = 3$

$\frac{325}{36} - \frac{108}{36}$

Черновик

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$ | $x^2-4x-21$

$x_1 = 7$

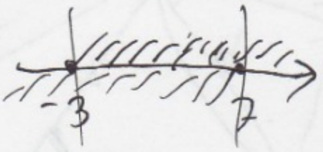
$x_2 = -3$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{-(x-7)(x+3)}$

преобразовав ~~обратите~~ ~~становится~~ понятно что в
~~мож есть отри~~ ~~одном~~ двух ~~знаменателях~~ под корнем (т.к есть 7−x и
~~x−7~~, тогда

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 7 \end{cases}$



$\begin{array}{r} 196 \\ -48 \\ \hline 148 \end{array}$

$x+3+7-x-2\sqrt{(x+3)(7-x)} = 16 + 4(\cancel{x-7}\overset{7-x}{})(x+3) - 16$

$14\sqrt{(x+3)(7-x)} = 6 + 4(\cancel{x-7}\overset{7-x}{})(x+3)$

$196(x+3)(7-x) = 36 + 16(7-x)^2(x+3)^2 + 48(7-x)(x+3)\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$\begin{array}{r} 37 \\ \times 37 \\ \hline 259 \\ 111 \\ \hline 1369 \end{array}$ $\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$

пусть $(x+3)(7-x) = t$

$16t^2 - 148t + 36 = 0$

$4t^2 - 37t + 9 = 0$

$D = 1369 - 36\cdot4 = 1369 - 144 = 35^2$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \end{array}$

~~1336~~

1225

$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$

$t_{1,2} = \frac{37 \pm 35}{8} = \frac{1}{4}$ или 9

$(x+3)(7-x) = \frac{1}{4}$

$\begin{array}{r} 83 \\ \times 4 \\ \hline 332 \end{array}$

$D = 64 + 332 = 396$

$396 = 99\cdot4$

$4a^2 + 12ax + 9x^2 - x^2 - 4xy - 4y^2 + 4y + a^2$ $9\cdot4\cdot11$

$\frac{3}{a} = 2a - 5$

$2a^2 - 5a - 3 = 0$

$D = 25 + 24 = 49$

$a_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4} = -\frac{1}{2}$

или 3

$(4x + 2y + 2a)(-2x + 2y - 2a)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005211**

ID профиля: **289013**

Вариант 10

Чистовик

№4

пусть $a = x^2+y^2 > 0$ (т.к a в знаменателя)

$b = x^2y^2 \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{6}{a}+b=10 \\ a^2-2b+7b=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{10a-6}{a} \\ \frac{a^3}{a}+5\cdot\frac{10a-6}{a}=81 \; (*) \\ a\neq 0 \end{cases}$$

(*) $a^3+50a-30=81a$

$a^3-31a-30=0$

возможные a: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm5; \pm6; \pm10; \pm15; \pm30$

$a=-1$ - подходит, тогда:

$$\begin{array}{r|l} a^3+0a^2-31a-30 & a+1 \\ \underline{a^3+a^2} \qquad\qquad & \overline{a^2-a-30} \\ -a^2-31a \qquad & \\ \underline{-a^2-a} \qquad & \\ -30a-30 & \\ \underline{-30a-30} & \end{array}$$

$\rightarrow$ $(a+1)(a-6)(a+5)=0$

но по условию $a>0 \Rightarrow$

подходит только $a=6$

$$\begin{cases} a=6 \\ b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=6 \\ \left[\begin{array}{l} xy=3 \\ xy=-3 \end{array}\right. \end{cases}$$ подставим:

1) $(x+y)^2=12$
$\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{12} \\ xy=3 \end{cases}$
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

2) $(x+y)^2=0$
$\begin{cases} x=-y \\ xy=-3 \end{cases}$
$\downarrow$
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

3) $(x-y)^2=0$
$\begin{cases} x=y \\ xy=3 \end{cases}$
$\downarrow$
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

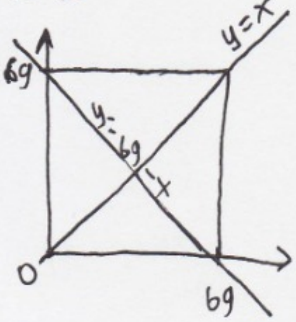
4) $(x-y)^2=12$
$\begin{cases} x-y=\pm\sqrt{12} \\ xy=-3 \end{cases}$
$\downarrow$
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

①

Ответ: $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$

Чистовик

N5



Т.к мы не учитываем границы квадрата, то всего узлов: 68×68

тогда

1) кол-во способов для одной точки:

$68\times68-\underbrace{2\cdot67}_{}-1$ ← сама эта точка

Все точки, которые лежат на прямой, парал осям координат вместе с данной

2) точек для выбора одной точка (по условию она должна лежать на одной из данных прямых):

$68\cdot2-\underbrace{1}_{}$

прямые пересекаются и точка пересечения считается 2 раза => нужно её вычесть

3) тогда кол-во способов выбрать 2 узла:

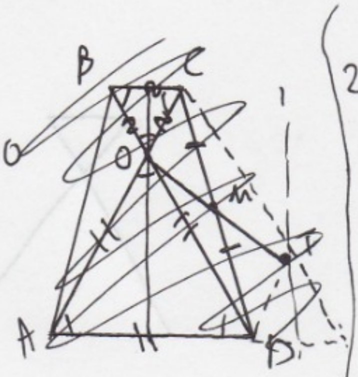
$(68\times68-2\times67-1)(68\cdot2-1)=606015$

Ответ: 606015

2

Чистовик №6

а) 1) Несложно заметить, что данный четырёхугольник – р/б трапеция (основания парал + ср. перпендик проходит ч/з O)



2) OCTD – параллелограмм (диагонали точкой пересеч делятся пополам)

3) ч/з T проведём прямую ∥ ср. перпендик данной трапеции

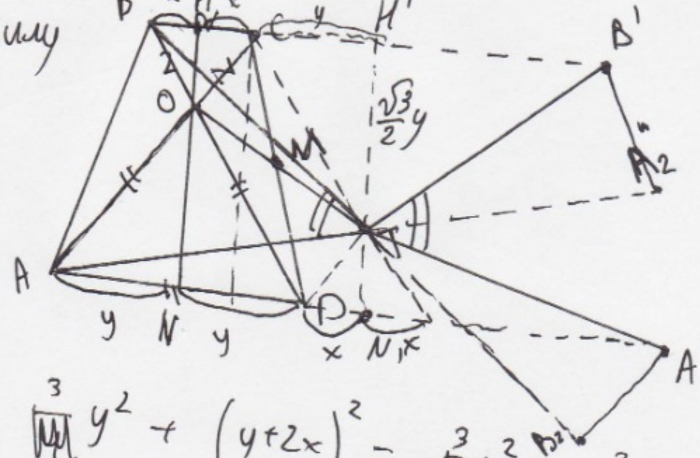
4) Относительно данной прямой отложим точки симметрич A и B

5) △ BTB' и △ ATA' – р/б (в силу симметрии)

6) пусть HN – ср. перпендик

BH = x; AN = y

тогда $HO = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}x$; $NO = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}y$



7) $(TB')^2 = (TH')^2 + (H'B')^2 = \frac{3}{\cancel{4}}y^2 + (y+2x)^2 = \frac{3}{\cancel{4}}y^2 + y^2 + 4yx + 4x^2 =$

$4y^2+4x^2+4xy$ ~~$+ \frac{3}{4}y^2 + 4yx$~~ (по т. Пифагора)

$(TA')^2 = (TN')^2 + (N'A')^2 = \frac{3}{\cancel{4}}x^2 + (2y+x)^2 = 4x^2+4y^2+4xy$

$(A'B')^2 = (y-x)^2 + \frac{3}{\cancel{4}}(y+x)^2 = 4y^2 + 4x^2 - 2xy + 6xy = 4x^2+4y^2+4xy$

$\Rightarrow TB' = TA' = A'B' \Rightarrow \triangle TB'A'$ – равносторонний

$\triangle TB'A'$ = данному (в силу симметр) $\Rightarrow \triangle ABT$ – р/ст

ч.т.д.

б) $AB = 4x^2+4y^2+4xy = 4 + 49 + 14 = 67$

$x = \frac{BC}{2} = 1$

$y = \frac{AD}{2} = 3,5$

$S_{ABT} = 0,5^2 \cdot 67^2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 67^2$

$S_{ABCD} = (x+y)\cdot\sqrt{3}(x+y) = 4,5^2\sqrt{3}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{67^2\sqrt{3}}{4}}{4,5^2\sqrt{3}} = \frac{67^2}{9^2}$$

Ответ: $\left(\frac{67}{9}\right)^2$

③

черновик

~~16~~ пусть $a = x^2+y^2 \geqslant 0$

$b = x^2y^2 \geqslant 0$

$$\begin{cases}\frac{6}{a}+b=10\\ a^2-2b+7b=81\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cancel{a = 10-b} \quad \cancel{\frac{b-10}{-6}}\\ \frac{1}{a}=\frac{10-b}{6}\end{cases}$$

$a = \frac{6}{10-b}$

6

отпад. отпад

$(a+1)(a-6)(a+5)=0$

$a\neq 0$ $b = 10-\frac{6}{a} \Rightarrow \cancel{16}$, $11,2$, 9

возможн,

$a=6$

$b=9$

$x^2+y^2=6$

$x^2y^2=9$

$xy=\pm 3$

$(x+y)^2=12$

$$\Leftrightarrow \cancel{\begin{cases}b=10-\frac{6}{a}=\frac{10a-6}{a}\\ a^2+5\cdot\frac{10a-6}{a}=81\end{cases}}$$

$$\begin{cases}b=10-\frac{6}{a}=\frac{10a-6}{a}\\ \frac{a^3}{a}+5\cdot\frac{10a-6}{a}=81\end{cases}$$

↓

$a^3+50a-30=81a$

$a^3-31a-30=0$

возможные a: $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 5 \pm 6 \pm 10 \pm 15 \pm 30$

$a=-1$ - подходит

$$\begin{array}{l|l} a^3+0a^2-31a-30 & a+1 \\ \cline{2-2} \underline{a^3+a^2} & a^2-a-30 \\ \quad -a^2-31a & \\ \quad \underline{-a^2-a} & \\ \qquad -30a-30 & \\ \qquad -30a-30 & \end{array}$$

$x=\sqrt{12}-y$

$y\sqrt{12}-y^2=3$

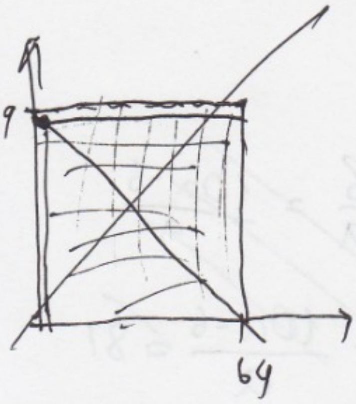
$y^2-y\sqrt{12}+3=0$

$\cancel{D}=12-12$

$y=-\sqrt{3}$

$x=-\sqrt{3}$

№5 Черновик



$y = 69 - x$

всего 68×68 поле (т.к не вкл. границы

всего вариантов для узлов 68×68

тогда

1) ~~в~~ для одной точки: $68 \times 68 - 2 \cdot 67$

2) всего точек для выбора: $68 \cdot 2 - 1$ (прямые пересекают и точка пересечения считается дважды)

тогда кол-во способов

$(68 \cdot 68 - 2 \cdot 67)(68 \cdot 2 - 1)$

68×68: 544, 408, 4624

4624 − 135 = 4489

$67 \times 2 = 134$

134 +1 = 133

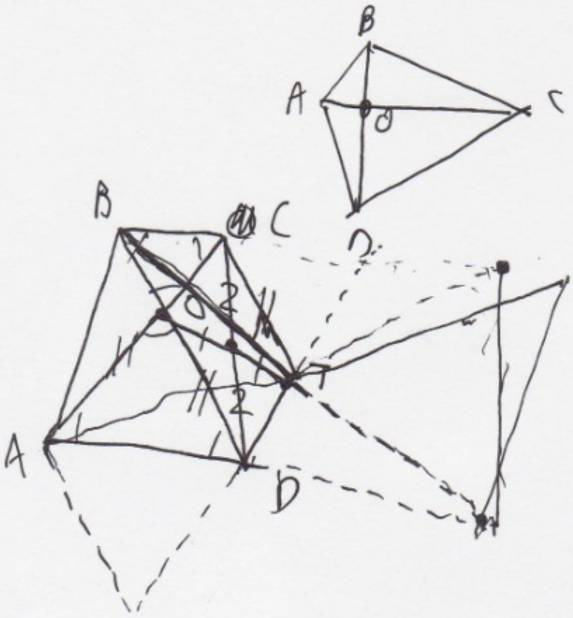
$68 \times 2 = 136$

136 − 1 = 135

4489×135: 22445, 13467, 4489, 606015

№6

Черновик



$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ \times\ 3{,}5 \\ \hline 175 \\ +\ 105 \\ \hline 12{,}25 \\ \times\ 4 \\ \hline 49{,}00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ +\ 18 \\ \hline 67 \end{array}$$

$1{,}5 \cdot 67$ $(0{,}5 \cdot 67)$ $(0{,}5 \cdot 67)$

$(0{,}5 \cdot 6{,}7) =$

$\sqrt{3}(x+y) \cdot (y-x)$

$\sqrt{3}\ 4{,}5 \cdot 2{,}5 = \frac{45}{8}\sqrt{3}\ 0{,}5^2 \cdot 67^2\ \sqrt{3}$

$\frac{[illegible] \cdot 45}{4}\sqrt{3} \div 2 \cdot \sqrt{3}(4{,}5)$

$9\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} 4{,}5 \\ \times\ 4{,}5 \\ \hline 225 \\ +\ 180 \\ \hline 20{,}25 \end{array}$$

$(y-x)^2 + 3(y+x)^2 =$

$= y^2 + x^2 - 2yx$

$(2{,}5)^2 + 3(4{,}5)^2$

$6{,}25 +$

6