Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

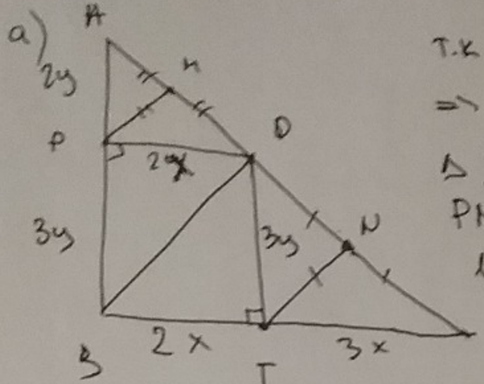
Шифр: **211005144**

ID профиля: **101237**

Вариант 10

Чистовик.

№1. а)



т.к. P, T - лежат на окр. диаметра BD $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DPB = \angle DTB = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle DTC$ и $\triangle DPA$ - прямоугольные

PM - медиана в $\triangle DPA$, TN - медиана

в $\triangle DTC$ (а т.к. $\triangle$ - прямоугольные)

$\Rightarrow PM = AM = MD$, $TN = ND = NC$.

$\angle ACB = \alpha$, т.к. $NT = NC \Rightarrow \angle NTC = \angle NCT = \alpha$, тогда

$\angle DNT = \angle NTC + \angle NCT = 2\alpha$ (т.к. он внешний)

$\angle BAC = \beta$, т.к. $AM = PM \Rightarrow \angle MAP = \angle MPA = \beta$, тогда

$\angle PMD = \angle MAP + \angle MPA = 2\beta$ (т.к. он внешний).

$PM \parallel TN$ (по усл.) $\Rightarrow \angle PMD + \angle TND = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$. ($\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \angle CBA = 180^\circ$

$\Rightarrow 90^\circ + \angle CBA = 180^\circ \Rightarrow \angle CBA = 90^\circ$.

б) т.к. $\angle B = 90^\circ \Rightarrow PD \parallel BT$ и $PB \parallel DT$ (т.к. $\angle B + \angle BPD = 180^\circ$ и

$\angle B + \angle BTD = 180^\circ$) $\Rightarrow$ BPDT - прямоугольник, тогда $DT = PB$ и

$PD = BT$. т.к. $PM = 1 \Rightarrow AD = AM + MD = 2PM = 2$, т.к. $TN = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$CD = CN + ND = 2TN = 3$. $AC = AD + DC = 2 + 3 = 5$.

т.к. $DT \parallel AB \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{CT}{CB} = \frac{3}{5}$ (обозначим CB за $5x$, тогда

$CT = 5x \cdot \frac{3}{5} = 3x \Rightarrow BT = BC - CT = 5x - 3x = 2x$.)

т.к. $DP \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AP}{AB} = \frac{2}{5}$ (обозначим AB за $5y$, тогда

$AP = 5y \cdot \frac{2}{5} = 2y \Rightarrow PB = 5y - 2y = 3y$). $PD = BT = 2x$

т.к. $\triangle APD$ - прямоугольный $\Rightarrow AP^2 + DP^2 = AD^2 \Rightarrow$

$4y^2 + 4x^2 = 4 \Rightarrow y^2 + x^2 = 1$.

т.к. $\triangle BPD$ - прямоугольный $\Rightarrow PB^2 + PD^2 = BD^2 \Rightarrow$

$9y^2 + 4x^2 = 5$ (т.к. $BD = \sqrt{5}$) $\Rightarrow 5y^2 + (4y^2 + 4x^2) = 5 \Rightarrow$

$5y^2 + 4 = 5 \Rightarrow 5y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ($y > 0$, т.к. это длина стороны)

$y^2 + x^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{5} + x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ($x > 0$, т.к. длина стороны)

$AB = 5y = \frac{5}{\sqrt{5}}$, $BC = 5x = \frac{10}{\sqrt{5}}$. $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}} = 5$.

Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$ б) $S_{ABC} = 5$.

Чистовик.

№2. $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$(x+3)(7-x) = -x^2 - 3x + 7x + 21 = -x^2 + 4x + 21$

$2\sqrt{21+4x-x^2} = 2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 - (x+3) - (7-x) = 2\sqrt{(x+3)(7-x)} - (x+3) - (7-x)$

$2\sqrt{(x+3)(7-x)} - (x+3) - (7-x) = -(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 - 10 = -(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2$

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})^2 + (\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) = 6$

$(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 1) = 6$

$y = \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}$

$y \cdot (y+1) = 6$

$y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow D = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \sqrt{D} = \cancel{25}\ 5$

$y_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$, $y_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$

1-ый случай: $y = 2 \Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$, т.к. $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)\cancel{(x-7)}(7-x)} \Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(x+7)} = 2 + 4 \Rightarrow \sqrt{(x+3)(7-x)} = 3$

$(x+3)(7-x) = 9 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = -9 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$, $D = 16 + 48 = 64 \Rightarrow \sqrt{D} = 8$

$x_1 = \frac{4+8}{2} = 6$, $x_2 = \frac{4-8}{2} = -2$

Проверка: $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$, $x_1 = 6$: $\sqrt{6+3} - \sqrt{7-6} = 3 - 1 = 2$, $x_2 = -2$: $\sqrt{-2+3} - \sqrt{7+2} = 1 - 3 = -2 \Rightarrow x = -2$ не подходит, $x = 6$ - подходит.

2-ой случай: $y = -3 \Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = -3$, т.к. $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{(x+3)(7-x)} \Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(7-x)} = -3 + 4 = 1 \Rightarrow \sqrt{(x+3)(7-x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow (x+3)(7-x) = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$x^2 - 4x - 21 = -\frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - 4x - \frac{\cancel{42}\,83}{4} = 0 \Rightarrow D = 16 + 83 = 99 \Rightarrow \sqrt{D} = 3\sqrt{11}$

$x_1 = \frac{4+3\sqrt{11}}{2}$, $x_2 = \frac{4-3\sqrt{11}}{2}$

Проверка: $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = -3$, $x_1 = \frac{4+3\sqrt{11}}{2}$: $\sqrt{2+\frac{3}{2}\sqrt{11}+3} - \sqrt{7-2-\frac{3}{2}\sqrt{11}} = -3 \Rightarrow \sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}} - \sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}} = -3$. (заметим, что $5+\frac{3}{2}\sqrt{11} > 5-\frac{3}{2}\sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}} > \sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}} \Rightarrow \sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}} - \sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}} > 0$; $x_2 = \frac{4-3\sqrt{11}}{2}$: $\sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}} - \sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}} = -3$ (зам. $5-\frac{3}{2}\sqrt{11} \geq 0 \Rightarrow 10 \geq 3\sqrt{11} \Rightarrow 100 \geq 99$) $\Rightarrow (\sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}} - \sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}})^2 = 9 \Rightarrow 5-\frac{3}{2}\sqrt{11} + 5 + \frac{3}{2}\sqrt{11} - 2\sqrt{(5-\frac{3}{2}\sqrt{11})(5+\frac{3}{2}\sqrt{11})} = 9 \Rightarrow 10 - 1 = 9$ - это верно $\Rightarrow x_1$ - не подходит, x_2 - подходит.

Ответ: $x = 6$; $x = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{11}$

№3. Чистовик.

ур. Парабола: $ax^2-2a^2x-ay+a^3+3=0$

$ay=ax^2-2a^2x+a^3+3$ ($a\neq0$, т.к. если $a=0$, $3=0$).

$y=x^2-2ax+a^2+3$

Вершина параболы имеет. коорд. $x=\frac{2a}{2}=a$, тогда коорд. $y=$

$=a^2-2a^2+a^2+3=3$. т.е. $B(a,3)$

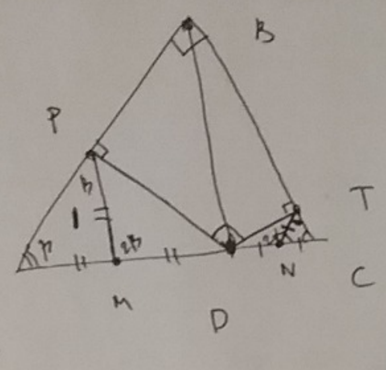
Если B лежит выше прямой $2x-y=5$, то $2x-5>y \Rightarrow$

$2a-5>3 \Rightarrow a>4$. (если ниже, то $a<4$).

$5a^2-4ay+3x^2+4xy+y^2+12ax=0$.

Черновик

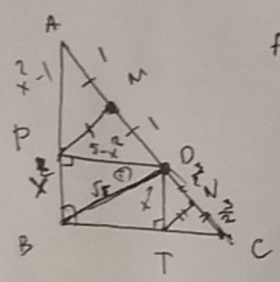
1



$2\beta+2\alpha=180$

$\beta+\alpha=90$

$\angle B=90$



$AC=2+3=5$

$\cancel{\ldots}+5-\cancel{x}^2+y^2=4$

$y^2=x^2-1$

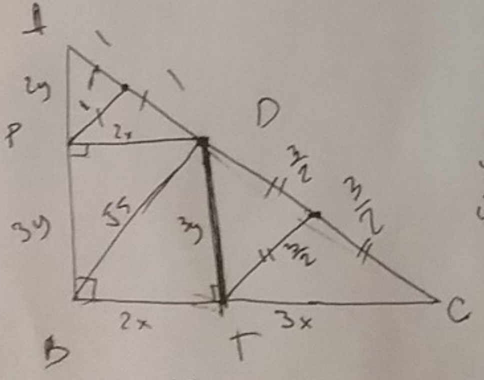
$x^2+z^2=9$

$z^2=9-x^2$

$(x+\sqrt{x^2-1})^2+(\sqrt{5-x^2}+\sqrt{9-x^2})^2=25$

$x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1+5-x^2+9-x^2+2\sqrt{(5-x^2)(9-x^2)}=25$

$4+9$ $\qquad x\sqrt{x^2-1}+\sqrt{(5-x^2)(9-x^2)}=6$



$\frac{3}{5}=\frac{CT}{CB}$

$y^2+x^2=1$ $\qquad \frac{1}{5}+x^2=1$

$4x^2+9y^2=5$ $\qquad x^2=\frac{4}{5}$

$4+5y^2=5$ $\qquad x=\frac{2}{\sqrt5}$

$5y^2=1$

$BC=\frac{10}{\sqrt5}$

$AB=\frac{5}{\sqrt5}$

$S_{ABC}=\frac{10}{\sqrt5}\cdot\frac{5}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{50}{5\cdot2}=5$ $\qquad y^2=\frac{1}{5}$ $\qquad y=\frac{1}{\sqrt5}$

211005144 (U101237 M1278486)

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$ [illegible]

$(x+3)(7-x)=-x^2-3x+7x+21=-x^2+4x+21$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4-(7-x)-(x+3)=-10$

$-\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}\right)^2=\boxed{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}-6$

$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}\right)^2=6-\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}\right)$

$\left(\underbrace{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}_{y}\right)\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+1\right)=6$

$(y+1)y=6$

$y^2+y-6=0$

$D=1+24=25 \quad \sqrt{D}=5$

$y=\frac{-1+5}{2}=2 \quad y=\frac{-1-5}{2}=-3$

$-(21-\frac{1}{4})$ $=$ $\cdot 4$ $(4-\frac{1}{4})$ $=$ 83 $3\le x\le 7$

$x^2-4x-21=-\frac{1}{4}$

$16+83=99$

$3\le x\le 7$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2$

$x+3-2\sqrt{(x+3)(7-x)}+7-x=4$

$-2\sqrt{(x+3)(7-x)}=-6$

$\sqrt{(x+3)(7-x)}=3$

$21+4x-x^2=9$

$x^2-4x-21=-9$

$x^2-4x-12=0$

$D=16+48=64 \quad \sqrt{D}=8$

$x=\frac{4+8}{2}=6 \quad x=\frac{4-8}{2}=-2$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=-3$

$2\sqrt{(x+3)(7-x)}=1$

$(x+3)(7-x)=\frac{1}{4}$

$x^2-4x-21=\frac{1}{4}$

$D=\quad -\frac{48}{4}+\frac{1}{4}=\frac{-47}{4}$

83

16

$4\cdot 4=$

$=84$

$84-1$

211005144 (U101237 M1278486)

$$\left(\frac{4+3\sqrt{11}}{2}\right)^2-4\left(\frac{4+3\sqrt{11}}{2}\right)-\frac{83}{4}=0$$

черновик

$$\frac{16+24\sqrt{11}+99}{4}-8-6\sqrt{11}-\frac{83}{4}=0$$

115 115

$$\sqrt{2+\frac{3}{2}\sqrt{11}+3}-\sqrt{7-2-\frac{3}{2}\sqrt{11}}=-3$$

$$\sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}}-\sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}}=-3 \checkmark$$

$$\sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}}-\sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}}=-3$$

$$5-\frac{3}{2}\sqrt{11}-2\sqrt{25-\frac{9}{4}11}+5+\frac{3}{2}\sqrt{11}=9$$

5.

$5-\frac{3}{2}\sqrt{11}<$

$5>\frac{3}{2}\sqrt{11}$

$10>3\sqrt{11}$

$100>99$

$A(x_1,y_1)$

$5a^2-4ay_1+8x_1^2-4x_1y_1+y_1^2+12ax_1=0$

$ay=ax^2-2a^2x+a^3+3$

$\boxed{y=x^2-2ax+a^2+3}$

$2x-y=5$

$y=2x-5$

$B\ (x=\frac{2a}{2}=a$

$y=a^2-2a^2+a^2+3=3$

$2a-5<3$

$2a<8$

$\boxed{a<4}$

$a>4$

$(2x-y)^2=4x^2-4xy+y^2$

$1+y$

≥ 1

$(2x-y)^2+\quad 5a^2-4ay+4x^2+12ax$

$(2x+3a)^2=4x^2+12ax+9a^2$

$(2x-y)^2+(2x-3a)^2-4a(1+y)=0$

$(x+\quad y$

$(y+8x$

$5a^2-4ay+8x^2+4xy+y^2+12ax=0$

$(a\quad y)(5a\ x$

211005144 (U101237 M1278486)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005144**

ID профиля: **101237**

Вариант 10

Черновик

$$\frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \quad (x-4)x(x-2) \quad x^2+y^2 = k^2$$

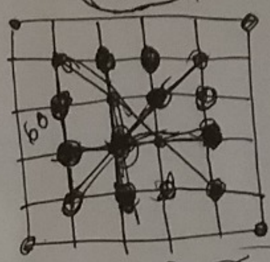
$$x^4+y^4+7x^2y^2 = 81$$

$$(x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2$$

$$6 + x^4y^2 + y^4x^2 = 10x^2+10y^2$$

$$x^4+y^4 - \frac{42}{x^2+y^2} = 11$$

2x4



$x, y \geq 0$

$$\frac{6}{x+y} + xy = 10$$

$$x^2+y^2+7xy = 81$$

$$6 + x^2y + y^2x = 10x+10y$$

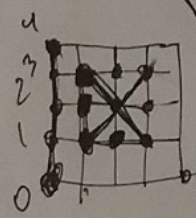
$$x^2y + y^3 + 7xy^2 = 81y$$

$$y^3 - 6 + 6xy^2 = 71y - 10x$$

$$y^3 + 6xy^2 - 71y + 10x - 6 = 0$$

67+67

68·66



136-3

68·6

65

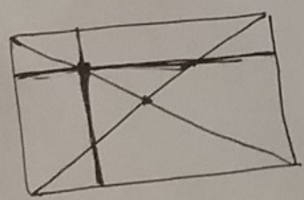
68

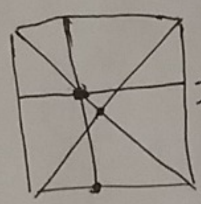
-267

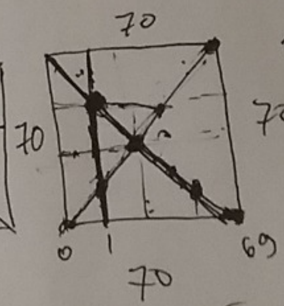
134

-1

5.







без 67

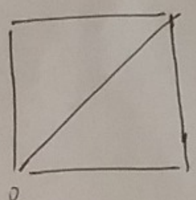
68 узлов

без 0 $2 \cdot 67 \cdot ($

1 диаг. $2 \cdot 68 \cdot (69^2 - (\cancel{138}) - 67 - 67)$

139

$-69-69$



Если 69 с 0

0 и диаг.

138

0 и обычная

2 диаг.

$(69^2 - 69 - 68 - 2 \cdot 69)$

$$\boxed{\frac{138 \cdot 135}{2}}$$

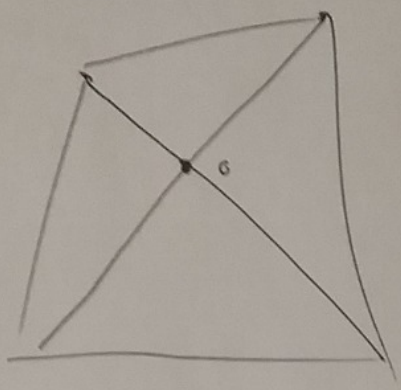
211005144 (U101237 M1278487)

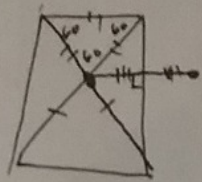
$\frac{6}{...?...2} + x^2 y^2 = 10$

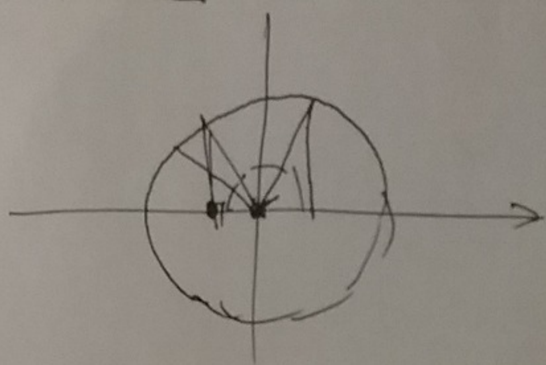
$x^2 \to x'$

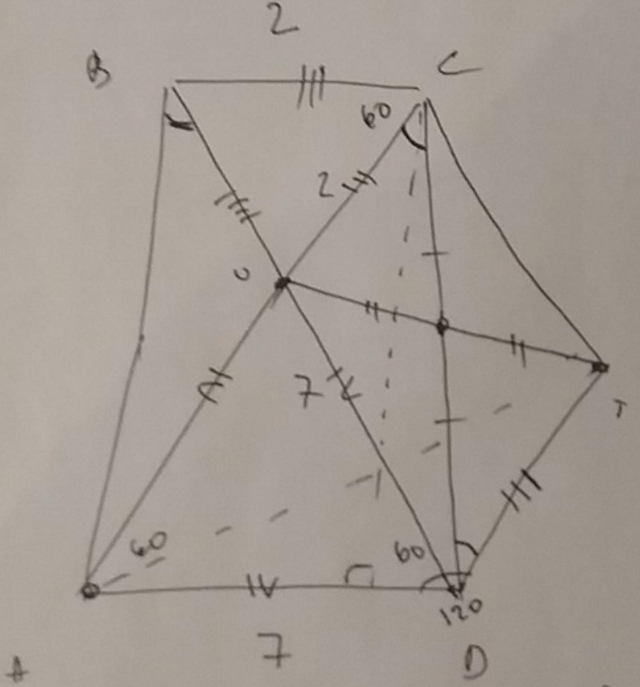
$y^2 \to y'$

Черновик.









(a).

$$9 \cdot \cancel{\cos} \sin 60 \cdot \frac{9}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 9 =$$

$$= \frac{81\sqrt{3}}{4}$$

$53+14 =$
$=67$

(6.) $S_{ABC} =$

$$CD^2 = 4 + 49 - 2\cos 120^\circ \cdot 14 = 53 + 2 \cdot 7 =$$
$$= 67$$

$CD = \sqrt{67}$ $\quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin\alpha \, AB \cdot BC =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin 60 \cdot 67 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 67$$

$$S: \frac{67\sqrt{3}}{4} : \frac{81\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 67/81$$

211005144 (U101237 M1278487)

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$x^2 \to x'$
$y^2 \to y'$

$$\begin{cases} \frac{6}{x+y} + xy = 10 \\ x^2+y^2+7xy = 81 \end{cases}$$

$\frac{6}{x+y} > 1$

$6 > x+y$,

$36 > x^2+y^2+2xy$

$45 < 5xy$ $5xy > 45$

$9 < xy$ $xy > 9$

$\frac{6}{x+y} > 1 \Rightarrow xy > 9$

$x^2+y^2 \geq 2xy$

$9xy \leq 81$

$xy \leq 9$

$\frac{6}{x+y} = 1$

$x+y = 6$

$xy = 9$

$\frac{6}{x+y} < 1$

$6 < x+y$

$x = 6-y$

$(6-y)y = 9$

$6y - y^2 = 9$

$y^2 - 6y + 9 = 0$

$D = 36 - 36 = 0$ $\sqrt{0} = 0$

$y' = \frac{6}{2} = 3$

$x' = 3$

$(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$6 < 2\sqrt{xy}$

$9 \leq xy$

$2\sqrt{xy} < 6 < x+y$

$\sqrt{xy} < 3$

$\boxed{x+y > 6}$

$xy > 9$

$x^2+y^2 < 81 - 63 = 18$

$x+y > 6$ $xy > 9$

$x^2+y^2 < 18 < 3x+3y$

$k+p > 6$, $kp > 9$

$2xy \leq x^2+y^2 < 18$

$xy < 9$

$5 > \sqrt{18} > x > 1$

$6 - 4{,}3$

$4{,}3 > x,y > 1{,}7$

$1{,}7+k$, $4{,}3-k$

$k^2 - 5{,}2k < -3{,}38$

$2{,}89 + 0{,}49 = 3{,}38$

$4{,}2 \times 4{,}2 = 84 + 168 = 17{,}64$

9 $\frac{81}{4}$

$4{,}8$ $4{,}2$

$1{,}7 \times 1{,}7 = 119 + 17 = 2{,}89$

$43 \times 43 = 129 + 172$

$2{,}89 + 3{,}4k + k^2 + 18{,}49 - 8{,}6k + k^2 < 18$

$k^2 - 5{,}2k < -0{,}49 - 2{,}85$

211005144 (U101237 M1278487)

черновик

$$\begin{array}{r} 592416 \\ +\quad 9044 \\ \hline 601460 \end{array}$$

211005144 (U101237 M1278487)

~~№6~~ №2 Чистовик.

Всего узлов: 68×68 (длина стороны квадрата 69)

На диагоналях квадрата (т.е. на прямых $y=x$ и $y=69-x$) узлов: $68+68=136$.

Пусть O – точка пересеч. диагоналей, тогда заметим, что O – не узел, т.к. если O – узел, то $x=69-x \Rightarrow 2x=69 \Rightarrow x$ – нец.

$\Rightarrow$ O – не узел (O – лежит на обеих диагон.)

1) Кол-во способов выбрать 2 узла, чтобы ровно 1 из них лежал на $y=x$ или $y=69-x$.

Заметим, если мы возьмём узел на диагонали, то тогда мы не можем использовать 2 узла из второй диагонали (т.к. если мы проведём прямые параллельные осям, то будет 2 точки пересеч. с другой диагональю)

(заметим, что на параллельной оси прямой, проход. через узел – 68 узлов (включая выбранный) и еще $66+66=132$ не диагональных узлов.

Не диагональных узлов: $68 \times 68 - 2 \times 68 = 66 \times 66$

Т.е. всего мы можем выбрать из $68 \times 66 - 2 \times 66 =$ $= 66 \times 66$. Т.е. для каждой диагон. узла есть 66×66 вариантов пары. Т.е. если ровно 1 узел, то всего способов: $2 \cdot 68 \cdot 66 \cdot 66$

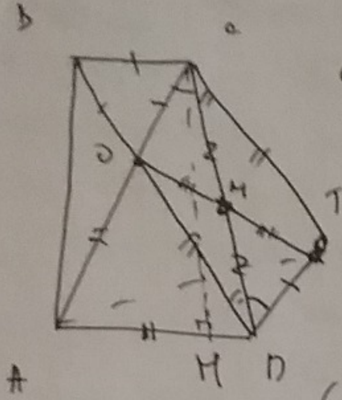
2) Если два выбранных узла – ~~ду~~ диагональные.

Выберем 1 узел, тогда заметим, что 2 узла на другой диагонали мы не можем взять. $\Rightarrow$ вариантов осталось $=$ $= 136 - 3 = 133$. Заметим, что каждый способ посчитан дважды $\Rightarrow$ кол-во способов $= \frac{136 \cdot 133}{2} = 68 \cdot 133$

Всего способов: $68 \cdot 133 + 68 \cdot 2 \cdot 66^2 = 9044 + 592416 =$ $= 601460$

Ответ: 601460 способов.

Чистовик.



а) Т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные $\Rightarrow BO = OC$, $AO = OD$, $\angle BCO = \angle DAO = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{BC} \quad\quad \overset{\shortparallel}{AD}$

$BD = BO + OD$, $CA = CO + OA \Rightarrow BD = CA$
$BC \parallel AD$ и $BD = CA \Rightarrow ABCD$ - равнобокая трапеция $\Rightarrow \underline{BA = CD}$.

Т.к. точку О отразили симметрично относ. середины $CD \Rightarrow TD = OC$, $TC = OD$ (т.к. М - серед. стороны CD, $OM = MT$ и $CM = MD \Rightarrow$ $OCTD$ - параллелограмм), $\angle TCD = \angle ODC$ и $\angle CDT = \angle DCO$ (т.к. $OC \parallel DT$ и $OD \parallel CT$). $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODC + \angle CDT = 120^\circ$ (т.к. $\angle ADC + \angle BCD = 180^\circ$, т.к. $BC \parallel AD$, $\angle ADC = \angle ADO + \angle ODC$, $\angle BCD = \angle BCO + \angle OCD = \angle BCO + \angle CDT = 60^\circ + \angle CDT$)

$\angle CTD = \angle COD = 120^\circ$ (т.к. $OCTD$ - параллелограмм), т.к. $\angle COD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

$\left.\begin{array}{l} DT - \text{общая} \\ AD = CD \\ \angle CTD = \angle ADT = 120^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \triangle ADT = \triangle CTD$
$\Downarrow$
$TA = CD = BA$.

$\angle BCT = \angle ADT = 120^\circ$ (т.к. $\angle BCO = \angle ADO$, $\angle OCD = \angle TDC$, $\angle DCT = \angle ODC$).

$\left.\begin{array}{l} CT - \text{общая} \\ BC = DT \\ \angle BCT = \angle DTC = 120^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \triangle BCT = \triangle DTC$
$\Downarrow$
$TB = CD = BA$.

Т.к. $BA = TA = TB \Rightarrow ABT$ - правильный. - Доказано

б) $S_{\text{трапец}(ABCD)} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$ (где h - высота трап.)
CH - высота, $AC = CO + OA = BC + AD = 9$, $\angle CAH = 60^\circ$
$\triangle AHC$ - прямоугольный $\Rightarrow \frac{CH}{AC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CH = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
$S_{ABCD} = \frac{9}{2} \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$
$CD^2 = CO^2 + OD^2 - 2\cos\angle COD \cdot CO \cdot OD = 4 + 49 - 2 \cdot \cos 120^\circ \cdot 14 =$
$= 53 + 14 = 67 \Rightarrow CD = \sqrt{67}$. $\Rightarrow TB = TA = AB = \sqrt{67}$.
$S_{ABT} = \frac{1}{2}\sin 60^\circ \cdot AB^2$ (т.к. ABT - правильный) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 67 =$
$= \frac{67\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{67\sqrt{3}}{4} : \frac{81\sqrt{3}}{4} = \frac{67}{81}$$

Ответ: а) доказано, б) $67/81$

№1 Чистовик.

$x^2 = k$

$y^2 = p$

Тогда решаем вот такую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{k+p} + kp = 10 \\ k^2 + p^2 + 7kp = 81 \end{cases} \qquad k, p \geq 0$$

~~Если $k+p < 6$, тогда $\frac{6}{k+p} > 1 \Rightarrow kp > 9$~~

~~невозможно~~

$k+p \geq 6$.

1) $k+p = 6 \Rightarrow kp = 10 - \frac{6}{6} = 9$

$k = 6 - p$

$(6-p)p = 9 \Rightarrow p^2 - 6p + 9 = 0$, $D = 36 - 36 = 0 \Rightarrow p = \frac{6+0}{2} = 3$

$p = 3 \Rightarrow k = 3$.

$x = \pm\sqrt{3}$

$y = \pm\sqrt{3}$ т.е. решения: $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

2) $k+p > 6$, $kp > 9$, т.к. $\frac{6}{k+p} < 1$

$7kp > 9 \cdot 7 = 63$

$k^2 + p^2 < 81 - 63 = 18$

$k^2 + p^2 \geq 2kp$

$2kp \leq k^2 + p^2 < 18 \Rightarrow kp < 9$

$9 < kp < 9$ – невозможно.

$k+p < 6 \Rightarrow (k+p)^2 < 36$

$k^2 + p^2 + 2kp < 36$

$k^2 + p^2 + 7kp = 81 \Rightarrow 5kp > 45 \Rightarrow kp > 9$

$\frac{6}{k+p} + kp = 10$, $\frac{6}{k+p} > 1$, т.к. $k+p < 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow kp < 9$, тогда $9 < kp < 9$ – не возможно.

Ответ: $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

211005144 (U101237 M1278487)