# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005128**

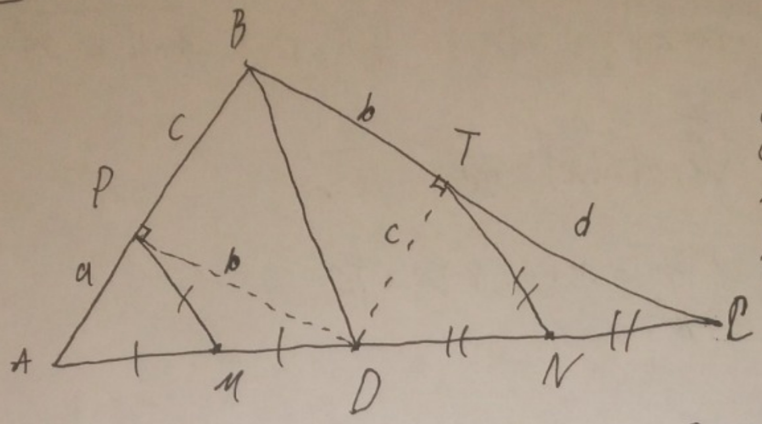
ID профиля: **209689**

Вариант 10

(1)

Чистовик

№1




$\angle BPD$ и $\angle BTD$ – лежат на диаметре $BD$ $\Rightarrow \angle APD$ и $\angle BTD$ равны $90°$ $\Rightarrow$
$PM = AM = MD$ (св-во мед. прям. тр.)
$TN = DN = NC$

Пусть $\angle PMD = \alpha$, а $\angle TND = \beta$. $PM \parallel TN \Rightarrow \alpha + \beta = 180°$

$2\angle A = \alpha$ ($AM = MP$, $\angle PMD$ – внеш) Аналогично $2\angle C = \beta$

$\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - \frac{2\angle A + 2\angle C}{2} = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow PD \parallel BC$ ($\angle APD = \angle ABC$) $\Rightarrow \angle ADP = \angle DCT \Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{DT}{TC}$ $AP = a$ $PD = b$ $TD = c$ $TC = d$

$TD \parallel BP$ ($TD \perp BC$ и $BP \perp BC$) ~~$\Rightarrow \angle B = 90°$~~

$\Rightarrow BTDP$ – параллел. $\Rightarrow BP = TD = c$

$PD = BT = b$. $PM = 1 \Rightarrow AD = 2$, $TN = \frac{3}{2} \Rightarrow DC = 3$. $BC = \sqrt{5}$. По теор. Пифа.

$c^2 + b^2 = 5$ $a^2 + b^2 = 4$ $c^2 + d^2 = 9$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$d^2k^2 + b^2 = 5$

$b^2k^2 + b^2 = 4$ $b^2(k^2+1) = 4$
$d^2k^2 + d^2 = 9$ $d^2(k^2+1) = 9$ $\frac{b}{d} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ ~~$b = 1{,}5d$~~ $b \cdot 3 = d \cdot 2$
$b \cdot 1{,}5 = d$

$b^2 \cdot \frac{9}{4} \cdot k^2 + b^2 = 5$
$b^2k^2 + b^2 = 4$ $\ominus$

$b^2 \cdot k^2 \frac{5}{4} = 1$
$b^2k^2 = \frac{4}{5}$

$d^2 = 9 - \frac{9}{5} = \frac{36}{5}$
$d = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$\frac{4}{5} + b^2 = 4$
$b^2 = \frac{16}{5}$ $b = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$c^2 = 5 - 3\frac{1}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow c = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$a^2 + \frac{16}{5} = 4$
$a^2 = \frac{4}{5}$ $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$BC = b + d = \frac{10}{\sqrt{5}}$
$AB = a + c = \frac{5}{\sqrt{5}}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}}}{2} = 5$

Ответ: 5

2

Чистовик

№2

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{21+4x-x^2}$ $\qquad$ $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}+4=2\sqrt{(x+3)(7-x)}$

$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 7-x\geq 0 \end{cases} \begin{cases} x\geq -3 \\ x\leq 7 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x+3)(7-x)}=\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{7-x}$

$\sqrt{x+3}=a \quad \sqrt{7-x}=b$ $\qquad$ $a^2+b^2=x+3+7-x=10$

$a^2+b^2-6=4$

$a-b+a^2+b^2-6=2ab$

$a^2-2ab+b^2=b-a+6$

$(b-a)^2=(b-a)+6$ $\qquad$ $b-a=x$

$x^2=x+6$

$x^2-x-6=0 \quad D=1+4\cdot 6=5^2$

$x_1=\frac{1-5}{2}=-2$

$x_2=\frac{1+5}{2}=3$

$\left[\begin{array}{l} b-a=-2 \\ b-a=3 \end{array}\right.$

$(-x)$ - убыв. ф-ия $(\downarrow) \Rightarrow 7-x(\downarrow) \Rightarrow \sqrt{7-x}(\downarrow)$

$(x)$ - возр. ф-ия $(\nearrow) \Rightarrow x+3(\nearrow) \Rightarrow \sqrt{x+3}(\nearrow) \Rightarrow -\sqrt{x+3}(\downarrow)$

$\Rightarrow b-a=\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}(\downarrow) \Rightarrow b-a=-2$ (максимум 1 корень)

$b-a=3$ (максимум 1 корень)

$x=6 \Rightarrow \cancel{\sqrt{7-6}-\sqrt{6+3}=-2}$

$\sqrt{7-6}-\sqrt{6+3}=-2$ $\qquad$ $\sqrt{6+3}-\sqrt{7-6}+4=2\sqrt{21+4\cdot 6-6^2} \Rightarrow x=6$

$\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}=3$

$7-x+x+3-2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}=9$

$1=2\sqrt{x+3}\sqrt{7-x}$

$1=4(x+3)(7-x)$

$\frac{1}{4}=-x^2+4x+21$

83

$x^2-4x-20{,}75=0 \quad D=16+4\cdot 20{,}75=99$

$x_1=\frac{4+\sqrt{99}}{2} \qquad x_2=\frac{4-\sqrt{99}}{2}$

$\sqrt{99}>9 \Rightarrow 6{,}5<x_1 \quad \sqrt{7-x_1}<1, \ -\sqrt{x+3}<-3 \Rightarrow \sqrt{7-x_1}-\sqrt{x+3}<-2\neq 3 \Rightarrow x=\frac{4-\sqrt{99}}{2}$

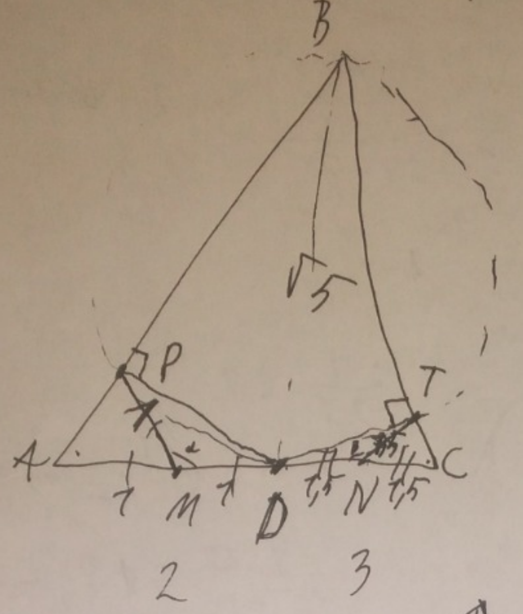
$x=2-\sqrt{24{,}75}$

$\sqrt{2-\sqrt{24{,}75}+3}-\sqrt{7-2+\sqrt{24{,}75}}+4=2\sqrt{21+4(2-\sqrt{24{,}75})-(2-\sqrt{24{,}75})^2}$

$\Rightarrow x=2-\sqrt{24{,}75}$

Ответ: $x=6$ и $x=2-\sqrt{24{,}75}$

Черновик

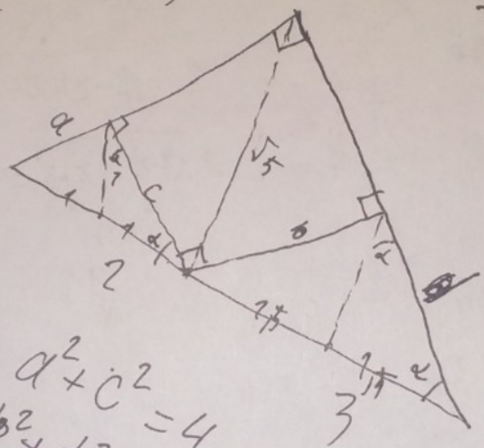



$\alpha+\beta=180^\circ$

$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+B=180$

$90^\circ=B$

$\frac{180-\alpha+180-\beta}{2}=90$




$a^2+c^2=4$

$b^2+d^2=9$

$c^2+d^2=5$

$b^2+\cancel{d^2}-a^2-c^2=c^2+\cancel{d^2}$

$b^2-a^2=2c^2$

$c^2\cdot k^2+c^2=4$

$d^2\cdot k^2+d^2=9$

$c^2+d^2=5$

$a=c\cdot k$

$b=d\cdot k$

$x\cdot k+x=4$

$y\cdot k+y=9$

$x+y=5$

$x=5-y$

$5k-\cancel{y}ky+5-y=4$

$y\cdot k+y=9$

$\frac{x(k+1)}{y(k+1)}=\frac{4}{9}$

$x9=4\cdot y$

$x+y=5$

$45-9y=4\cdot y$

$45=13y$

$y=\frac{45}{13}=d^2$

$\frac{20}{13}=c^2$

$a^2$

211005128 (U209689 M1274756)

# Черновик

$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4 = 2\sqrt{21+4x-x^2}$

$21+8-4$

$3 - 1 + 4 = 2\sqrt{21+24-36}$

$45$ $9$

$5$ $10$

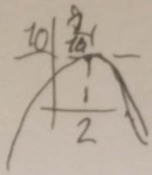
$2$

$6$ $6$

$x \geq -3$

$7 - x \geq 0$

$7 \geq x$

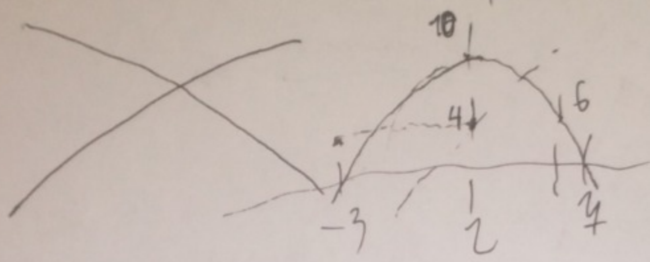


$\frac{-4}{-2\cdot 1} = 2$

$84$

$16 + 4\cdot 21 = 10^2$

$\frac{-4 \pm 10}{-2} = 7; -3$



$2\sqrt{(7-x)(x+3)}$

$2\sqrt{7-x}\sqrt{x+3} = \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} + 4$

$\sqrt{x+3}+4 > \sqrt{7-x}$

$x+3 > 7-x$

$2x > 4$

$x > 2$

$-\sqrt{10}+4$

$\sqrt{5} - \sqrt{2} + 4$

$2,\ldots - 1,4 + 4 < 5$

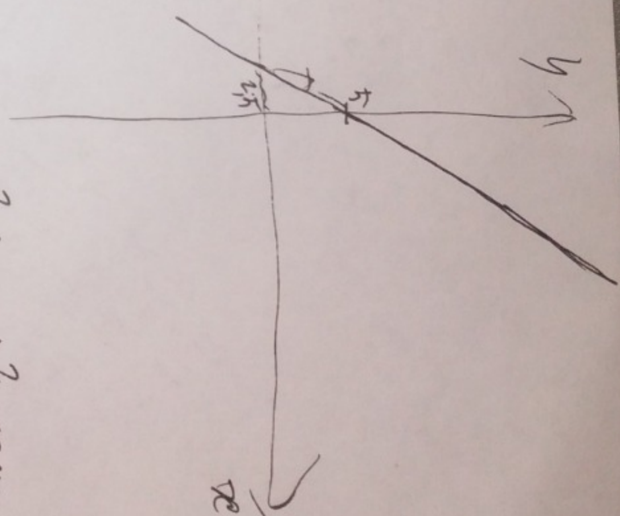
A – ($5a^2 - 4ay + 8x^2 - 4xy + y^2 + 12ax = 0$

парабол. с верш. в B | $ax^2 - 2a^2x - ay + a^3 + 3 = 0$)

$a = ?$

A и B по одну сторон.

$2x - y = 5$ (A и B не лежат на ней)



$1-3+4=2\sqrt{21-8+4}$

$2$ $i$ $a^2+b^2=10$

$\sqrt{7-x}+2\sqrt{7-x}\sqrt{x+3}-\sqrt{x+3}=4$

$a-b+a^2+b^2-6=2a\cdot b$

$a-b-6=-(a-b)^2$

$x^2+x-6=0$

$1+4\cdot6=5^2$

$\frac{-1\pm5}{2}=-3;2$

$a-b=-3$

$a-b=2$

$6$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=3$

$3{,}5^2=-x^2+4x+21$

$-x^2+4x+8{,}75=0$

$16+4\cdot8{,}75=43$

$51$

$\frac{-4\pm\sqrt{51}}{-2}$

$\frac{4\pm\sqrt{51}}{2}$

$2\pm\sqrt{3{,}5}$

$3{,}5 \times 3{,}5 = 12{,}25$

$21{,}00 - 12{,}25 = 8{,}75$

$\frac{7}{2}$

$20{,}75 \times 4 = 83{,}00$

$83{,}00 + 16 = 99{,}00$

$24{,}75 \times 4 = 99{,}00$

$ax^2+x(-2a^2)+(a^3+3)=-ay$

$x^2+x(-2a)+\frac{a^3+3}{a}=y$

$2x+5=y$

$8x^2-4xy+y^2$

$(x+y\ldots)(xy\ldots)=0$

$a\neq0$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005128**

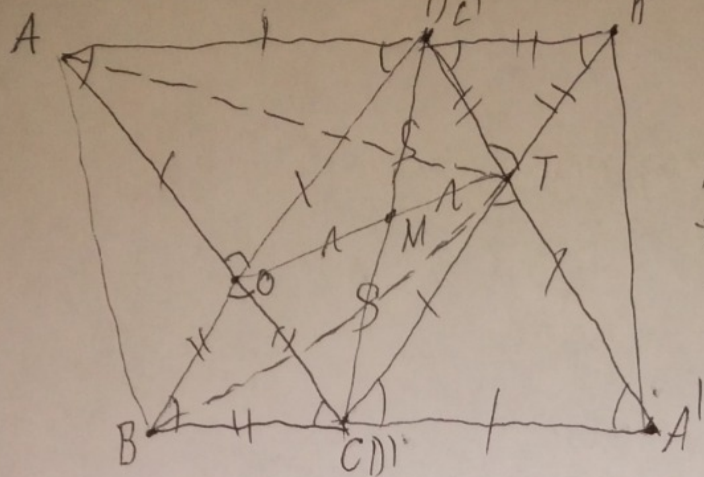
ID профиля: **209689**

Вариант 10

~~№6~~ Чистовик

1

№6




$\angle ADO = \angle OBC = 60 \Rightarrow AD \parallel BC$

$\angle AOB = \angle DOC$, $AO = OD$, $BO = OC \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = DC \Rightarrow ABCD$ - равнобок. трап.

~~Начн~~ Достроим такую же трапецию, как показано.

$ADB'$ и $BCA'$ - прямые, т.к. $DC = C'D'$ $\angle ADC + \angle BCD = 180^\circ$

$\angle A'C'B' = \angle DAC = 60^\circ \Rightarrow OC \parallel C'T$

$\angle C'B'D' = \angle ADB = 60^\circ \Rightarrow DO \parallel TD' \Rightarrow ODTC$ - параллел. $\Rightarrow M$ - середина $DC$ и $OT \Rightarrow T$ симметр. $O$ относ. $M$. Все углы отмеч. $\angle = 60^\circ$. $AD = TC$, $C'T = BC$ $\angle BCT = \angle ADT = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DTA = \angle TBC$, $AT = BT$, $\Rightarrow \angle CBT + \angle CTB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DTA + \angle CTB = 60^\circ$. $\angle C'TB' = 60^\circ \Rightarrow \angle ATB = 60^\circ$, $AT = BT \Rightarrow$

$\Rightarrow ATB$ - правильный тр. $AT = \sqrt{AD^2 + DT^2 - 2\cos \cancel{60^\circ}\, 120^\circ\, AD \cdot DT} =$

$= \sqrt{AD^2 + BC^2 + 2\cos 60^\circ \cdot AD \cdot BC} = \sqrt{49 + 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7} = \sqrt{67} \Rightarrow$

$S_{ATB} = \frac{\sqrt{67} \cdot \sqrt{67} \cdot \sin 60}{\ } = 67 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

~~SA~~ $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin 60}{2} = \frac{9 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \frac{S_{ATB}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$

Ответ: $\frac{S_{ATB}}{S_{ABCD}} = \frac{67}{81}$

2

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + y^4 + 7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$x^2+y^2 \geq 0$ $\quad x^2+y^2 = a$

$x^2y^2 \geq 0$ $\quad x^2y^2 = b$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ (x^2+y^2)^2 + 5x^2y^2 = 81 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{6}{a} + b = 10 \\ a^2 + 5b = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a} + b = 10 \\ b = \dfrac{81-a^2}{5} \end{cases} \quad \frac{6}{a} + \frac{81-a^2}{5} = 10 \,\Big|\cdot 5a$$

$30 + 81a - a^3 = 50a$

$-a^3 + 31a + 30 = 0$

$-(a^3 - 31a - 30) = 0$

$-(a+1)(a^2-a-30) = 0$

$-(a+1)(a-6)(a+5) = 0$

$a \geq 0 \Rightarrow \cancel{a=6}$

$\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=6 \\ a=-5 \end{array}\right. \Rightarrow a=6$

$a = 6$

$b = \dfrac{81-36}{5} = 9$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 6 \\ x^2y^2 = 9 \end{cases}$$

$\rightarrow xy = 3 \quad -2xy = -6 \quad x^2 - 2xy + y^2 = 0 \quad (x-y)^2 = 0 \quad x = y$

$x^2 = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = x = \sqrt{3} \\ y = x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$

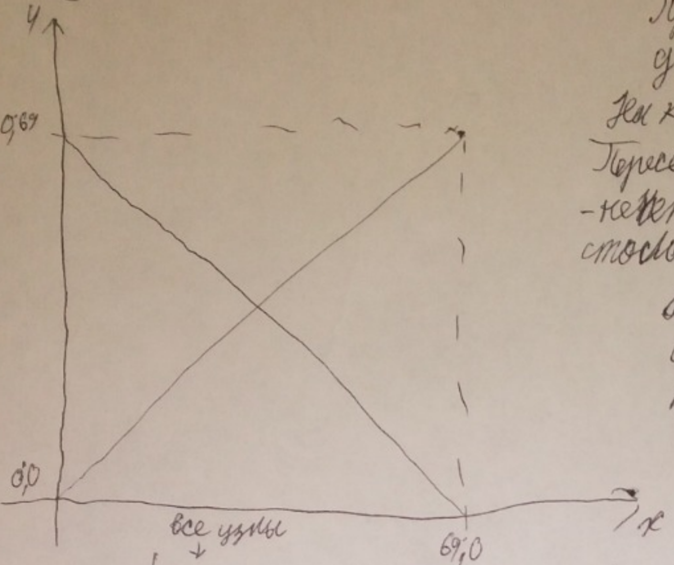
$\rightarrow xy = -3 \quad 2xy = -6 \quad x^2 + 2xy + y^2 = 0 \quad (x+y)^2 = 0 \quad x = -y$

$-y^2 = -3 \quad y^2 = 3 \quad \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{3};\ x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3};\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3};\ y = \sqrt{3} \\ x = \sqrt{3};\ y = -\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3};\ y = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3};\ y = -\sqrt{3} \end{array}\right.$

3

# Чистовик
## №5




Прямые $x=y$ и $y=69-x$ – это диагонали квадрата.

На каждой диагонали 68 узлов

Пересечение диагон. не узел, т.к 69 – нечетное. ~~Всего~~ Все узлы – это 68 столбцов и 68 строк.

Вначале посчитаем кол-во способов выбрать узлы, когда только один из них на диагоналями. $\underbrace{2}_{\text{выбираем диагональ}}\cdot\underbrace{68}_{\text{узел}}\cdot k$

все узлы

$k = (68\cdot 68 - \underbrace{68\cdot 2}_{\text{диагонали}} - \underbrace{2\cdot 67}_{\text{уже точки в выбранном столбце и строке}} + \underbrace{2}_{\text{пересеч. эти двух}}) \Rightarrow$ кол-во способов, когда

только одна на диаг. $= 2\cdot 68(68\cdot 68 - 68\cdot 2 - 67\cdot 2 + 2)$.

Когда обе на одной диаг. $\underbrace{2}_{\text{диагон}}\cdot\underbrace{68}_{\text{перевыб}}\cdot\underbrace{67}_{\text{втор}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{повтор.}} = 68\cdot 67$

Когда на разных

$\underbrace{68}_{\text{точка на } y=x}\cdot\underbrace{66}_{\text{на } y=69-x \text{ без совпад. по столбц. и строкам.}}$

$\Rightarrow$ Общее кол-во $2\cdot 68(68\cdot 68 - 68\cdot 2 - 67\cdot 2 + 2) + 68\cdot 67 + 68\cdot 66$

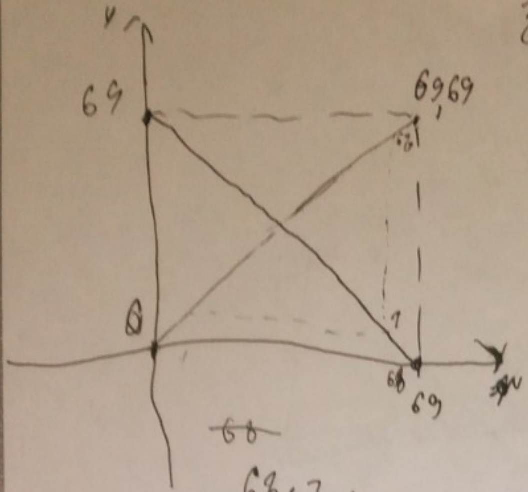
$= 2\cdot 68^3 - 4\cdot 68^2 - 4\cdot 68\cdot 67 + 4\cdot 68 + 68\cdot 67 + 68\cdot 66 = 68(2\cdot 68^2 - 4\cdot 68 - 3\cdot 67 + 4 + 66) =$

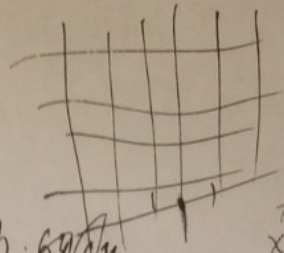
$= 68\cdot(68(2\cdot 68 - 4) - 201 + 70) = 68\cdot(68(136-4) - 131) = 68\cdot(68\cdot 132 - 131) =$

$= 68(8976 - 131) = 68\cdot 8845 = 601460$

Ответ: 601460.

Черновик



~~68·68·67·67~~

2

68·2·

~~68·68 − 68·2~~

~~68·2·(68·68 − 67·2 − 1 − 67 − 68~~

68·68·2(68·68 − 68·2 − 2·67 + 2)

$\frac{68\cdot 67}{2}\cdot 2 + 68\cdot 66$

$68\cdot 2\cdot 68\cdot 68 - 68^2\cdot 4 - 4\cdot 68\cdot 67 + 4\cdot 68 + 68\cdot 64 + 68\cdot 66$

$68^3\cdot 2 - 68^2\cdot 4 - 3\cdot 68\cdot 67 + 4\cdot 68 + 68\cdot 66$

$68(68^2\cdot 2 - 68\cdot 4 - 3\cdot 67 + 4 + 66)$

$68(68\cdot(68\cdot 2 - 4) - 201 + 70$

$68(68(136-4) - 131)$

$68(68\cdot 132 - 131)$

8976 − 131 = 8845·68

$67 \times 3 = 201$

$68 \times 2 = 136$

$132 \times 68 = 1056 + 792 = 8976$

$8845 \times 68$: 70760, 53070, 601460

$68 \times 132$: 336, 204, 66, 8976

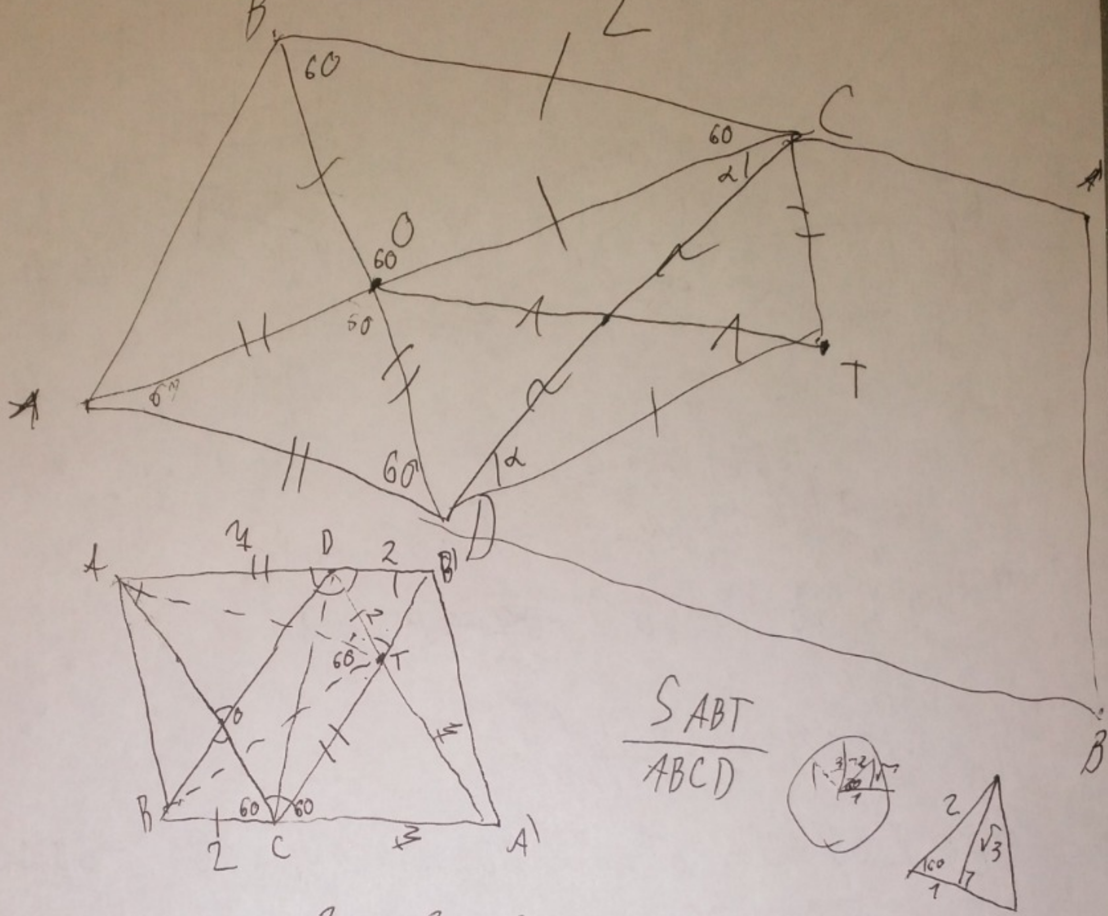
8976 − 131 = 8845

$68 \times 8845$: 4340, 2772, 544, 544, 601460

$y = \frac{2}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$

$12 - 4\cdot 3 = 0$

$y = -\frac{2}{\sqrt{12}} = -\sqrt{3}$



$\frac{S_{ABT}}{ABCD}$


$x^2 = 7^2 + 2^2 + 2\cos \cancel{120}\,60 \cdot 7 \cdot 2$ $\quad 53 \quad 1$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin$

$x^2 \quad 49 + 4 + 14$

$x = \sqrt{67} \quad 67$

$\frac{7+2}{2} \cdot \left| \frac{7\cdot\sqrt{3}}{2} + \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} \right|$

$\frac{9 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2}$

$81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\sqrt{67} \cdot \sqrt{67} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 67 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{67}{81}$

$53 + 14$

$67$

$$\begin{cases} \frac{6}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 10 \\ x^4+y^4+7x^2y^2 = 81 \end{cases}$$

$x^4+2x^2y^2+y^4+5x^2y^2=81$

$(x^2+y^2)^2+5x^2y^2=81$

$x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$xy \neq 0$

$(x+y)^2$

$\frac{6}{a}+b=10$

$a^2+5b=81$

$b=\frac{81-a^2}{5}$

$\frac{6}{a}$

$\frac{6}{a}+\frac{81-a^2}{5}=10$

$6+\frac{(81-a^2)\cdot a}{5}=10\cdot a$

$30+81\cdot a-a^3=50\cdot a$

$30+31a-a^3=0$

$a=-1$

$a+1$

$-a^3+31a+30 \;|\; a+1$

$-a^3-a^2 \quad | \; -a^2+a+30$

$-a^2+31a+30$

$-a^2-a$

$30a+30$

$30a+30$

$0$

$(a+1)(-a^2+a+30)=0$

$1+4\cdot 30=11^2$

$\frac{-1\pm 11}{-2}=6;-5$

$16x-7x$

$(a+1)(a-6)(a+5)\cdot(-1)=0$

$a=6$

$b=\frac{81-36}{5}=9$

$x^2+y^2=6$

$x^2y^2=9$

$xy=\pm 3$

$-3$

$x^2-2xy+y^2=0$

$(x-y)^2=0$

$x=y$

$xy=3$

$x=y=\pm\sqrt{3}$

$x^2-2xy+y^2=-12$

$(x-y)^2=12$

$x-y=\pm\sqrt{12}$

$y(y+\sqrt{12})=-3 \;|\; y(y-\sqrt{12})=-3$

$y^2+y\sqrt{12}+3=0 \;|\; y^2-y\sqrt{12}+3=0$