Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007756**

ID профиля: **209201**

Вариант 16

Чистовик

№ 2 Решение: Пусть числа на доске – $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ в порядке возрастания (a_1 – min, a_n – MAX), тогда

$$\begin{cases} 592 = a_1 + a_2 + \dots + 16a_n \\ 592 = 35a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{cases}$$ Вычтем.

$15a_n - 34a_1 = 0$

$15a_n = 34a_1$ Заметим, что $a_1, a_n \in \mathbb{N}$, 15 и 34 взаимно просты $\Rightarrow$ $\Rightarrow a_n \vdots 34$, $a_1 \vdots 15 \Rightarrow a_1 \geq 15$

Если a_1 будет ≥ 30, то $35a_1 > 592 \Rightarrow$ такое невозможно (т.к $a_i > 0$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow a_1 = 15$. Аналогично докажем, что $a_n = 34$ (если $a_n \geq 68$, то $a_n \cdot 16 > 592$)

Посмотрим на нашу сумму:

$a_1 + a_2 + \dots + 16a_n = 592$;

$15 + 16 \cdot 34 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 592$;

$559 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 592$;

$a_2 + \dots + a_{n-1} = 33$

~~Ясно, что $n < 4$, т.к тогда какой то из a_i при $i \neq 1$ был бы меньше, чем a_1, а такого быть не может $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow n = 3$, $a_1 = 15$, $a_2 = 33$, $a_3 = 34$~~

т.к $a_i > a_1$, то ~~$33 = 16 + 17$~~ либо $a_2 = 16$, $a_3 = 17$, либо $a_2 = 33$

Ответ: $a_1 = 15$, $a_2 = 16$, $a_3 = 17$, $a_4 = \cancel{33}\ 34$

$a_1 = 15$, $a_2 = 33$, $a_4 = 34$

№3 Решение:

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$$

$$\left(x - 2a + \frac{1}{a}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{(2a^2-1)^2 + a^2 - 4a^4 - 1}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B = 2a - \frac{1}{a}$$

$$5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$$

Посмотрим как на уравнение от переменной y:

$$D = (2x - 6a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (5a^2 - 4ax + x^2) = -4(x-a)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = a$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 3 \\ 2a - \frac{1}{a} < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 3 \\ 2a - \frac{1}{a} > 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

— невозможен, т.к $2a > 6$, $\frac{1}{a} < 1 \Rightarrow 2a - \frac{1}{a} > 5$

При $a < 0$:

$$2a^2 - 3a - 1 < 0$$

$$2\left(a - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right)\left(a - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right) < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т.к $a < 0$,

При $a > 0$

$$2a^2 - 3a - 1 > 0$$

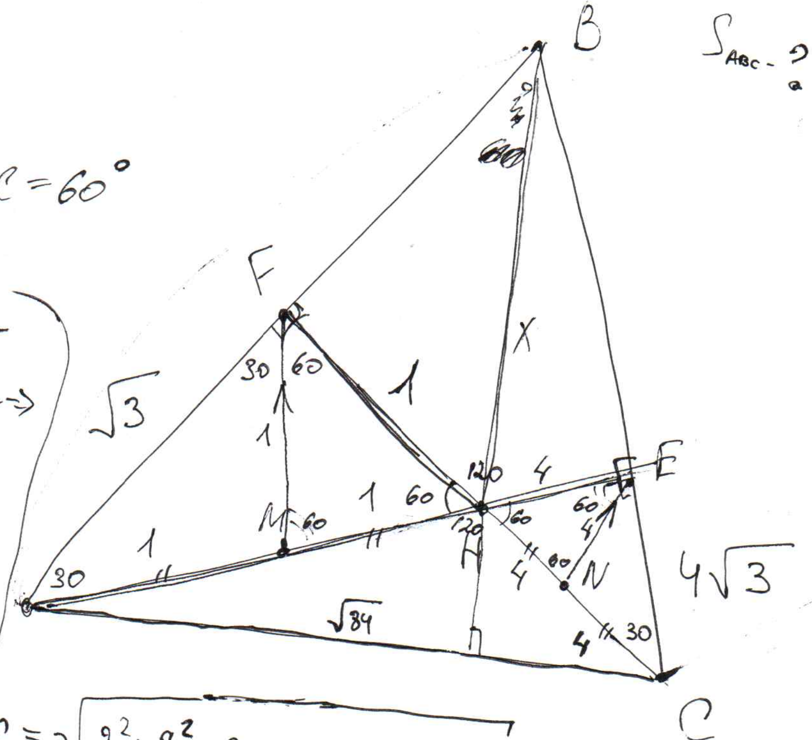
$D = 9 + 8 = 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow$

Черновик

S_{ABC} - ?

$\angle ABC = 60^\circ$



$2R = \frac{\sqrt{84}}{\sin 60} = \frac{2\sqrt{84}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{84}{3}} =$

$= \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$7 \cdot 4$

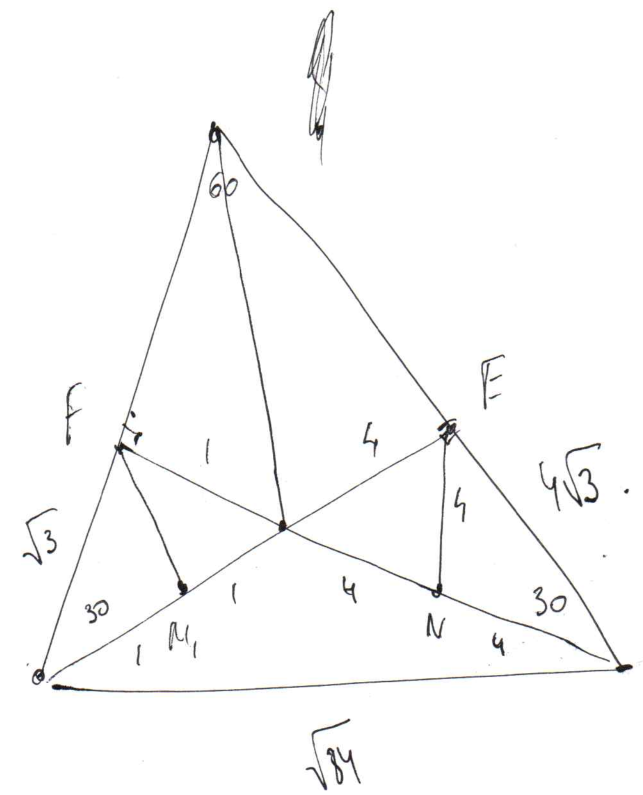
$AC = \sqrt{2^2 + 8^2 - 2\cos 120 \cdot 2 \cdot 8} =$

$= \sqrt{68 + 2 \cdot \cos 60 \cdot 2 \cdot 8} = \sqrt{68 + 2 \cdot 8} = \sqrt{68+16} = \sqrt{84}$

$\sin\alpha$

$\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{84}}{\sin 120}$

$\sin\alpha =$



Чистовик

№1

Дано:

CF, AE - выс

FM=1

EN=4

FM || EN

Найти:

$\angle ABC$,

S_{ABC},

R_{ABC}

Решение:

т.к. $\triangle AFH$ - пр.уг, FM - медиана,

$AM = MH = 1$.

Аналогично, $HN = NC = EN = 4$

$\angle FMH = \angle HEN$, т.к. $FM \parallel EN$;

$\angle FHM = \angle EHN$ (вертик) =>

=> $\triangle FHM \sim \triangle NHE$, $k = \frac{1}{4}$, т.к.

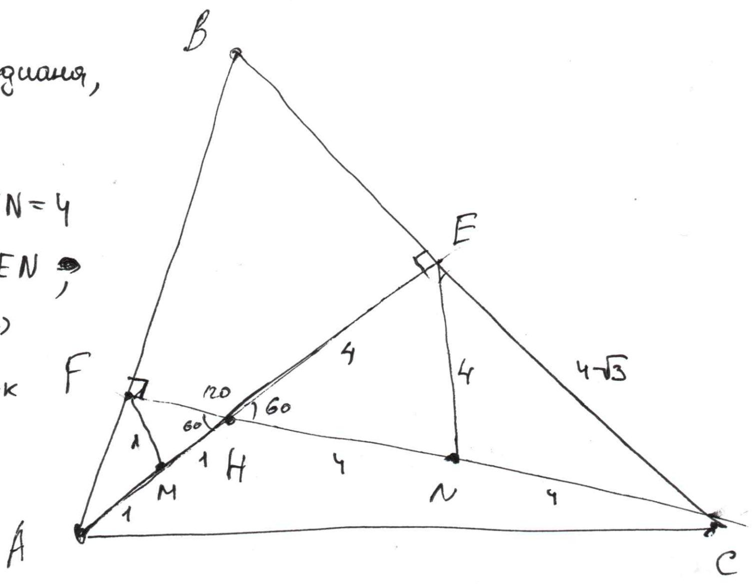
$FM : EN = \frac{1}{4}$ =>

=> $FH = \frac{1}{4} HN = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ =>

=> $\triangle FHM$ - р/с =>

=> $\angle FMH = \angle MFH = \angle FHM = 60°$. Аналогично докажем, что $\triangle HEN$ - р/с =>

=> $\angle EHN = \angle HNE = \angle NEH = 60°$ => $\angle FHE = 120°$. По сумме углов в четырехугольнике BFHE, $\angle ABC = 360° - 90° - 90° - 120° = 60°$



Заметим, что $\angle FCB$ по сумме угл в $\triangle HEC$ равен $180° - 90° - 60° = 30°$ =>

=> $EC = HC \cdot \cos 30° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$\angle BAE = 180° - \angle AFH - \angle FHA = 30°$ => $BE = AE \cdot tg 30° = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ => $BC = BE + EC = 6\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$

Запишем т-му косинусов для $\triangle AHC$:

$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2 - 2\cos(120°) \cdot AH \cdot HC} = \sqrt{4 + 64 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8} =$

$= \sqrt{68 + 16} = \sqrt{84}$

Из т-мы синусов для $\triangle ABC$: $2R_{ABC} = \frac{AC}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{3}/2}$;

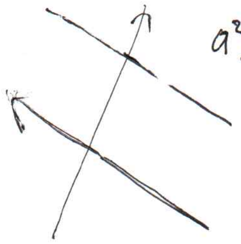
$R_{ABC} = \sqrt{\frac{84}{3}} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$; $R_{ABC} = 2\sqrt{7}$

Черновик Черновик

$5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$x = 1 \quad y = 1$



$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$

[redacted]

$a^2x^2 - 4a^3x - 2ax$

$a(x-m)^2 = \cancel{x^2}$

$a(ax^2 - 4a^2x - 2x)$

$a^2\left(x^2 - 4ax - \frac{2}{a}x\right) =$

$= a^2\left(x^2 - 2\left(2a - \frac{1}{a}\right)x + \left(2a - \frac{1}{a}\right)^2\right) - a^2\left(2a - \frac{1}{a}\right)^2 =$

$a^2\left(x - 2a + \frac{1}{a}\right)^2$

$-(2a^2-1)^2$

$(x-y)^2 + y^2 + 6ay + 5a^2 = 4ax$

$\frac{(x-y)^2}{5} + \frac{y^2 + 6ay + 5a^2}{5} = x$

$x_0 = 2a - \frac{1}{a}$

$x_0 = 2a - \frac{1}{a}$

$2a - \frac{1}{a}$

$2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\ }$

$5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$x = y \quad y = n+1$

$a^2y^2 + 2a^2y = a^2(y^2 + 2y + 1) - a^2 = a^2(y+1)^2 - a^2$

$a^2\left(x - 2a + \frac{1}{a}\right)^2 + a^2(y+1)^2 - (2a^2-1)^2 - a^2 + 4a^4 + 1 = 0$

$a^2\left(x - 2a + \frac{1}{a}\right)^2 + a^2(y+1)^2 = (2a^2-1)^2 + a^2 - 4a^4 - 1$

$\left(x - 2a + \frac{1}{a}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{(2a^2-1)^2 + a^2 - 4a^4 - 1}{a^2} = R^2$

$2y^2 - 2xy + 6ay - 4ax + 5a^2 + x^2 = 0$

$2y^2 - y(2x[redacted] - 6a) + (5a^2 - 4ax + x^2)$

$5a^2 - 4ax + x^2 =$

$= (5a - x)(a - x)$

$a^2 - \frac{4}{5}ax + \frac{x^2}{5}$

$D = (2x - 6a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (5a^2 - 4ax + x^2) =$

$= 4x^2 - 24xa + 36a^2 - 40a^2 + 32ax - 8x^2 =$

$= -4x^2 + 8ax - 4a^2 =$

$= -4(x^2 - 2ax + a^2) =$

$= -4(x - a)^2 \geq 0$

$x \overset{!}{=} a$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = a \\ x_2 = 2a - \frac{1}{a} \end{array}\right.$

$-0{,}1$ $\quad -0{,}2 + 10 > 3$

$\begin{cases} a < 3 \\ 2a - \frac{1}{a} > 3 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 3 \\ 2a - \frac{1}{a} < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 3 \\ 2a - \frac{1}{a} > 3 \end{cases} \end{array}\right.$

$a = 2$

$a = 3$ $\quad a < 0$

$D = 9 + 8 = 17$

$2a - \frac{1}{a} > 3$

$\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

$2a^2 - 3a - 1 < 0$

$2(a - \frac{1}{2})(a - 1) < 0$

$\begin{cases} a > 3 \\ 2a - \frac{1}{a} < 3 \end{cases}$

$\frac{1}{a} < 1$ $\quad 6 - \frac{1}{a} < 3$

$2a > 6$

нет реш

$+ \quad \frac{1}{2} \quad - \quad 1 \quad +$

$2a - \frac{1}{a} > 3$

$2a^2 - 3a + 1 > 0$

$2a^2 + 1 > 3a$

$2a$

$$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$$

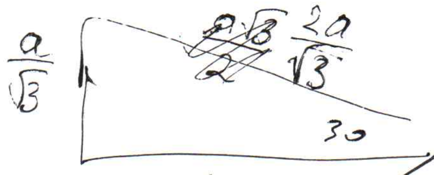
$$(x-y)^2+y^2+5a^2-4ax+6ay=0;$$

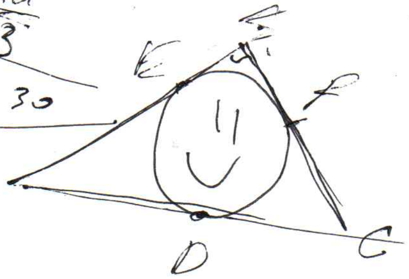
$$(x-y)^2+(y+3a)^2-4a^2-4ax=0;$$

$$(x-y)^2+((y+3a)^2-4a(a+x)=0$$

$$\underline{a^2x^2}+a^2y^2\underline{-4a^3x}\ \underline{-2ax}+2a^2y+4a^4+1=0$$

$$(xa-1)^2$$



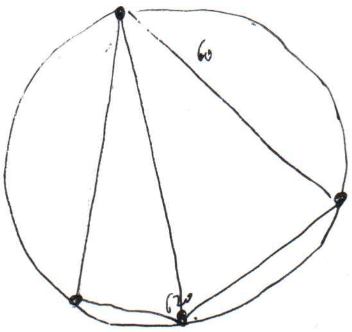


$$a^2x^2-4a^3x-2ax$$

$$ax(ax-4a^2-2)$$

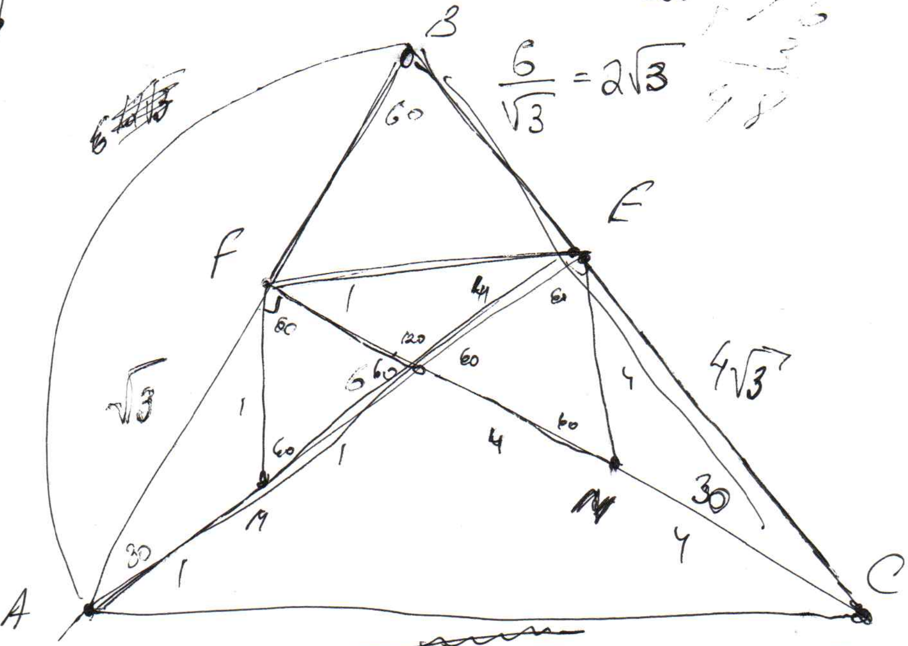
$$5a^2-12a+6ay+9-6y+2y^2=0$$

$$\boxed{2y^2+6y(a-1)+(5a^2-12a+9)=0}$$



$$\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$



$$\sqrt{1+16+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4}=\sqrt{17+4}=\sqrt{21}=\sqrt{3\cdot 7}$$

Черновик

$a_1 \quad a_2 \ldots\ldots a_n$ V 2

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 15 \\ \hline 175 \\ 35 \\ \hline 525 \\ +\ 34 \\ \hline 559 \end{array}$$

$a_1 + a_2 + \ldots + 16a_n = 592$

$35a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 592$

$34a_1 - 15a_n = 0$

$34a_1 = 15a_n$

$a_1, a_n \in N \Rightarrow \quad a_1 \geq 15$

$592 - 559 =$

$= 33$

35×1

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 34 \\ \hline 64 \\ 48 \\ \hline 544 \\ +\ 15 \\ \hline 559 \end{array}$$

33

15, 33, 34

$5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0 \qquad A(x;y)$

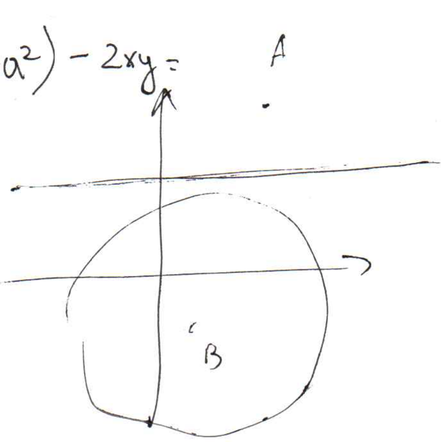
$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0 \qquad B$ - центр

$A; B$ по разные стороны от $x = 3$

$x^2 - 4ax + 4a^2 + 2(y^2 + 3ay + a^2) - 2xy =$

$= (x - 2a)^2 + 2((y + \cancel{a}$

$(x - 2a)^2 + 2\left(\left(y + \frac{3}{2}a\right)^2 - 1{,}25a^2\right) - 2xy$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007756**

ID профиля: **209201**

Вариант 16

№5 Ответ: $29 \cdot 15 \cdot 8$ способов $= 3480$ способов

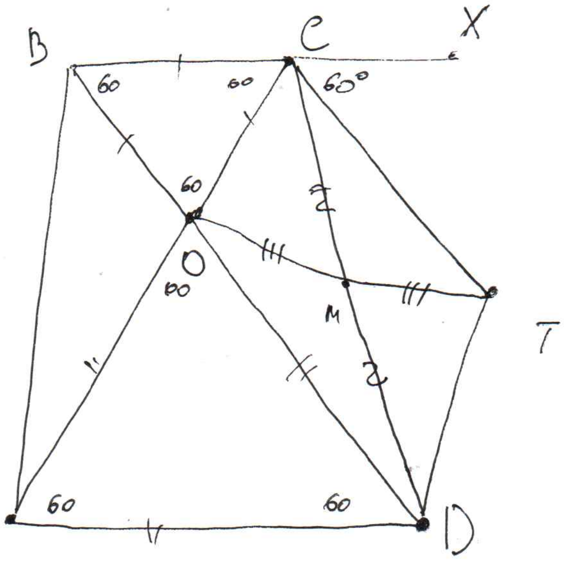
Решение: 1) Заметим, что у фокусника в наборе присутствуют все возможные вариации карточек, т.к у него 16^2 разл. карточек, а всего вариаций карточек 16 (на одн. стороне) $\cdot\, 16$ (на др. стороне) $= 16^2$

2) Пусть фокусник выберет сначала дубль, а потом вторую карту: это он может сделать $16 \cdot 15 \cdot 15$ способами (16 сп - дубль, 15^2 - карту без ~~[illegible]~~ числа дубля), но некоторые способы мы подсчитали 2 раза. Это способы, когда фокусник вытягивает 2 дубля, а их всего $\frac{16 \cdot 15}{2}$,

Итого: $16 \cdot 15 \cdot 15 - \frac{16 \cdot 15}{2} = 16 \cdot 15 \cdot \left(15 - \frac{1}{2}\right) = 16 \cdot 15 \cdot 14{,}5 = 29 \cdot 15 \cdot 8 = 3480$ способов

Ответ: 3480 способов

№ 6 Решение: Чистовик Математика, 9 кл



1) $\angle BCO = 60°$ ($\triangle BOC$ – р/с);

$\angle DAO = 60°$ ($\triangle OAD$ – р/с) =>

=> $BC \parallel AD$;

2) $\angle BOA = \angle COD = 120°$;

$CO = BO$;

$AO = DO$; =>

=> $\triangle ABO = \triangle CDO$ => $AB = CD$ =>

=> ABCD – равнобокая трапеция =>

=> ABCD – вписанный

3) т.к T симметрично O от. середины CD, $\triangle COD = \triangle CTD$ => $\angle ODC = \angle DCT$ =>

=> $CT \parallel OD$ => $CT \parallel BD$ => $\angle CBD = \angle XCT = 60°$

4) т.к $\angle OAD = \angle TCX = 60°$, ACTD – вписанный => т.к ACTD, ABCD - впис,

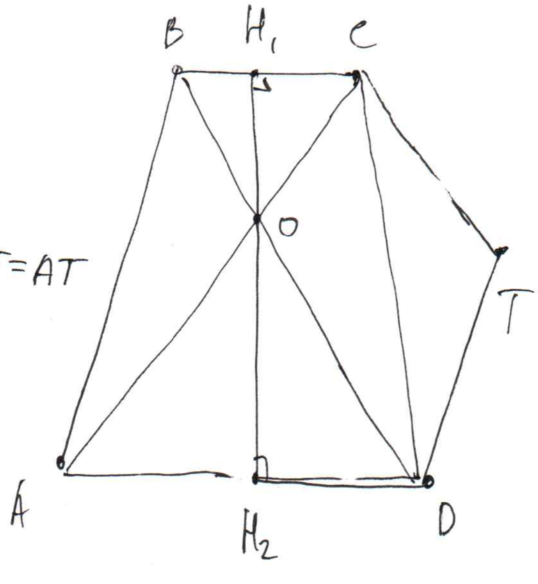
ABCTD – вписанный тоже

5) $\angle BTA = \angle BCA = 60°$; $\angle BAT = \angle TCX = 60°$ => $\triangle ABT$ – р/с

Дано: $BC = 3$; $AD = 5$ ~~Док~~ Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

Решение: т.к $BC = 3$, OH_1 (высота $\triangle OBC$) $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Аналогично, $OH_2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$



По т-ме косинусов $\triangle ABO$,

$CD = AB = \sqrt{BO^2 + AO^2 - 2\cos 120 \cdot BO \cdot AO} =$

$= \sqrt{9 + 25 + 3 \cdot 5} = \sqrt{49} = 7 = BT = AT$

$S_{ABCD} = H_1H_2 \cdot \frac{BC + AD}{2} = 4\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} h_{ABT} \cdot AB = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2} \cdot AB = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49\sqrt{3}}{4 \cdot 16 \cdot \sqrt{3}} = \frac{49}{64}$ Ответ: $\frac{49}{64}$

№4 Чистовик Математика, 9 кл

Решение: $\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$

Замена: $x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$, тогда

$\begin{cases} 2a-b=2 \\ a^2-2{,}5b=19 \end{cases} \Rightarrow a^2-5(a-1)=19$

$a^2-5a-14=0$

$\left[\begin{array}{l} a=-2 \Rightarrow b=-6 \\ a=7 \Rightarrow b=12 \end{array}\right.$

1) Случай 1: $a=-2$; $b=-6$

$\begin{cases} x^2+y^2=-2 \\ x^2y^2=-6 \end{cases}$, но такого быть не может, т.к $x^2+y^2\geq 0>-2$

2) Случай 2: $a=7$ $b=12$

$\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ x^2y^2=12 \end{cases}$ Замена: $x^2=m$; $y^2=n$

$\begin{cases} m+n=7 \Rightarrow m=7-n \\ mn=12 \end{cases}$

$(7-n)n=12$

$n^2-7n+12=0$

$\left[\begin{array}{l} n=3 \Rightarrow m=4 \\ n=4 \Rightarrow m=3 \end{array}\right.$

а) $\begin{cases} y^2=3 \\ x^2=4 \end{cases}$ б) $x^2=3$, $y^2=4$

$\left[\begin{array}{l} x=2;\ y=\sqrt{3} \\ x=2;\ y=-\sqrt{3} \\ x=-2;\ y=\sqrt{3} \\ x=-2;\ y=-\sqrt{3} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3};\ y=2 \\ x=\sqrt{3};\ y=-2 \\ x=-\sqrt{3};\ y=2 \\ x=-\sqrt{3};\ y=-2 \end{array}\right.$

Ответ: $(2;\sqrt{3})$, $(2;-\sqrt{3})$, $(-2;\sqrt{3})$, $(-2;-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};2)$, $(\sqrt{3};-2)$, $(-\sqrt{3};2)$, $(-\sqrt{3};-2)$

Черновик

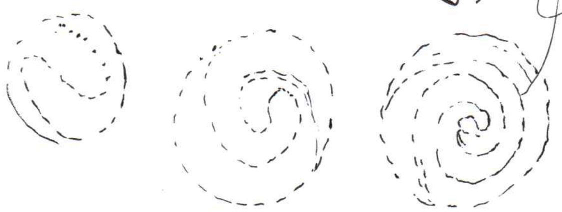
$2\cdot 4+2\cdot 3-4\cdot 3=8+6-12=2$

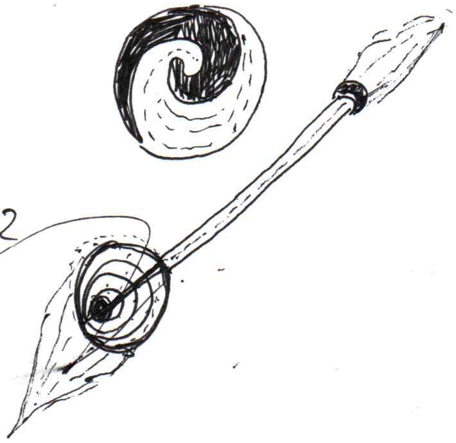
$16+9-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=25-6=19$

$x^4+y^4-2x^2y^2+3x^2+3y^2=22$

$(x^2-y^2)^2+3x^2+3y^2=22$

$(x+y)^2(x-y)^2+3(x^2+y^2)=22$





$\begin{cases} mn=-6 \\ m+n=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} mn=12 \\ m+n=7 \end{cases}$

$x-y=a$

$xy=b$

$2a^2+4b$

$2m+2n-mn=2 \qquad a=mn$

$m^2+n^2-\frac{1}{2}mn=19 \qquad b=m+n$

$2b-a=2 \qquad a=2b-2$

$b^2-2{,}5a=19$

$b^2-5(b-1)=19 \qquad \left[\begin{array}{l} b=-2 \\ b=7 \end{array}\right. \qquad a=-6 \quad a=12$

$b^2-5b-14=0$

$b=-2$

$b=7$

Черновик

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$2m+2n-mn=2$$

$$m=\frac{2-2n}{2-n}$$

$$\left(\frac{2-2n}{2-n}\right)^2+n^2-\frac{1}{2}n\frac{2-2n}{2-n}=19$$

$$\cancel{(2-2n)^2}$$

$$(2-2n)^2+n^2(2-n)^2-\frac{1}{2}n(2-2n)(2-n)=$$
$$=19(2-n)^2$$

$$4n^2+4-8n+4n^2+n^4-4n^3-\frac{1}{2}n(4-6n+2n^2)=19(4-4n+n^2)$$

$$4n^2+4-8n+4n^2+n^4-4n^3-2n+3n^2-n^3=76-76n+19n^2$$

$$n^4-5n^3-8n^2+66n-72=0$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 8 \\ \hline 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times\ 28 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 120 \\ \hline 58 \\ 29 \\ \hline 3480 \end{array}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

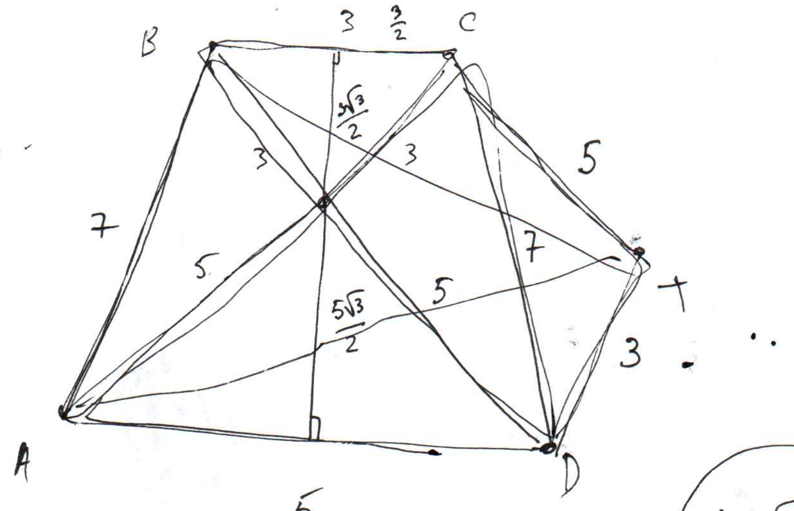
Черновик

$2m + 2n - nm = 2$

$m^2 + n^2 - \frac{1}{2} mn = 19$

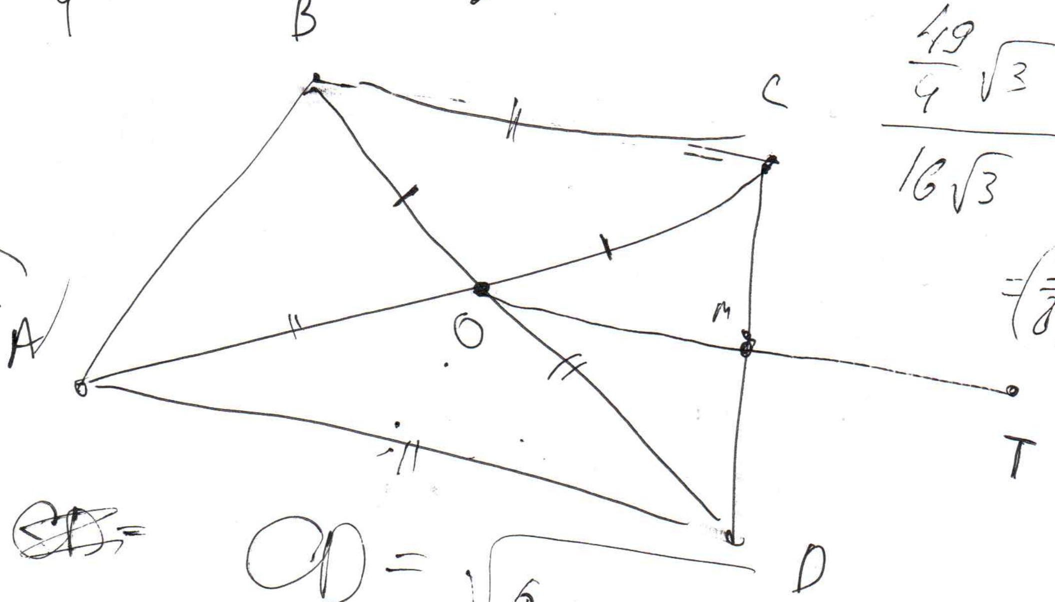
$(m-n)^2 - 3m - 3n = 16$

$(m-n)^2 = 16 + 3m + 3n$



$h = 4\sqrt{3}$ $S = \cancel{8}$ $16\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} 7 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{49}{4}\sqrt{3}$

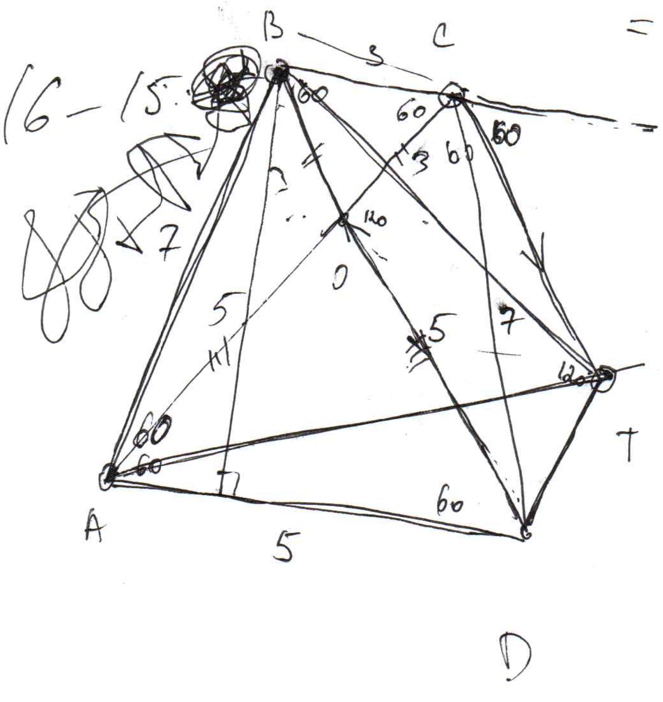


$\frac{\frac{49}{4}\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} = \frac{49}{64} = \left(\frac{7}{8}\right)^2$

1 балл

$OD = \sqrt{9 + 25 + 15} = \sqrt{24 + 25} = 7$

$16 \cdot 16 - 15$



$\angle ABT = 60°$

Черновик

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2n+2m-nm=2 \Rightarrow 2n-m\cancel{n}=2-2m \Rightarrow n=\frac{2-2m}{2-m} \\ n^2+m^2-\frac{1}{2}m\cancel{n}=19 \end{cases}$$

$$x^2y^2=2x^2+2y^2-2$$

$$\left(\frac{2-2m}{2-m}\right)^2+m^2-\frac{1}{2}m\cdot\frac{2-2m}{2-m}=19$$

$$x^4+y^4-x^2-y^2+2=19$$

$$x^4+y^4-x^2-y^2-17=0$$

$$(x^2)^2-\frac{1}{2}x^2y^2+y^4-19=0$$

$$D=\frac{1}{4}y^4+4\cdot(y^4-19)=$$

$$=\frac{1}{4}y^4+4y^4-76=$$

$$=\frac{17}{4}y^4-76$$

76 68 17 4

16^2

$$\left(16\cdot16\right)^2=16^2$$

15 15

1	1
2	2
3	3
4	4
⋮	⋮
16	16

$$16\cdot(15)^2=16\cdot15^2-\frac{16\cdot15}{2}$$

$$16\cdot15^2-\frac{16\cdot15}{2}=16\cdot15\left(15-\frac{1}{2}\right)=16\cdot15\cdot14{,}5$$