Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

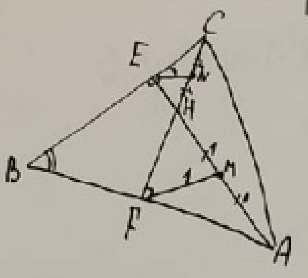
Шифр: **211007735**

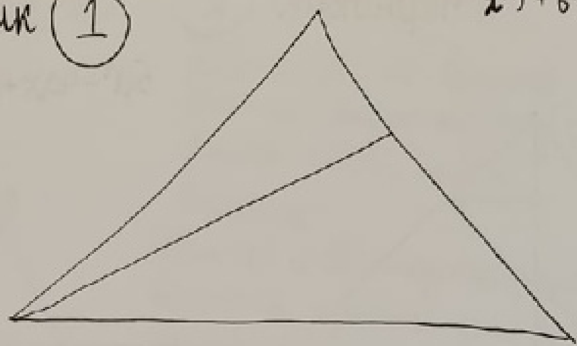
ID профиля: **312705**

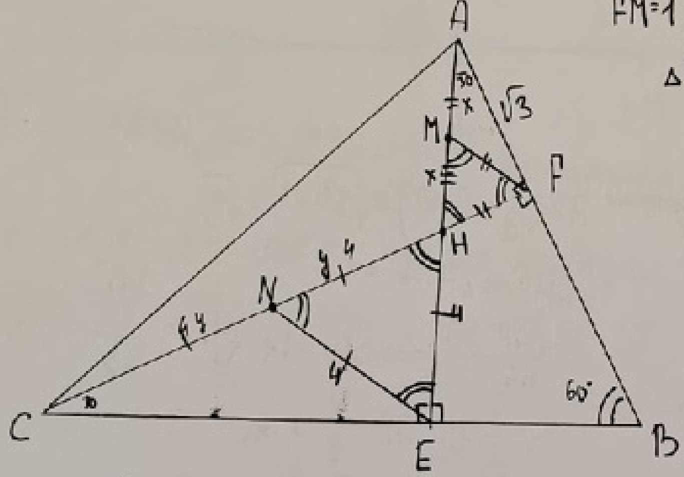
Вариант 16

Черновик 1

$2\cdot 3+6=4\cdot 3$







$FM=1;\ EN=4$

$\Delta HMF \sim \Delta HEN$ - равносторонние

$AE=2x+y=2+4=6$

$\angle MAF=30° \Rightarrow H$

$\Delta FAH \sim \Delta EAB$

$AF=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\frac{AF}{AE}=\frac{AH}{AB} \Rightarrow AB=AH\cdot\frac{AE}{AF}=2\cdot\frac{6}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

$EB=2\sqrt{3}$

$\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S=\frac{1}{2}CF\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 4\sqrt{3}=18\sqrt{3}$

$AC=\sqrt{3+81}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$

$R=\frac{2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sin\angle ABC}=\frac{2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{7}$

S-сумма остальных чисел

$35a+b+S=592$

$16b+a+S=592$

$15b-34a=0$

$a=\frac{15}{34}b \Rightarrow b \vdots 34$

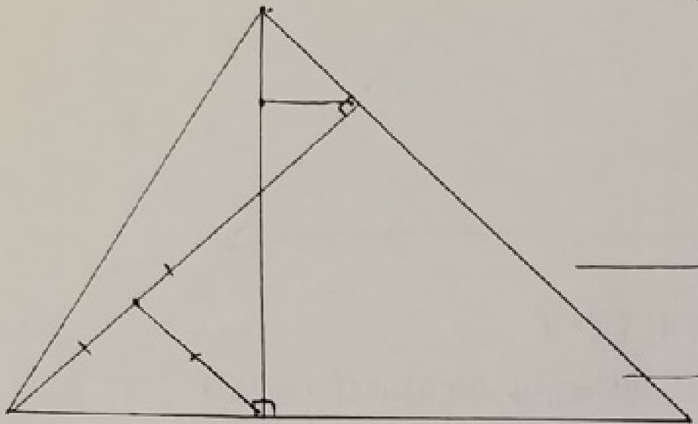
$b=\frac{34}{15}a$ и $a \vdots 15$

34; 68; 102; 136; 170; 204; 238; 272; 306; 340; 374; 408; 442; 476; 510; 544; 578; 612

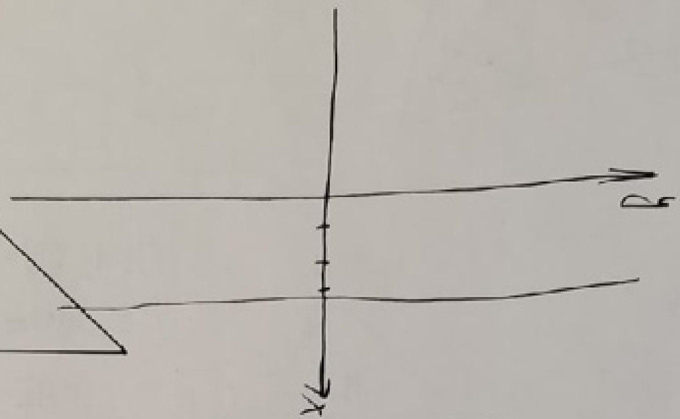
34×16: 204, +34, 544, +15, 559

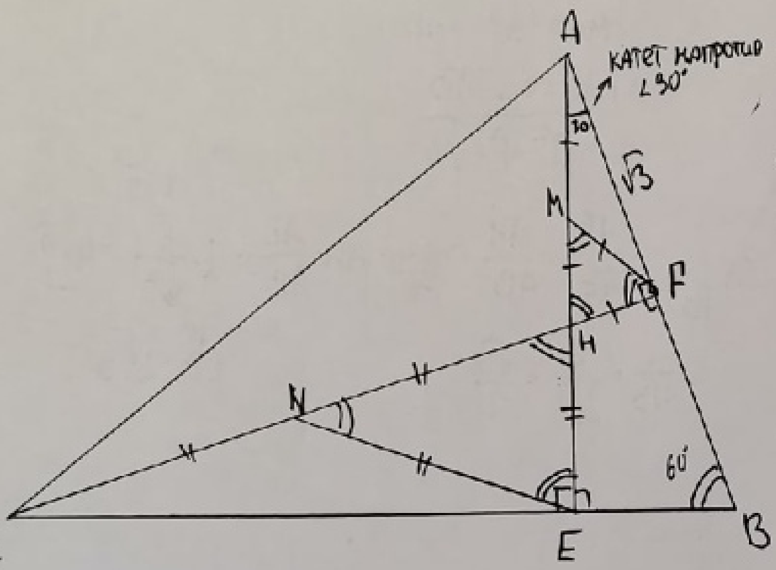
34×14: 136, +34, 476

Черновик 2



$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$





$AP\,(\text{из }\triangle AHF)=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\triangle AHF \sim \triangle ABE \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AF}{AE}=\frac{AH}{AB} \Rightarrow AB=AH\cdot\frac{AE}{AF}=2\cdot\frac{6}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ ($2\cdot\sqrt{3}$)

$S=\frac{1}{2}\cdot CF\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 4\sqrt{3}=18\sqrt{3}$

$R=\frac{AC}{2\sin\angle ABC}=\frac{2\sqrt{21}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{7}$

$AC=\sqrt{3+81}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$

а – мин; в – макс.

$\begin{cases}35a+8+b=592\\16b+a+8=592\end{cases}$ $\ominus$ $\Rightarrow 34a-15b=0$ $\quad 34a=15b \Rightarrow$ $b:34$, $a:15$ $\quad$ b не больше 34 $\Rightarrow$

$\underbrace{b=34}_{\text{макс.}}$ $\underbrace{a=15}_{\text{мин}}$

$68\times16=408+68$

$34\times16=204+34=544$

559

$592-559=33$

$16\times68=128+96=1088$

16 17

16

$(ax-2a^2-1-2a^2-1)(ax)+a^2y^2+2a^2y+1+4a^2=0$

$a^2x^2-2a^3x-ax-2a^3x-ax$

211007735 (U312705 M1273163)

Черновик 3

$x>3$

$x<3$

$4x^2-3x$

$(4x-1)(x+2)$

$4x^2+7x-2$

$5a^2-4ax+x^2-2xy+2y^2=0$

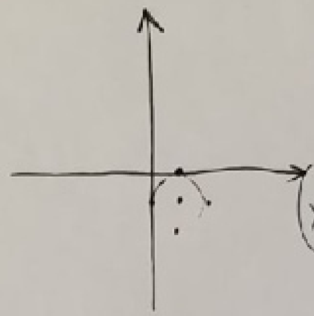
$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^2+1=0$

$a^2x^2-x(4a^3+2a)+a^2y^2+2a^2y=-1-4a^2$

$a^2x^2-2x($ $\quad (ay+a)^2-a^2$ $\quad (ax-2a^2-1$

$a^2x^2-2xa(2a^2+1$

$(ax-2a^2-1)^2$



$(x-1)^2+(y+1)^2=1$

$6+8+10$

$2(3+4+5)$

$(ax-2a^2-1)^2-(2a^2+1)^2+(ay+a)^2-a^2=-1-4a^2$

$(ax-2a^2-1)^2+(ay+a)^2=(2a^2+1)^2-1-3a^2$

$(ax-2a^2-1)^2+(ay+a)^2=(2a^2)(2a^2+2)-3a^2$

$=\cancel{2}(a^2 2a^2(a^2+1)-3a^2=a^2(2a^2+2-3)$

$(ax-2a^2-1)^2+(ay+a)^2=a^2(2a^2+2-3)$

$(ax-2a^2-1)^2+(ay+a)^2=a^2(2a^2-1)$

$2a^2-1\geq 0$

$(\sqrt{2}a-1)(\sqrt{2}a+1)\geq 0$

$+ \quad - \quad +$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

$4a^2-4ax+x^2+a^2+6ay-2xy+2y^2=0$

$(2a-x)^2$

$+3$

$ax-2a^2-1$

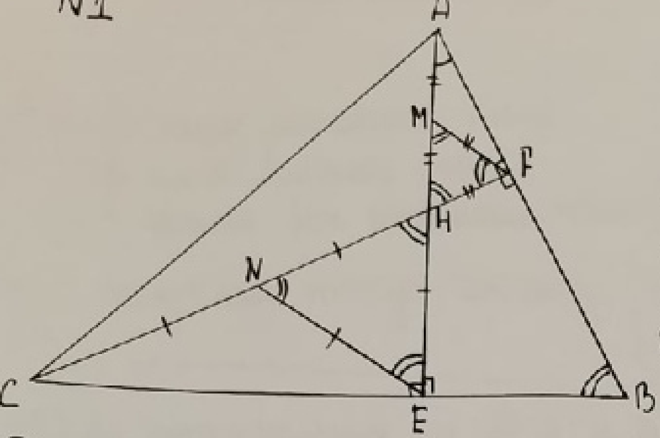
$x=\frac{2a^2+1}{a}=2a+\frac{1}{a}$

$2a+\frac{1}{a}>3$

211007735 (U312705 M1273163)

Чистовик (1)

N1



Дано: CF и AE – высоты; FM и EN – медианы; $FM=1$; $EN=4$; $FM \parallel EN$

Найти: $\angle ABC$; S_{ABC}; R – ?

Решение:

1) Т.к. NE и FM – медианы, проведенные из вершины прямого угла к гипотенузе, то: $CN = NH = NE = 4$ и $HM = AM = MF = 1$;

2) $\angle NHE = \angle FHM$ – вертикальные; $\angle MHF = MFH$ и $\angle NHE = \angle NEH$ – углы при основании в равнобедренных треугольниках $\triangle MHF$ и $\triangle NHE$ соответственно;

3) Т.к. $FM \parallel EN$, то: $\angle FMH = \angle HEN$, $\angle ENH = \angle MFH$ – внутренние накрест лежащие $\Rightarrow$ $\triangle NHE$ и $\triangle MHF$ – равносторонние

4) В $\triangle AHF$, $\angle HAF = 30°$, т.к. катет, лежащий напротив угла $30°$ равен $\frac{1}{2}$ гипотенузы;

5) Тогда из $\triangle AEB$ следует: $\angle ABC = 90° - 30° = 60°$

6) По теореме Пифагора для $\triangle AHF$: $AF = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$;

7) $\triangle AHF \sim \triangle ABE$ по двум углам $\Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = AH \cdot \frac{AE}{AF} = 2 \cdot \frac{1+1+4}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$;

8) $S_{ABC} = \frac{1}{2} CF \cdot AB = \frac{1}{2}(4+4+1) \cdot 4\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$

9) По теореме Пифагора для $\triangle AFC$: $AC = \sqrt{3 + 9^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$;

10) По теореме синусов для $\triangle ABC$: $R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2\sqrt{21}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{7}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$; $R = 2\sqrt{7}$

Чистовик (2)

№2

Пусть a - самое маленькое число;
b - самое большое число;
S - сумма всех остальных чисел (кроме a и b)

Тогда получаем такую систему: $\begin{cases} 35a+b+S=592 \\ 16b+a+S=592 \end{cases}$ $\ominus \Rightarrow 34a-15b=0$, $34a=15b$ | $a=\frac{15}{34}b$, $b=\frac{34}{15}a$

Т.к. числа натуральные, то: $b \vdots 34$ и $a \vdots 15$. Если взять $b>34$, хотя бы $\overset{34\cdot 2}{68}$, то: $16\cdot 68+a+S=592$

$1088+a+S=592$ - такого быть не может, т.к. $a, S \in N$. Значит b может равняться <u>только</u> 34. $\Rightarrow a=\frac{15}{34}b=15$. ~~Получается на доске написаны a, b~~

Найдём S: $16\cdot 34+15+S=592 \Rightarrow S=592-(544+15)=33$. Сумма остальных написанных чисел равна ~~34~~ 33. Т.к. самое маленькое число на доске 15 и числа не могут повторяться, то написаны могут быть либо просто число 33, либо два числа: 16 и 17. При других разложениях на слагаемые, хотя бы одно будет меньше либо равно 15, что противоречит условию.

Ответ: 34, 15, 33 и 34, 15, 16, 17.

Чистовик 3

N3

$\cancel{3a}$ $a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^2+1=0$

$a^2x^2-2x(2a^3+a)+a^2y^2+2a^2y=-1-4a^2$

$a^2x^2-2ax(2a^2+1)+a^2y^2+2a^2y=-1-4a^2$

$(ax-2a^2-1)^2-(2a^2+1)^2+(ay+a)^2-a^2=-1-4a^2$

$(ax-2a^2-1)^2+(ay+a)^2=(2a^2+1)^2-1-3a^2=2a^2(2a^2+2)-3a^2=4a^2(a^2+1)-3a^2=a^2(a^2+4-3)=$

$\cancel{(ax-2a}^2-$

$=a^2(a^2+1)$

~~все все~~ всегда $+$

Координаты точки B: $(2a^2+1; \ldots)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007735**

ID профиля: **312705**

Вариант 16

Черновик 1

16 18

10

14

$2x^2+2y^2-x^2y^2=2$ $\frac{1}{2}x^2y^2=x^2+y^2-1$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19$ $2\cdot 8-x^2y^2=2$

$x^2y^2=14$

$x^4+y^4-x^2-\cancel{y}^2=18$

$x^2(x^2-1)+y^2(y^2-1)=18$ $x^2+y^2=8$ $x^2=u$

$y=v$

$\cancel{(x^2+y^2)}^2$ $(x^2+y^2)^2$ $\cancel{(x^2-y^2)^2-x^2-x^2=18}$ $x^2\cdot y^2=14$

$(x^2+y^2)^2-5(x^2+y^2-1)=19$ $x^2+y^2=a$ $\begin{cases}u+v=8\\ v\cdot u=14\end{cases}$ $vu\cdot(8-u)=14$

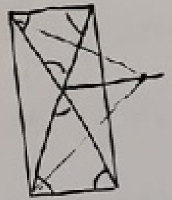
$u^2-8u+14=0$

$a^2-5a-24=0$ $u=$

$(a-8)(a+3)=0$

$a=8;\ -3$ ← п.к. т.к. квадрат

$x^2y^2=2x^2+2y^2-2$ $\frac{1}{2}x^2y^2=x^2+y^2-1$



15

$y=120-m$

$\begin{cases}2x^2+2y^2-x^2y^2=2\\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19\end{cases}$ $(x^2+y^2)^2-2{,}5x^2y^2=19$

$\cancel{(x^2+y^2)^2-5x^2+5y^2}$

$(x^2+y^2)^2-5(x^2+y^2)=14$

$x^2+y^2=a$

$a^2-5a-14=0$

$(a-7)(a+2)$

$x^2+y^2=7$

$14-x^2y^2=2$ | $x^2=t$

$x^2y^2=12$ | $y^2=k$

$\begin{cases}t+k=7\\ t\cdot k=12\end{cases}$ => $t(7-t)=12$

$t^2-7t+12=0$

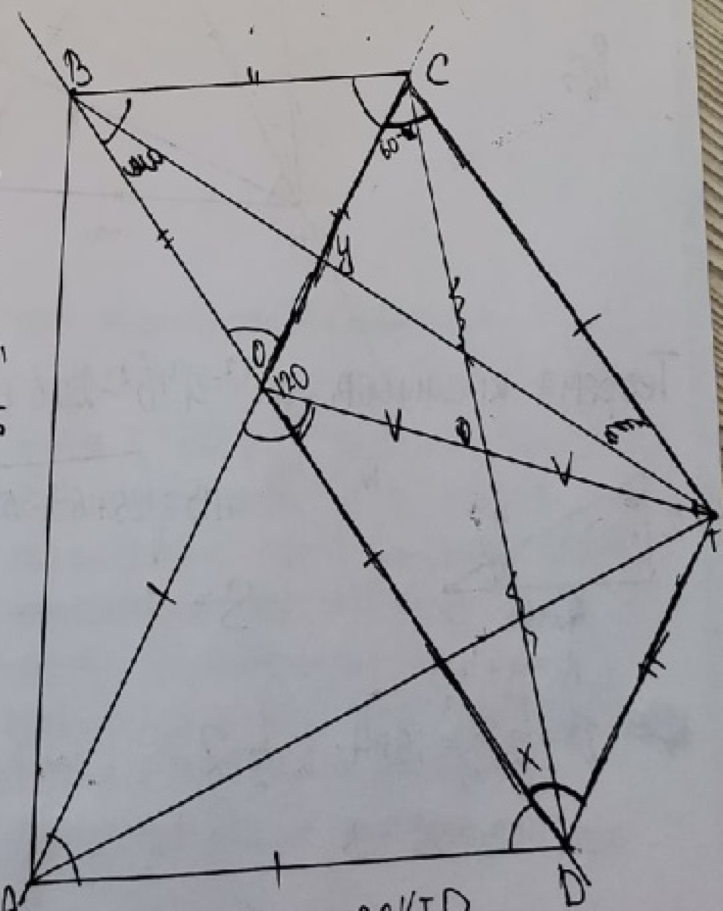
$(t-3)(t-4)=0$

$t=3;\ 4$

$x=\pm\sqrt{3};\ \pm 2$

$\pm 2;\ \pm\sqrt{3}$

$16\cdot 16+16\cdot 15+9\cdot 16+16$

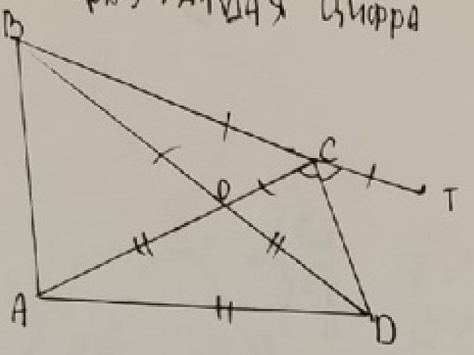


AC ∥ TP

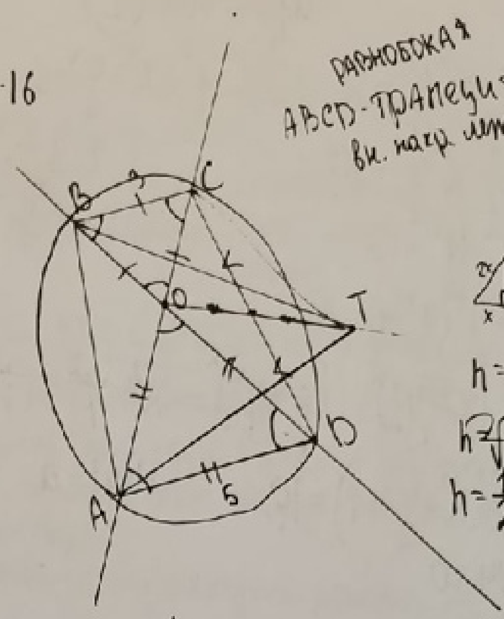
211007735 (U312705 M1273164)

Черновик ②

1 раз каждая цифра



16·16



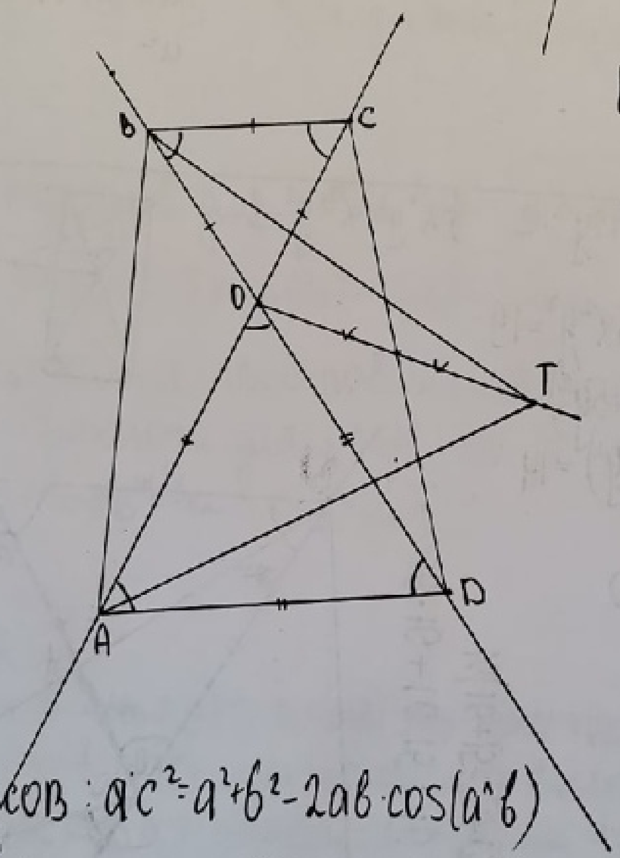
РАВНОБОКАЯ
ABCD-ТРАПЕЦИЯ
вп. накр. лит.

$\frac{3}{4}a^2$

$h = a^2 - \frac{1}{4}a^2$

$h^2\sqrt{\ }$

$h = \frac{1}{2}a\cdot\sqrt{3}$



h=

$h = \frac{1}{2}7\cdot\sqrt{3}$

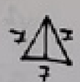
$S_{тр} = \frac{5+3}{2}\cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

$7^2 - 1 = 48 = 4\sqrt{3}$

7

$\frac{S_\delta}{S_{тр}} = \frac{7\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 4\sqrt{3}} = \frac{7}{8}$

$\frac{2}{4\sqrt{3}}$



5·8

$h = \sqrt{7^2 - \frac{7^2}{4}} =$

$= \frac{7^2}{4}\ 7^2\cdot\frac{3}{4}$

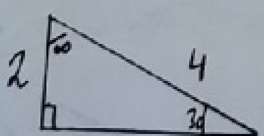
$\frac{1}{2}7\sqrt{3} = 3{,}5\cdot\sqrt{3}$

Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(a^\wedge b)$

16

$AB = \sqrt{25 + 64 - 5\cdot 8} = 7$

S =



$16 = 4 + 4\cdot 3$

$c^2 = a^2 + b^2 - ab\cdot\cos(a^\wedge b)$

$c = \sqrt{25 + 64 - 10} = \sqrt{69}$

89

$2^2 = (2\sqrt{3})^2 = 16 + 4 - 8\cdot\frac{1}{2}\cdot 2$

$4\cdot 3 = 20 - 8$

$\frac{3+5}{2}\cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

$\frac{7\sqrt{3}}{32\sqrt{3}} = \frac{7}{32}$

211007735 (U312705 M1273164)

Чистовик 1

№4

$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y^2=2x^2+2y^2-2 \\ (x^2+y^2)^2-2{,}5x^2y^2=19 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2y^2=x^2+y^2-1$, подставляем это во 2-ое:

$(x^2+y^2)^2-5(x^2+y^2-1)=19 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2-5(x^2+y^2)=14$

$x^2+y^2=t$

$t^2-5t-14=0$

$(t-7)(t+2)=0$

$t=7;\ -2$ ← посторонний корень, т.к. x^2+y^2 не может быть отрицательным

$2(x^2+y^2)-x^2y^2=2 \Rightarrow x^2y^2=2(x^2+y^2)-2=2\cdot 7-2=12$. Получаем систему:

$\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ x^2\cdot y^2=12 \end{cases}$ Пусть $x^2=a$, $y^2=b$ $\Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \Rightarrow b=7-a \\ ab=12 \end{cases} \Rightarrow a(7-a)=12$

$a^2-7a+12=0$

$(a-3)(a-4)=0 \Rightarrow a=3;4 \Rightarrow$

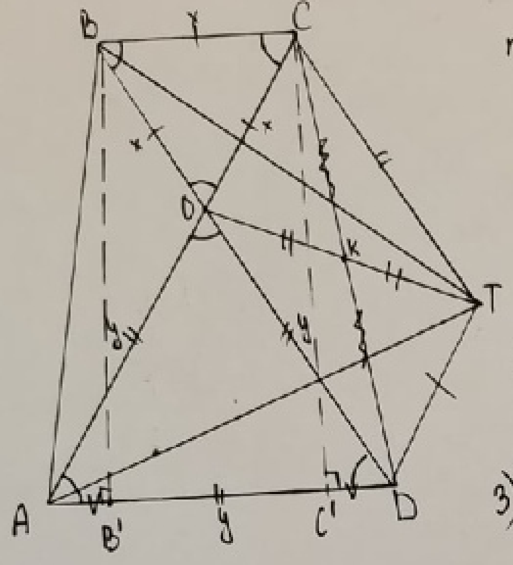
$\Rightarrow x^2=3$ $\qquad \Rightarrow x^2=4$

$x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow y=\pm 2$ $\qquad x=\pm 2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(\sqrt{3};2)$; $(-\sqrt{3};2)$; $(\sqrt{3};-2)$; $(-\sqrt{3};-2)$; $(2;\sqrt{3})$; $(-2;\sqrt{3})$; $(2;-\sqrt{3})$; $(-2;-\sqrt{3})$.

Чистовик (2)

N6



Дано: $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные; т.T симметрична точке O отн. т.K, где $CK=KD$.

а) док-ть, что $\triangle ABT$ - правильный

б) $BC=3$; $AD=5$. Найти $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

б) 1) Т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные, то $\angle OBC = \angle BCA = \angle BOC = \angle AOD = \angle BDA = \angle CAD = 60^\circ$.

2) Заметим, что $\angle DAC$ и $\angle BCA$ - внутренние накр. лежащие, а так как они равны, то $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ - трапеция

3) Т.к. диагонали трапеции равны $AC = \cancel{xy}\, x+y$, $BD = y+x$, то это равнобокая трапеция.

4) По теореме косинусов для $\triangle ABD$: $AB = \sqrt{5^2+(5+3)^2-2\cdot 5(5+3)\sin\angle BДА} = \sqrt{25+64-80\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$. Т.к. $\triangle ABT$ - правильный, то $S_{ABT} = \cancel{7}\,\frac{1}{2}\,7\sqrt{3} = 3{,}5\sqrt{3}$.

5) BB' и CC' - высоты; т.к. $ABCD$ - равнобокая трапеция, то $AB' = C'D = \frac{5-3}{2} = 1$

6) По теореме Пифагора для $\triangle ABB'$: $BB' = \sqrt{7^2-1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$;

7) Тогда $S_{ABCD} = \frac{5+3}{2}\cdot BB' = 4\cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

8) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{3{,}5\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} = \frac{7}{32}$

а) ~~1) Т.к. диагонали в чет OCTD равны, то это параллелограмм =>~~

~~2)~~ 1) Т.к. диагонали в OCTD пересекаются и делятся по полам (по условию $CK=KD$, $OK=KT$) то ~~OCTD~~ OCTD - параллелограмм $\Rightarrow BD \parallel CT$. и $OC=TD$ и $OD=CT$,

2) Заметим, что BCTD - равнобокая трапеция, т.к. $BD \parallel CT$ и $BC=TD \Rightarrow$ её диагонали равны: $BT=CD$, заметим также, что $CD=AB$ (доказано выше)

3) ~~Рассмотрим ACTD. Это равнобокая трапеция т.к. AC∥TD~~ ~~Аналогично доказываем с трапецией ACTD. И получаем, что~~ Т.к. OCTD - пар-м, то $CT=OD$. Аналогично доказываем, что ACTD - равнобокая трапеция и получаем: $CD=TA$ (диагонали трапеции равны)

4) Получается, что $CD=AB=TA$, а т.к. ABCD - равнобокая трапеция, то $AB=AT=BT \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный Ч.Т.Д.