Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007392**

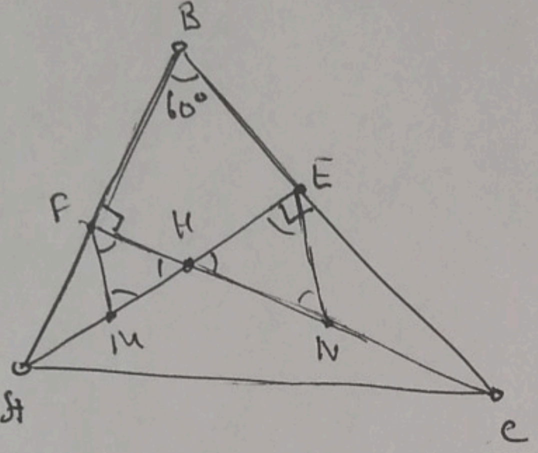
ID профиля: **807646**

Вариант 16

Чистовик

Математика, 9кл
16 вариант

Задача 1.



По св-вам прямоуг. треуг-ка:

Для △AFH: $1 = FM = AM = MH$ ⇓ $\angle FHM = \angle HFM$

Для △EHC: $4 = EN = HN = NC$ ⇓ $\angle EHN = \angle HEN$

Углы $\angle FHM = \angle EHN$, как верт.

$\angle FMH = \angle HEN$ и $\angle HFM = \angle HNE$ из $FM \parallel EN$.

С учётом вышесказанного, получим, что

$\underbrace{\angle HFM = \angle FMH = \angle MHF}_{\text{Сумма } 180°} = \underbrace{\angle HEN = \angle HNE = \angle EHN}_{\text{Сумма } 180°}$

⇓

Все эти углы равны по 60°.

Т.к. $\angle BFH + \angle BEH = 90° + 90° = 180°$, то BFHE - вписанный, значит, $\angle FBE = 180° - \angle FHE = \angle EHN = 60° \Rightarrow \boxed{\angle ABC = 60°}$

~~$AH = 2FM = 2 \cdot 1 = 2$~~ ~~$HC =$~~

Т.к. все углы △FMH и △HEH равны, они равносторонние:

$FH = FM = 1$ ~~$HC = 2EN = 2 \cdot 4 = 8$~~

$HC = 2 \cdot EN = 2 \cdot 4 = 8$ ⇓

$HE = EN = 4$

$AH = 2 \cdot FM = 2 \cdot 1 = 2$ ⇓

CF ~~AE~~ $= 8 + 1 = 9$

$AE = 4 + 2 = 6$

BC ~~AB~~ $= \frac{FC}{\sin 60°}$ ~~$\frac{AE}{}$~~ $= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 9 = 6\sqrt{3}$

$AB = \frac{AE}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 6 = 4\sqrt{3}$

1

211007392 (U807646 M1273587)

$S_{\triangle ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC) = 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$

$\boxed{S_{\triangle ABC} = 36\sqrt{3}}$

Задача 1. Продолжение.

По т. косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(60°) = AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC = (6\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 -$
$- (6\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{3}) = 36 \cdot 3 + 16 \cdot 3 - 24 \cdot 3 = 52 \cdot 3 - 24 \cdot 3 = 28 \cdot 3 = 4 \cdot 21$

$AC = 2\sqrt{21}$

По т. синусов:

$2R = \frac{AC}{\sin(60°)} = \frac{2\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{7}$

$\boxed{R = 2\sqrt{7}}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 36 \cdot \sqrt{3}$; $R = 2\sqrt{7}$

Чистовик

Математика, 9кл
16 вариант

Задача 2.

Пусть самое маленькое число - A, самое большое - B, а сумма всех остальных - S

Тогда, условие задачи можно записать так:

$35A+S+B = A+S+16B = 592$

$35A+B = A+16B$

$34A = 15B$

$\Downarrow$

$A \vdots 15;\ B \vdots 34$

Пусть:

$A=15n \quad B=34m \quad (m,n \in \mathbb{N})$

Тогда, если $n \geq 2$, то

$35A \geq 35\cdot15\cdot2 \geq 1050 > 592$, слишком много

Если $m \geq 2$, то:

~~$16B \geq 16\cdot2\cdot34 \geq 15\cdot2\cdot34 = 30\cdot34 =$~~

$16B \geq 16\cdot2\cdot34 > 15\cdot2\cdot30 = 30^2 = 900 > 592$, слишком много

$\Downarrow$

$A=15 \quad B=34$

$\Downarrow$

$S = 592-35A-B = 592-35\cdot15-34 = 592-525-34 =$
$= 592-559 = 33$

~~Пусть все числа на доске в порядке возрастания~~

Если всего чисел на доске больше, чем 4, то $S>15\cdot3=45>33$ (A-наименьшее), не может быть.

Значит, либо чисел на доске 3 (15; 33; 34), либо 4.

3

Если меньшее из чисел, входящих в S больше 16, то $S>16+17=33$, не может быть

Чистовик

Математика, 9кл
16 вариант

Задача 2. Продолжение.

Значит, одно из этих чисел 16, тогда второе − 33−16=
=17.

Таким образом, на доске могуть быть
записаны только числа:

15; 33; 34 или 15; 16; 17; 34

Ответ: (15; 34; 33) и (15; 16; 17; 34) с точностью
до перестановки.

211007392 (U807646 M1273587)

Чистовик

Математика, 9кл
16 вариант

Задача 3.

$5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y = 0$ – ур-е 1 из условия

$(4a^2 + y^2 + 4ay - 4ax - 2xy + x^2) + (a^2 + 2ay + y^2) = 0$

$(x^2 - 2x(2a+y) + (2a+y)^2) + (a+y)^2 = 0$

$(x - 2a - y)^2 + (a+y)^2 = 0$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x - 2a - y = 0 \\ a + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x - a = 0 \Rightarrow x = a$

Итак, $x_A = \cancel{A}\ a$.

Уравнение для точки B:

$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$

$a \neq 0$, т.к. если $a = 0$, то $1 = 0$ – противоречие.

Разделим всё на $a^2 \neq 0$:

$x^2 + y^2 - 2x\left(2a + \frac{1}{a}\right) + 2y + 4a^2 + \frac{1}{a^2} = 0$

$(y+1)^2 - 1 + \left(x - 2a - \frac{1}{a}\right)^2 - \left(2a + \frac{1}{a}\right)^2 + 4a^2 + \frac{1}{a^2} = 0$

$(y+1)^2 + \left(x - 2a - \frac{1}{a}\right)^2 \cancel{+3=0} - 5 = 0$

$x_B = -2a - \frac{1}{a}$

Т.к. A и B лежат по разные стороны от $x = 3$, то:

$(3 - x_A)(3 - x_B) < 0$ (один из множителей будет отрицателен, другой – положителен)

I

$\cancel{(x^2 + y^2 + a^2)^2 = x^2 +}$

$(x - y - 2a)^2 = \underline{x^2} - \underline{2xy} + \underbrace{y^2 + 4ay + 4a^2} - \underline{4ax}$

$y^2 + 2ay + a^2$

$(Ax + By + Ca)^2 + (Dx + Ey + Fa)^2 = 0$

$A^2 + D^2 = 1$

$AB + DE = 2$

$3a + 2a^2 + 1 = 0$

$a = -1$

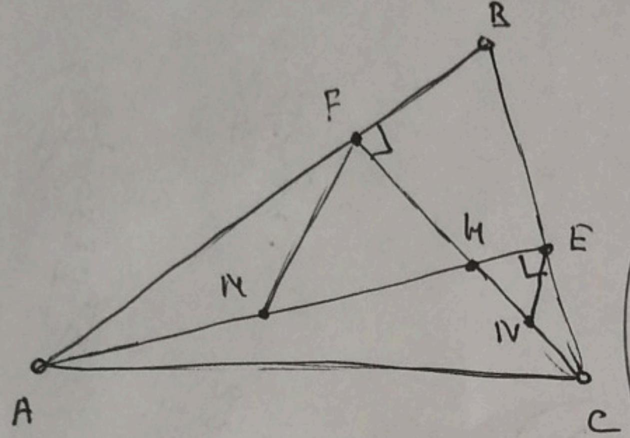
$a = \cancel{\frac{-3}{2}} - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} + 1$

~~Чистовик~~

Черновик

Задача 1.



$a=0$:

$x^2-2xy+2y^2=0$

$(x-y)^2+y^2=0$

$x=1 \quad y=0$

$a=1$:

$5-4x+6y+x^2-2xy+2y^2=0$

$$5-4x+6y+x^2-2xy+2y^2=0$$

$$35\cdot 30=\frac{1050}{2}=525$$

$\frac{x}{a}=A \qquad \frac{y}{b}=B$

$$\begin{cases} EF=-2 \\ CD=3 \\ AB=-1 \\ A^2+E^2=\cancel{1} \\ D^2+F^2=5 \\ B^2+C^2=\cancel{\ } \end{cases}$$

$(A+B)^2+E^2+C^2=1$

$\cancel{(A-B)^2+E^2+C^2=5}$

$(E+C)^2$

$S: \frac{a}{x} \quad \frac{a}{b}$

$5AB-4B+6A+\cancel{\left(\frac{a}{b}\right)^2}\ \left(\frac{B}{a}\right)^2$

$5 - 4x$

$5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$t = x - 3$

$5a^2 - 4a(t+3) + 6ay + t^2 + 2t + 1 - 2ty - 6y + 2y^2 = 0$

$-4at - 12a$

$5a^2 \; -t(2a-1) + 6y(a-1) + t^2$

$(x+2a)^2 + a^2 + 6ay - 2xy$

$\frac{1}{2}(x^2 - 4xy$

$y = \alpha x$

$\frac{2}{4}(y^2 - 4xy + 4x^2)$

$\frac{3}{4}\cancel{(x^2 - 2 \cdot \frac{8}{3}}$

$\frac{2}{3}y^2$

$\cancel{\frac{1}{4}(x^2 - 8xy + 16y^2}$

$\frac{4}{3}y^2$

$\frac{3}{4}\left(x^2 - 2\left(\frac{4}{3}xy\right) + \left(\frac{4}{3}y\right)^2\right)$

Чистовик

Математика, 9 кл
16 вариант

Задача 3. Продолжение

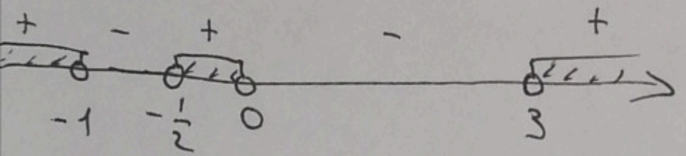
$$\left(3+2a+\frac{1}{a}\right)\cdot(3-a)<0$$

$$\frac{1}{a}\left(2a^2+3a+1\right)(3-a)<0$$

$$2a^2+3a+1=2a(a+1)+(a+1)=(2a+1)(a+1)=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2}\right)(a+1)$$

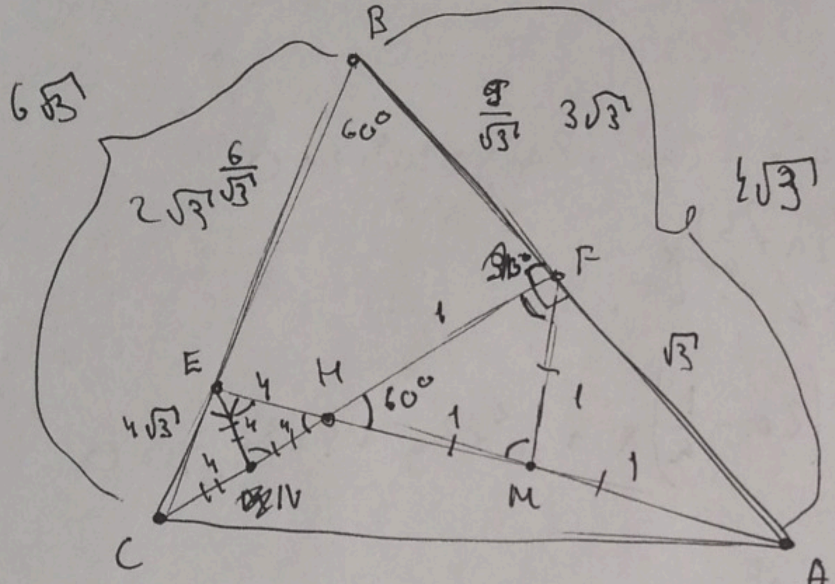
$$\frac{1}{a}\left(a+\frac{1}{2}\right)(a+1)(3-a)<0$$

$$(a-3)\cdot(a+1)\left(a+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}>0$$



$$a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(3;+\infty)$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(3;+\infty)$.



$$6\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}\cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3} =$$

$$= 6\cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

$$5a^2-4ax+6ay-2xy+x^2+2y^2=0$$

$$\cancel{(x-y)^2 = 0}$$

$$\frac{1}{2}(x^2+4xy+$$

$$\frac{3}{4}(x^2+$$

$5a^2-4ax+6$ Черновик

$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0$

$\cancel{\left(4a-\frac{2}{a}\right)x}$

$x^2-2\left(2a-\frac{1}{a}\right)x+y^2+2y+4a^2+\frac{1}{a^2}=0$

$\left(x\cancel{^2}-2a+\frac{1}{a}\right)^2+(y+1)^2+4a^2+\frac{1}{a^2}-1-\left(2a-\frac{1}{a}\right)^2=$

$=T+4a^2+\frac{1}{a^2}-1+4-4a^2-\frac{1}{a^2}=$

$=T+3=0$ $\left(\frac{1}{a}-2a-3\right)$

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

$\cancel{(x-y)}$

$\cancel{(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma y+\delta a)}$

$(Ax+By)^2+(Cy+Da)^2+(Ex+Fa)^2+Q\cdot a^2$

$$\begin{cases} EF=-2 \\ CD=3 \\ AB=-1 \\ A^2+E^2=1 \\ B^2+C^2=2 \\ D^2+F^2 \cancel{+\ldots=2} \\ =5 \end{cases}$$

$\cancel{(A-B)^2+(B-C)^2}$

$(A-B)^2+(C-D)^2+(E-F)^2=8$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007392**

ID профиля: **807646**

Вариант 16

Математика, 9кл
16 вариант

Чистовик

Задача 4.

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$\cancel{2(x^4-x^2+y^4-y^2)=2\cdot 19-2}$$
$$\cancel{x^4-x^2+y^4-y^2=18}$$

Пусть $x+y=a$; а $xy=b$, тогда:
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=$$
$$=(a^2-2b)^2-2b^2$$

Значит:
$$\begin{cases} 2(a^2-2b)-b^2=2 \\ (a^2-2b)^2-2b^2-\frac{1}{2}b^2=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a^2-2b)-b^2=2 \\ 2(a^2-2b)^2-5b^2=38 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} 2a^2-4b-b^2-2=0 \end{cases}}$$

Пусть $a^2-2b=u$, тогда:
$$\begin{cases} 2u-b^2=2 \Rightarrow u=\frac{2+b^2}{2} \Rightarrow u^2=\left(\frac{2+b^2}{2}\right)^2 \\ 2u^2-5b^2=38 \end{cases}$$

$$\cancel{2\left(\frac{2+b^2}{2}\right)^2-5b^2=38}$$
$$\Downarrow$$
$$2u^2-10u=28 \Rightarrow u^2-5u-14=0 \Rightarrow u^2+(2-7)u+(-2)\cdot 7=0$$
$$\Downarrow$$
из т. Виета корни 7 и (-2)

$u_1=7$ $\quad u_2=-2$

Случай 1:
$$2\cdot 7-b^2=2$$
$$b^2=2\cdot 6=4\cdot 3$$
$$b=\pm 2\sqrt{3}$$

Случай 2:
$$2\cdot(-2)-b^2=2$$
$b^2<0$, не может быть

Чистовик

Задача 4. Продолжение

$$a^2 \pm 2\sqrt{3} = 7$$

$$a^2 = 7 \mp 2\sqrt{3}$$

$$a = \pm\sqrt{7 \mp 2\sqrt{3}} = \pm\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2 \mp 2\cdot\sqrt{3}\cdot 2} = \pm\sqrt{(2 \mp \sqrt{3})^2} = \pm|2 \mp \sqrt{3}|$$

Итак,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2+\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2-\sqrt{3} \\ b = -2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a = \sqrt{3}-2 \\ b = -2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2-\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \underset{\text{для } x \text{ и } y}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y = 2+\sqrt{3} \\ xy = 2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = 2-\sqrt{3} \\ xy = -2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = \sqrt{3}-2 \\ xy = -2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = -2-\sqrt{3} \\ xy = 2\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

~~При решении каждой~~

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftarrow$$

Знаки "±" в данной системе независимы

ОТВЕТ: $(\pm 2, \pm\sqrt{3})$; $(\pm\sqrt{3}; \pm 2)$, знаки "±" независят друг от друга

211007392 (U807646 M1273588)

Математика, 4ка
16 вариант

Чистовик

Задача 4. Продолжение

$$a^2 \pm 2\sqrt{3} = 7$$

$$a^2 = 7 \mp 2\sqrt{3}$$

$$a = \pm\sqrt{7 \pm 2\sqrt{3}} = \pm\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2 \pm 2\cdot\sqrt{3}\cdot 2} = \pm\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})^2} = \pm|2 \pm \sqrt{3}|$$

Итак,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2+\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2-\sqrt{3} \\ b = -2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a = \sqrt{3}-2 \\ b = -2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2-\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \underset{\text{для } x \text{ и } y}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y = 2+\sqrt{3} \\ xy = 2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = 2-\sqrt{3} \\ xy = -2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = \sqrt{3}-2 \\ xy = -2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = -2-\sqrt{3} \\ xy = 2\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

~~При решении каждой~~

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftarrow$$

Знаки "±" в данной системе независимы

ОТВЕТ: $(\pm 2, \pm\sqrt{3})$; $(\pm\sqrt{3}; \pm 2)$, знаки "±" независят друг от друга

211007392 (U807646 M1273588)

Математика, 9кл
16 вариант

Чистовик

Задача 5.

Пусть числа на карточках — (A;A) и (B;C)
Для любых чисел ~~A и B~~ существует
15 возможных вариантов для B и C
(16 чисел кроме A), всего вариантов для
A — 16, откуда ответ: $16\cdot15^2=(4\cdot15)^2=60^2=3600$

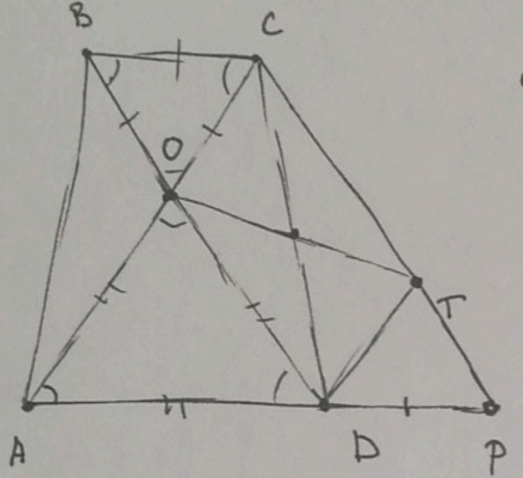
ОТВЕТ: 3600

211007392 (U807646 M1273588)

3. Чистовик

Математика, 9кл
16 вариант

Задача 6.



а) Т.к. $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ - правильные, то:

$\angle CBD = \angle ADB \Rightarrow AD \parallel BC$

OCTD центрально симметричен, значит является пар-мом.

$\angle COD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\angle OCT = 180^\circ - \angle COD = 60^\circ$

~~OD = OA = CT~~

$OA = OD = CT$

При повороте на 60° отн. точки B:

$BO = BC \Rightarrow BO \to BC$

$\angle BOA = \angle BCT = 120^\circ \Rightarrow \angle BOA \to \angle BCT$

$OA = CT \Rightarrow OA \to CT$

$\Downarrow$

$\triangle BOA \to \triangle BCT$

$\Downarrow$

$AB \to BT$

$\Downarrow$

$AB = BT$ и $\angle ABT = 60^\circ$, значит, $\triangle ABT$ - правильный.

б) Продолжим CT и AD до пересечения в точке P.

$\angle CAP = \angle ACP = 60^\circ \Rightarrow \triangle ACP$ - правильный $\Rightarrow AC = AP \Rightarrow$

$\Rightarrow AC - OA = AP - AD \Rightarrow DP = OC = BC = 3 \Rightarrow \triangle DCP$ и $\triangle ABC$ имеют одинак. основания и высоты, их площади совпадают

$AP = 5 + 3 = 8$

$\Downarrow$

$S_{ABCP} = S_{APC}$

4

211007392 (U807646 M1273588)

Вх ЗЗ2 Чистовик Математика 9кл
16 вариант

Задача 6. Продолжение.

По т. косинусов:

$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos 60^\circ = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 9 + 25 - 15 = 19$

$\triangle ABT \sim \triangle ACP$ (т.к. они оба правильные)

$\Downarrow$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ACP}} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{19}{8^2} = \frac{19}{64}$

$\Downarrow$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{19}{64}$

Ответ: а) доказан

б) $\frac{19}{64}$

5

211007392 (U807646 M1273588)

Черновик