Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007272**

ID профиля: **193951**

Вариант 16

№3 Черновик

$A_x, A_y: \ 5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = x^2 - 4ax - 2xy + 6ay + 2y^2 + 5a^2 = 0$

$B: \ a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$

$\cancel{x^2 - 4ax + 4a^2 + 2y^2 + 6ay - 2}$

$a^2x^2 - x(4a^3+2a) + a^2y^2 + 2a^2y$

$(4a^2+4ay+y^2)$

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$;

$x^2 - 2x(2a+y) + (2a+y)^2 - (2a+y)^2 + 6ay + 2y^2 + 5a^2$

$(ax)^2 - 2axz + z^2$

$(ax)^2 - 2ax(2a^2+1)$

$(x-(2a+y))^2 - 4a^2 - 4ay - y^2 + 6ay + 2y^2 + 5a^2 = (x-(2a+y))^2 + a^2 + 2ay + y^2 =$

$z = 2a^2+1; \ z^2 = (2a^2+1)^2 = 4a^4 + 4a^2 + 1$

$(ay)^2 + \cancel{2az}\ 2ayz + z^2$

$= (x-(2a+y))^2 + (a+y)^2 = 0$

$(ay)^2 + 2a^2y$

$z = a; \ z^2 = a^2; \ a^2x^2 - x(4a^3+2a) + (4a^4+4a^2+1) - (4a^4+4a^2+1) +$

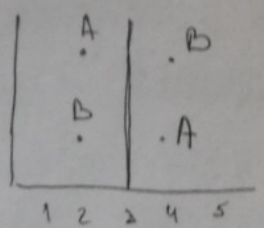
$+ a^2y^2 + 2a^2y + a^2 - a^2 + 4a^4 + 1 = (ax - (2a^2+1))^2 + (ay+a)^2 - 5a^2$

$(ax - (2a^2+1))^2 + (ay+a)^2 = 5a^2$

$x_0 = 2a^2+1; \ y_0 = -a$

$(x-(2a+y))^2 = -(a+y)^2$ – только если оба равны 0, т.е. $a = -y; \ x = 2a + y$

$x = a$



1) $x_A < 3; \ x_B > 3$

$a < 3; \ 2a^2+1 > 3$

$2a^2 - 2 > 0; \ a^2 - 1 > 0$

+ − + ; −1 1

$a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$a \in (-\infty; -1) \cup (1; 3)$

2) $x_A > 3; \ x_B < 3$

$a > 3; \ 2a^2+1 < 3$

$2a^2 - 2 < 0; \ (a-1)(a+1) < 0$

+ − + ; −1 1

$a \in (-1; 1)$

решений нет

$\frac{2a^2 - 3a + 1}{a} > 0 \quad D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$

$1; 2$

$a_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}$

$a_1 = 0{,}5; \ a_2 = 1$

$\frac{(a-0{,}5)(a-1)}{a} > 0$

Черновик

№2

числа различные; $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$; $\cancel{35}\ 34a_1 + sum = 15a_n + sum$

$34a_1 = 15a_n$; $\frac{a_1}{a_n} = \frac{15}{34}$; min: $a_1 = 15$; $a_n = 34$; $\begin{cases} a_1 = 15k \\ a_n = 34k \end{cases}$

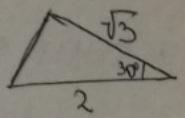
при min:

$34 \cdot 15 = 510$ – остаётся 82, если $k \geq 2$ – нельзя

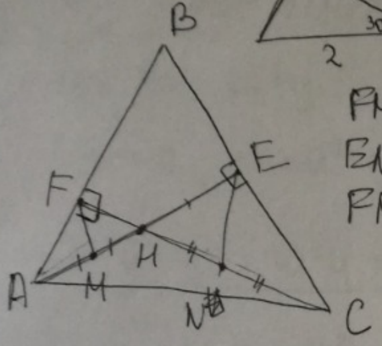
$sum = 82 = a_1 + a_n + \dots$; sum кроме a_1 и a_n равна 33

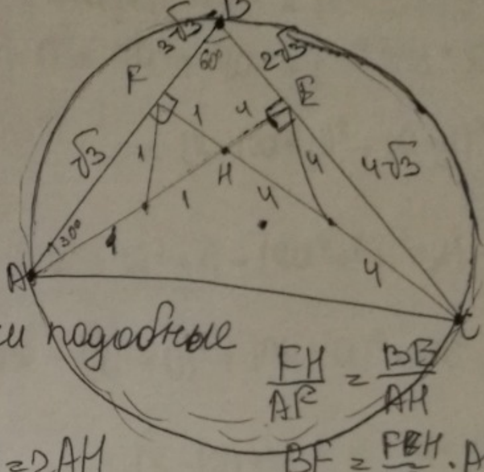
15; 33; 34 или 15; 16; 17; 34

№1



$\cos(60°) = \frac{1}{2}$





$FH = 1$ $\quad 2^2 + 3 - \cancel{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 1$

$EN = 4$ $\quad 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 16$

FH и EN => треугольники подобные

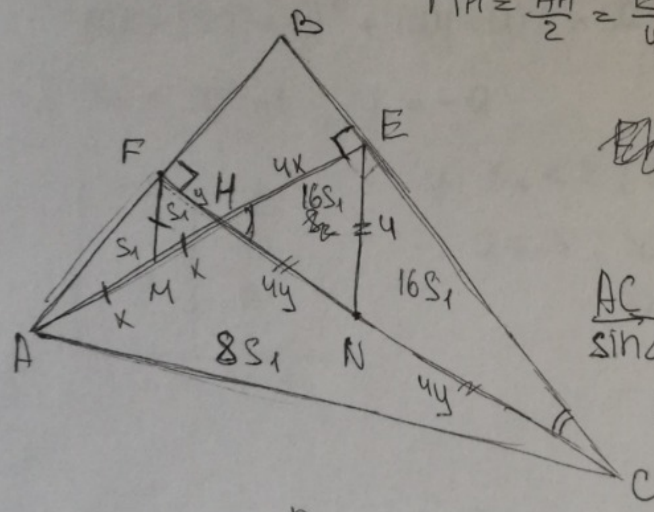
$CH = 4\ \cancel{FH}\ FH$

$MH = \frac{AH}{2} = \frac{EH}{4}$; $EH = 2AH$

$\frac{FH}{AF} = \frac{BE}{AH}$

$BE = \frac{FH}{AF} \cdot AH$

$BE = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6 = \frac{6}{\sqrt{3}} =$



$\cancel{EH}$ $S_{EHC} = EH \cdot h$

$S_{AHC} = AH \cdot h$

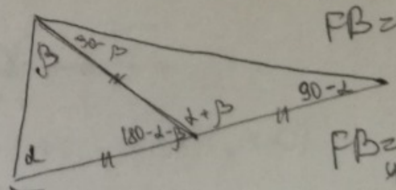
$S_{BHC} = 2S_{AHC} = 2\sqrt{3}$

$\frac{AC}{\sin\angle B} = 2R$

$\frac{EH}{EC} = \frac{FB}{FC}$

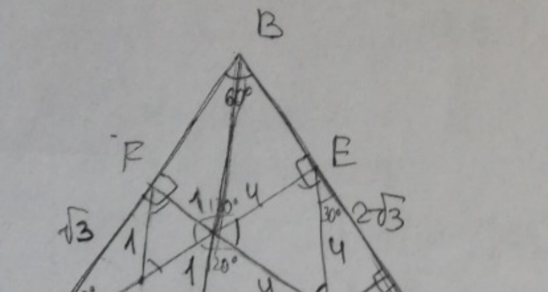
$FB = \frac{EH}{EC} \cdot FC$

$R = \frac{AC}{2\sin\angle B}$



$FB = \frac{4}{4\sqrt{3}} \cdot 9 = 3\sqrt{3}$

$R = \frac{2\sqrt{21}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{7}$



$\sin\angle A = \frac{BK}{AB} = \frac{CF}{AC}$ $\quad BK \cdot AC = AB \cdot CF$

$\sin\angle B = \frac{FC}{BC} = \frac{AE}{AB}$ $\quad FC \cdot AB = AE \cdot BC$

$BK \cdot AC = AE \cdot BC$

$\sin\angle C = \frac{BK}{BC} = \frac{AE}{AC}$ $\quad BK \cdot AC = AB \cdot CF = AE \cdot BC =$ cos

$S = 6 \cdot 6\sqrt{3} = 9 \cdot 4\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$

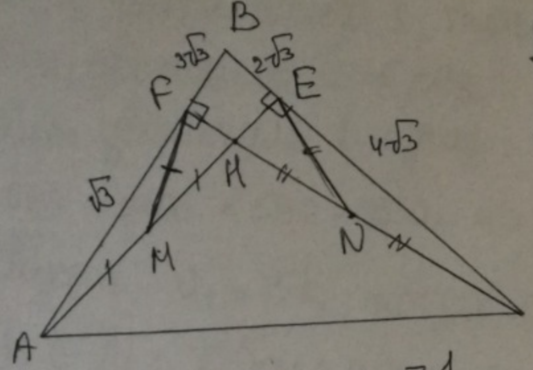
$\cos\angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\,AB\,BC}$

$AC^2 = 48 + 108 - \cancel{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$ $\quad 72$

$AC^2 = 84 \Rightarrow AC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

211007272 (U193951 M1278334)

N1



Дано: $FM = 1$; $EN = 4$; $FM \parallel EN$

Найти: $\angle B$; S_{ABC}; R

FM и EN - медианы, проведённые из прямого угла в прямоугольном треугольнике, значит они равны половине гипотенузы,

т.е. $FM = AM = \underbrace{MH}_{=1}$; $EN = HN = CN = 4$

$FM \parallel EN \Rightarrow \triangle HEN \sim \triangle HMF$ (т.к. $FM \parallel EN$; $\angle MEN = \angle HMF$, $\angle FNE = \angle EMF$; $\angle FHM = \angle NHE$, как вертикальные) $\Rightarrow$

$\frac{FH}{HN} = \frac{MH}{HE} = \frac{FM}{EN} = \frac{1}{4}$; $FH = \frac{1}{4} NH = 1$; $HE = 4MH = 4$

$FH = HM = FM$; $EH = EN = HN$ - треугольники равносторонние, значит все углы в них по $60°$. $\angle FHE = 180° - \angle MHF = 120°$, как смежные. $\angle ABC = 360° - \angle BFH - \angle BEH - \angle FHE = 360° - 180° - 120° = 60°$.

по т. Пифагора: $AH^2 = FH^2 + AF^2$; $AF = \sqrt{AH^2 - FH^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$\triangle FAH \sim \triangle EAB$ ($\angle AFH = \angle AEB$; $\angle FAE$ - общий) $\Rightarrow \frac{FH}{AF} = \frac{BE}{AE}$

$BE = \frac{FH}{AF} \cdot AE = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6 = 2\sqrt{3}$. по т. Пифагора $EC = \sqrt{HC^2 - HE^2} = 4\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{(EC + BE) \cdot AE}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 18\sqrt{3}$ Из подобия $\triangle ECH \sim FCB$ $BF = 3\sqrt{3}$

по т. косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$

$AC = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{3})^2 - \cancel{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

по т. синусов $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2\sqrt{21}}{\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = 2\sqrt{7}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$; $R = 2\sqrt{7}$

Чистовик

№2

Пусть эти числа: $a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_{n-1} < a_n$. Пусть сумма всех чисел равна s, тогда:

1) a_1 увеличили в 35 раз: $34a_1 + s = 592$; $s = 592 - 34a_1$

2) a_n увеличили в 16 раз: $s + 15a_n = 592$; $s = 592 - 15a_n$

$592 - 34a_1 = 592 - 15a_n \Rightarrow 34a_1 = 15a_n$, $\frac{a_1}{a_n} = \frac{15}{34}$

Пусть $a_1 = 15k$, тогда $a_n = 34k$, т.к. все числа натуральные, $k \in \mathbb{N}$; Рассмотрю при каком max k такое возможно:

~~для максим. пусть n=2, тогда~~

~~$a_1 + a_n = 15k + 34k = 49k \leq 592$; $k \leq \frac{592}{49}$~~,

$34a_1 + s = 34 \cdot 15k + s = 592$; $34 \cdot 15k < 592$; $510k \leq 592$; $k \leq \frac{592}{510}$

максимальное натуральное $k = 1$ (при решении второго неравенства будет то же самое).

При $k = 1$: $a_1 = 15k = 15$; $a_n = 34k = 34$

$34a_1 + s = 510 + s = 592$; $s = 82$

s - сумма всех чисел, т.е. в s входит a_1 и a_n.

Сумма чисел, кроме a_1 и a_n равна $s - a_1 - a_n = 82 - 49 = 33$

Все оставшиеся числа должны находиться в диапазоне $(a_1; a_n)$ и быть целыми.

Если осталось одно число, то оно равно 33 и это подходит: 15; 33; 34

Если осталось два числа, то каждое из них больше 15, а минимальное из них меньше, чем половина их суммы, т.е $\min < \frac{33}{2}$, т.е. минимальное число больше 15 и меньше 16,5, целое, значит подходит только 16. В этом случае последовательность: 15; 16; 17; 34

Если чисел m, то минимальное меньше, чем $\frac{33}{m}$ и все они больше 15. Для всех $m \geq 3$ - решений нет.

Ответ: 1) 15; 33; 34 2) 15; 16; 17; 34

№3

Для т. A: $5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2 = x^2-2x(2a+y)+5a^2+6ay+2y^2 =$

$= x^2-2x(2a+y)+(2a+y)^2-(2a+y)^2+5a^2+6ay+2y^2 = (x-(2a+y))^2+a^2+2ay+y^2 =$

$= (x-(2a+y))^2+(a+y)^2=0$; $(x-(2a+y))^2 = -(a+y)^2$ – может быть только если $x-(2a+y)=0$ и $a+y=0$, т.е. $y=-a$; $x=2a+y=a$

Для т. B: $a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1 = a^2x^2-2ax(2a^2+1)+$

$+a^2y^2+2ay\cdot a+4a^4+1 = (ax)^2-2ax(2a^2+1)+(2a^2+1)^2-(2a^2+1)^2+$

$+(ay)^2+2a^2y+a^2-a^2+4a^4+1 = (ax-(2a^2+1))^2+(ay+a)^2-4a^4-4a^2-1-$

$-a^2+4a^4+1 = (ax-(2a^2+1))^2+(ay+a)^2-5a^2$

$(ax-(2a^2+1))^2+(ay+a)^2=5a^2$ $a\neq0$

$a^2\left(x-\frac{2a^2+1}{a}\right)^2+a^2(y+1)^2=5a^2$; $\left(x-\frac{2a^2+1}{a}\right)^2+(y+1)^2=5$

Уравнение окружности: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

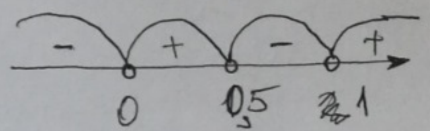
$x_0=\frac{2a^2+1}{a}$; $y_0=-1$

Рассмотрю 2 случая нахождения точек

1) $x_A<3$; $x_B>3$

$x_A=a<3$; $\frac{2a^2+1}{a}=x_B>3$

$\frac{2a^2+1}{a}-3=\frac{2a^2-3a+1}{a}>0$
$a\neq0$



$\begin{cases} a\in(0;0{,}5)\cup(1;+\infty) \\ a<3;\ a\neq0 \end{cases}$

$a\in(0;0{,}5)\cup(1;3)$

2) $x_A=a>3$; $x_B=\frac{2a^2+1}{a}<3$

$\frac{2a^2-3a+1}{a}<0$; $a\neq0$

$\begin{cases} a\in(-\infty;0)\cup(0{,}5;1) \\ a>3;\ a\neq0 \end{cases}$

решений нет

Ответ: $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(1;3)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007272**

ID профиля: **193951**

Вариант 16

Черновик

~~Есть~~ 16^2 карточек

каждое число попадает на 32 карточки

~~на синей~~ дубли у числа одинаковые, т.е. существует 16 различных дублет. Пусть вытащили 2 карточки, ~~первая~~ одна из которых - дубль (А).

~~На А есть 2х число х, на В не должно быть числа х, без х существует $16^2 - 32$ карточки, тогда~~

~~1) дубль не дубль~~ ~~такого~~ х х $\underline{15} \cdot \underline{14} = 15 \cdot 14$ вариантов

30 карточек не дублет, но с х,
31 карточка дубль ~~$16 \cdot 1 = 16$ дублет~~

$\times \frac{16}{16}$ 96, 16, 256, - 210, 46

~~х1 х2 х3 х4 ... хх ... х16~~ ~~$\frac{16 \cdot 31}{2}$~~

~~$\frac{16 \cdot 16}{2}$~~ только 16 дублет

1) дубль не дубль 15·14 вариантов 16 вариантов х 16·15·14

30 с х

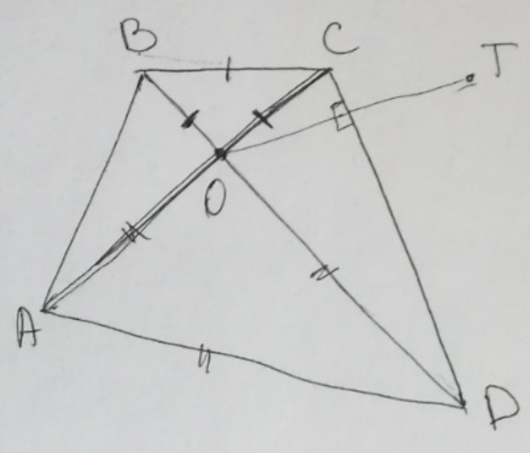
16 дублей

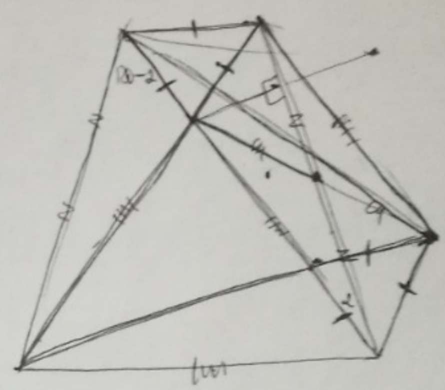
2) дубль дубль хх ·15 · $\frac{16 \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15 =$

29, +120, 58, 29, 3480

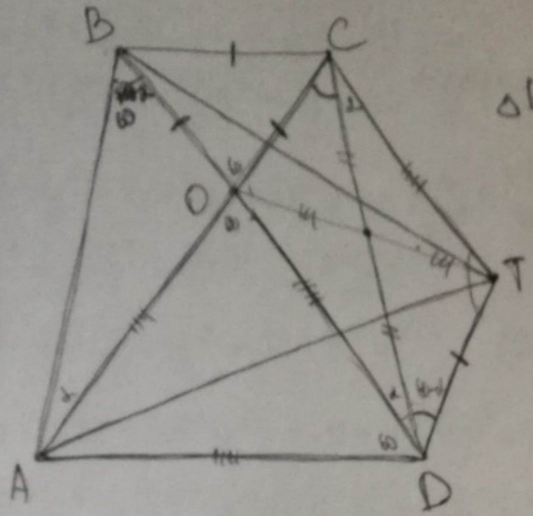
~~Ответ: 15^2 вариантов 16 различных первых~~

Ответ: $16 \cdot 15 \cdot 14 + 8 \cdot 15 = 120 \cdot 29 = 3480$



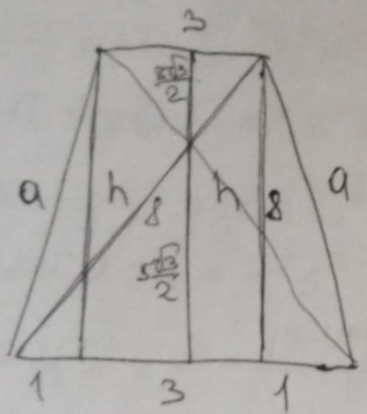


Черновик



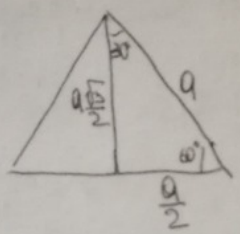
$\triangle BTD = \triangle DCB \Rightarrow BT = CD = AB$

$\triangle ATD = \triangle \cancel{B}CDT \Rightarrow AT = CD = AB$



$h = \sqrt{a^2 - 1}$ $\qquad a = \sqrt{h^2 + 1}$

$S_{тр} = \frac{3+5}{2} \cdot h = 4\sqrt{a^2 - 1} = 4h$



$\frac{a \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}(h^2+1)}{4}$

$16 \cdot 3 = 48;$ $\qquad \frac{49 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 16\sqrt{3}} = \frac{49}{64}$

a

Черновик

$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{x^2y^2}{2}=19 \end{cases}$ $x^2y^2=2x^2+2y^2-2=2(x^4+y^4-19)$

$x^2+y^2-2=x^4+y^4-19$

$x^4-x^2+y^4-y^2-17=0;$

$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19 \end{cases}$ $ab=2a+2b-2$

$a^2-2ab+2ab+b^2-\frac{ab}{2}=(a-b)^2+1{,}5ab=19$

$(a-b)^2+3a+3b-3=19;$

$a(2-b)=2(1-b);\ a=\frac{2(1-b)}{(2-b)};\ \left(\frac{2(1-b)}{2-b}\right)^2+b^2-\frac{(1-b)b}{(2-b)}=19$

$4(1-b)^2+b^2(2-b)^2-(1-b)b(2-b)=19(2-b)^2$

$(2-b)^2(b^2-19)+4(1-b)^2-b(1-b)(2-b)=0$

$D=\cancel{16(1-b)^4+4}\ b^2(1-b)^2-16(1-b)^2(b^2-19)=$

$=(1-b)^2(b^2-16b^2+16\cdot19)=(1-b)^2(16\cdot19-15b^2)$

$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19 \end{cases};$ $a^2-\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{16}+\frac{15b^2}{16}=\left(a-\frac{b}{4}\right)^2+\frac{15}{16}b^2=19$

$\left(a-\frac{b}{4}\right)^2=19-\frac{15}{16}b^2$

$a=\sqrt{19-\frac{15}{16}b^2}+\frac{b}{4};$ $a(2-b)+2b=\left(\cancel{\sqrt{19-\frac{15}{16}b^2}+\frac{b}{4}}\right)$

$\begin{cases} -2a^2-2b^2+ab=38 \\ 2a+2b-ab=2 \end{cases}$ $2a-2a^2+2b-2b^2=40$

$2a(1-a)+2b(1-b)=40$

$a(1-a)+b(1-b)=20$

$\cancel{2a+2ab-2ab+2b=2a(a+b)-2(a}$

$2a-\frac{ab}{2}+2b-\frac{ab}{2}=\cancel{a\left(2-\frac{b}{2}\right)+b\left(2-\frac{a}{2}\right)}$

$a^2+2a+b^2+2b-1{,}5ab=21$

$a(a+2)$

7680

$\times\frac{256}{28}$

~~вытащить 2 карточку, чтобы ≥ 1 дубля~~

~~1) если 1-я - дубль x, то 2-я может быть любая, не содержащая x, т.е. 16^2-32~~

~~$(16^2-32)\cdot32=16(16-2)\cdot16\cdot2=$~~

~~$=16^2\cdot2\cdot14=28\cdot16^2$~~

Черновик

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{x^2y^2}{2}=19 \end{cases}$$

$y^2+y^2-x^2y^2=2-2x^2$

$y^2+y^2(1-x^2)=2(1-x^2)$

$y^2=(2-y^2)(1-x^2)$

$\cancel{x^4+(2-y^2}$

$2y^2-2x^2y^2=2-2x^2$

$y^2(2-x^2)=(2-x^2)-x^2$

$x^2=(2-x^2)(1-y^2)$

$(2x^2+2y^2-x^2y^2)(2x^2+2y^2-x^2y^2)=4x^4+4x^2y^2-2x^4y^2+4x^2y^2+4y^4-$

$-2x^2y^4-2x^4y^2-2x^2y^4+x^4y^4=4x^4+4y^4+8x^2y^2-4x^2y^4-4x^4y^2+x^4y^4$

$$\begin{cases} -5x^2-5y^2+2{,}5x^2y^2=-5 \\ x^4+y^4-0{,}5x^2y^2=19 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2-5(x^2+y^2)=14$

$(x^2+y^2-5)(x^2+y^2)=14$

$$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19 \end{cases}$$

$(a+b)^2 \cancel{-ab\,2} +\frac{3ab}{2}=19$

$(a+b)^2+3a+3b=22$

$2(7-b)^2+2b^2-(7-b)b=38$

$98-28b+2b^2+2b^2-7b+b^2=$

$=38$

$5b^2-35b+60=0$

$b^2-7b+12=0$

$b_1=3;\ b_2=4$

$(a+b)^2-2{,}5ab=19=(a+b)^2-5a-5b+5=19$

$(a+b)^2-5(a+b)=14;\ (a+b-5)(a+b)=14$

$$\begin{cases} -19a-19b+8{,}5ab=-19 \\ a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19 \end{cases}$$

$a(a-19)+b(b-19)+8ab=0$

$a(a+b-19)+b(a+b-19)+6ab$

$x^2=3$

$y^2=4$

$(a+b)(a+b-19)=-6ab;\ a+b<19$

$2\cdot3+2\cdot4-12=2$

$9+16-6=19$

$a^2+b^2+2ab-2{,}5ab=19$

$36+6\cdot18=36\cdot9=(6\cdot3)^2$

$(a+b)^2=19+2{,}5ab;\ 2\sqrt{19+2{,}5ab}-ab=2;\ 4(19+2{,}5ab)=(ab+2)^2$

$4\cdot19+10ab=a^2b^2+4ab+4$

$t^2-6t-4\cdot18=0$

$(a+b)^2=19+2{,}5\cdot12=49$

$a+b=7;\ a=7-b$

$49-14b+b^2+b^2-\frac{7b-b^2}{2}=19$

$t=\frac{6\pm18}{2}$

$2(7-b)+2b-12=2$

$(t-12)(t+6)=0$

$\cancel{14-2b+2b=14}$

$t\geq0$

$t=x^2y^2$

$ab=12$

$(7-b)^2+b^2-\frac{(7-b)b}{2}=19$

Чистовик

№4

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 & (1) \\ x^4+y^4-\frac{x^2y^2}{2}=19 & (2) \end{cases}$$

Пусть $a=x^2$; $b=y^2$, тогда $a\geq 0$; $b\geq 0$

(2): $x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2-\frac{x^2y^2}{2}=(x^2+y^2)^2-2{,}5x^2y^2=19$

$(x^2+y^2)^2=19+2{,}5x^2y^2$

(1): $2x^2+2y^2=2+x^2y^2$; $(2x^2+2y^2)^2=(2+x^2y^2)^2$; $4(x^2+y^2)^2=(2+x^2y^2)^2$

$4\cdot(19+2{,}5x^2y^2)=4+4x^2y^2+x^4y^4$; $4\cdot 18+10x^2y^2=4x^2y^2+x^4y^4$

$x^4y^4-6x^2y^2-4\cdot 18=(x^2y^2-12)(x^2y^2+6)=0$

$(x^2y^2)_1=12$; $(x^2y^2)_2=-6$, т.к. $x^2y^2\geq 0$ подходит только 1-й корень $\Rightarrow x^2y^2=12$, тогда

$(x^2+y^2)^2=19+2{,}5\cdot 12=49$, т.к. $x^2+y^2\geq 0$ подходит $x^2+y^2=7$, тогда $x^2=7-y^2$. подставлю в (2):

$(7-y^2)^2+y^4-\frac{(7-y^2)y^2}{2}=19$; $2(7-y^2)^2+2y^4-(7-y^2)y^2=38$

$98-28y^2+2y^4+2y^4-7y^2+y^4=38$; $5y^4-35y^2+60=0$

$y^4-7y^2+12=0$. по т. Виета $(y^2)_1=3$; $(y^2)_2=4$

$(x^2)_1=7-(y^2)_1=4$; $(x^2)_2=7-(y^2)_2=3$

~~$y_1 \pm\sqrt{3}$~~ $y_1=\pm\sqrt{3}$ $\quad y_2=\pm 2$

$x_1=\pm 2$ $\quad x_2=\pm\sqrt{3}$

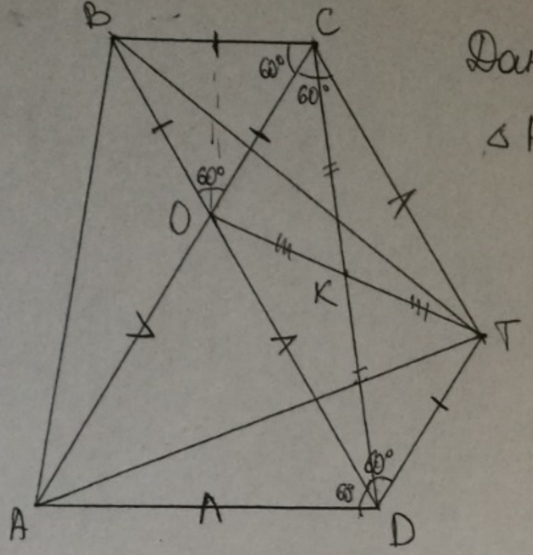
x и y взаимозаменяемы, запишу только различные пары: $(\sqrt{3};2)$; $(-\sqrt{3};2)$; $(-\sqrt{3};-2)$; $(\sqrt{3};-2)$

Ответ: решением системы являются пары чисел:

$(\sqrt{3};2)$; $(-\sqrt{3};2)$; $(\sqrt{3};-2)$; $(-\sqrt{3};-2)$;

$(2;\sqrt{3})$; $(2;-\sqrt{3})$; $(-2;\sqrt{3})$; $(-2;-\sqrt{3})$.

N6



Дано: $OK=KT$; $CK=KD$; $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ — правильные.

т.к. $OK=KT$ и $CK=KD$, $\triangle OKD=\triangle TKC$; $\triangle DKT=\triangle CKT$ => $OCTD$ — параллелограмм

$\angle COD=180°-\angle BOC=120°$, как смежные

$\angle ODT=180°-\angle COD=60°$, т.к. $\angle COD$ и $\angle ODT$ ~~соо~~ — углы параллелограмма при одной стороне (OC и DT); $\angle CTD=\angle ADT=$ ~~150~~ $120°$

$\triangle ATD=\triangle CDT$ (TD — общая; $AD=CT$; $\angle CTD=\angle ADT$) =>

=> $AT=CD=AB$ ($CD=AB$, т.к. $\triangle BOA=\triangle COD$ ($BO=OC$; $AO=OD$; $\angle BOA=\angle COD$, как вертикальные) => $ABCD$ — равнобокая трапеция.

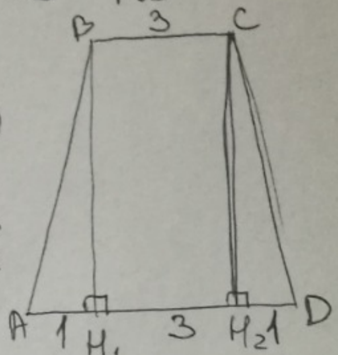
$\triangle BCT=\triangle DTC$ ($TD=BC$; CT — общая; $\angle DTC=\angle BCT=\angle BCO+\angle OCT$) =>

=> $BT=CD=AB$

$AB=BT=AT$ => $\triangle ABT$ — правильный

Высота трапеции $ABCD$ равна сумме высот $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$; ~~H~~ Высота правильного $\triangle$ со стороной a равна $\frac{\sqrt3}{2}a$, тогда высота ~~тр~~ трапеции $H=\frac{\sqrt3}{2}\cdot3+\frac{\sqrt3}{2}\cdot5=4\sqrt3$

$S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot H=4\cdot4\sqrt3=16\sqrt3$



Если опустить высоту в трапеции, то по т. Пифагора $CD=\sqrt{CH^2+1}=\sqrt{H^2+1}=7$

Площадь правильного $\triangle$ со стороной a: $\frac{a^2\sqrt3}{4}$

$S_{ABT}=\frac{AB^2\sqrt3}{4}=\frac{CD^2\sqrt3}{4}=\frac{49\sqrt3}{4}$; $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{49}{64}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{49}{64}$

~~Ф~~Фокусник вытащил 2 карточки. Рассмотрю 2 случая:

1) ~~оо~~ только одна из них дубль (пусть дубль числа x), тогда на второй может быть $15 \cdot 14$ вариантов

все, кроме x

все, кроме x и выбранного в 1-й раз числа.

В этом случае есть 16 вариантов числа x, значит такое может случиться в $16 \cdot 15 \cdot 14$ вариантах.

2) обе карточки дубль, пусть на первой x и x, а на второй y и y. Нужно выбрать x и y из 16 вариантов $C_{16}^2 = \frac{16!}{(16-2)!\,2!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8$

Всего вариантов — сумма 1-го и 2-го кол-ва, т. е.

$16 \cdot 15 \cdot 14 + 15 \cdot 8 = 15 \cdot 8\,(2 \cdot 14 + 1) = 120 \cdot 29 = 3480$ вариантов

Ответ: 3480 вариантов