Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007212**

ID профиля: **183672**

Вариант 16

Черновик

~~$2BE = BF + \sqrt{3}$; $2BF = BE + 4\sqrt{3}$~~

~~$4BE = 2BF + \sqrt{3}$~~

~~$4BE = BE + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}$~~

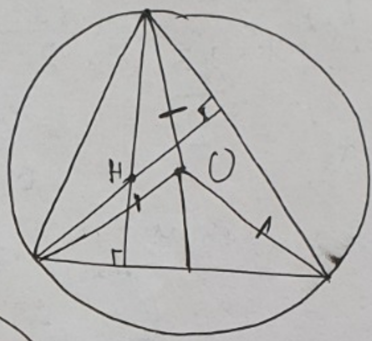
~~$3BE = 5\sqrt{3}$~~

~~$BE = \frac{5}{3}\sqrt{3}$~~

~~$\frac{10}{3}\sqrt{3} = BF + \sqrt{3}$~~

~~$\frac{7}{3}\sqrt{3} = BF$~~

$\frac{a \cdot bc}{4R} = S$. o.

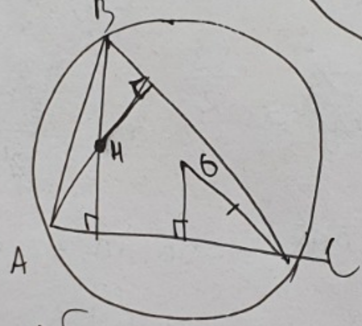


$4BE = 2BF + 2\sqrt{3}$

$4BE = BE + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$3BE = 6\sqrt{3}$

$BE = 2\sqrt{3}$



$4\sqrt{3} = BF + \sqrt{3}$

$BF = 3\sqrt{3}$

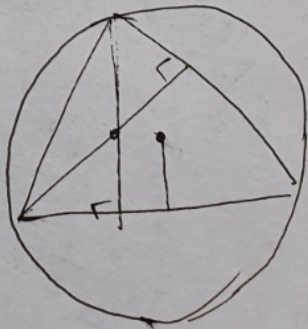
(6) $4\sqrt{3}$

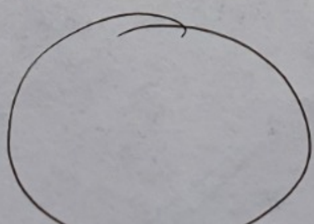
$1 + 3 \cdot 3$

$\frac{1}{4}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

~~$\frac{1}{4}\sqrt{(x + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3})}$~~

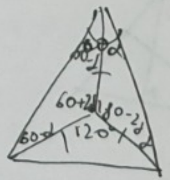
$\frac{1}{4}\sqrt{(x+10\sqrt{3})(x+4\sqrt{3})(x+6\sqrt{3})10\sqrt{3}}$

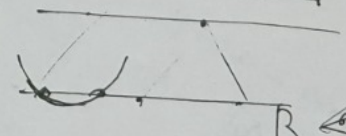


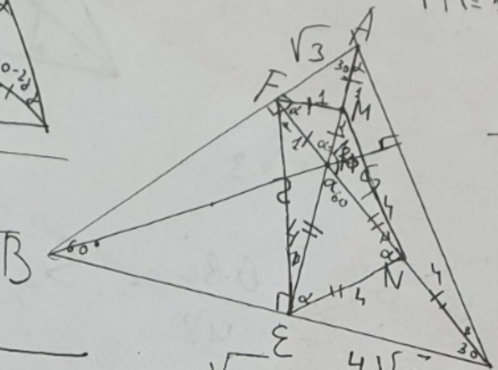


Стр. 2*

Черновик







$FM = 1$ $\Sigma N = 4$ $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot 4}{2} =$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $FM \parallel \Sigma N$ $\sqrt{3}\cdot 4\cdot 4.$

$\alpha = 60°$

$\begin{array}{r} -64 \\ 16 \\ \hline 48 \end{array}$ $48 = 4\cdot 4\cdot 3.$

$\Sigma C = \sqrt{8^2 - 4^2}$ $S\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot 1 = \sqrt{3}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ΣFMN -

$y^2 + x^2 = 1$ - парал- либо равнобок трапеция.

Прямая a

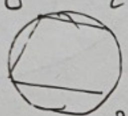
$\angle \Sigma AC + \angle ACF = 60°$

$\dfrac{4\cdot 16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

$\angle BAC + \angle ACB = 120°$

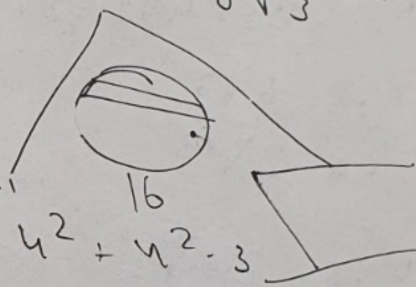
$f(a) = 5a^2 - 4ax + 6ay$

$\angle ABC = 60°$



$4\cdot 4\cdot\sqrt{3}$

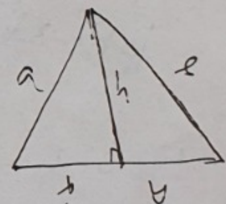
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$5a^2 - 4ax + 6ay - x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$ $a_1, \dots a_n$ $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\cdot 1}{2}$ $4^2 + 4^2\cdot 3$

$x^2 - 2x(y + 2a) + 2y^2 + 6ay + 5a^2 = 0$ $35a_1 + a_2 + \dots + \cancel{16}a_n = 592$

$\cancel{4\cdot 4}$ $8\cdot 4 = 32y$ $8\sqrt{3}$ $\dfrac{xh}{2}$

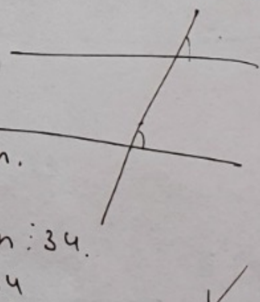


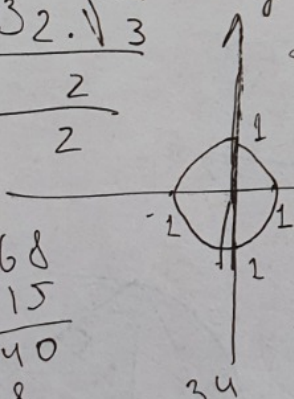
$\dfrac{\frac{32\cdot\sqrt{3}}{2}}{2}$ $\dfrac{\sin\alpha\cdot b\cdot c}{2}$ $a_1 + a_2 + \dots + 16a_n = 592$

$x + 34a_1 = 592$

$x + 15a_n = 592$

$34a_1 = 15a_n$





$\Downarrow$

$x + 410 = 592$ $a_1 : 15,\ a_n : 34.$

$\begin{array}{r} 68 \\ \times 15 \\ \hline 340 \\ 68 \\ \hline 1020 \end{array}$

$\begin{array}{r} 34 \\ \times 15 \\ \hline 170 \\ 34 \\ \hline 510 \end{array}$

$x = 182$

$\begin{array}{r} 34 \\ \times 15 \\ \hline 170 \\ 34 \\ \hline 510 \end{array}$

~~15, 16, 17, 34~~

$x = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$

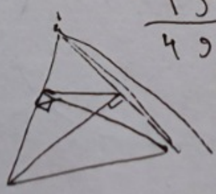
или 15, 33, 34.

$\begin{array}{r} 34 \\ \times 30 \\ \hline 1020 \end{array}$

34 $\begin{array}{r} 34 \\ +15 \\ \hline 49 \end{array}$

$\begin{array}{r} 34 \\ +15 \\ \hline 49 \end{array}$

$\begin{array}{r} 182 \\ -49 \\ \hline 33 \end{array}$



$\begin{array}{r} 82 \\ -49 \\ \hline 33 \end{array}$

Чистовик

№ 2

Пусть всего n чисел. $a_1, a_2 \dots a_n$. Упорядочим не умоляя общности.

$a_1 < a_2 \dots < a_n$ (числа различны). Пусть $x = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Тогда

$$\begin{cases} 592 = x + 34a_1 \\ 592 = x + 15a_n \end{cases} \quad \begin{cases} 34a_1 = 592 - x \\ 15a_n = 592 - x \end{cases} \Rightarrow 34a_1 = 15a_n.$$ Т.к числа $\in \mathbb{N}$ и $(34, 15) = 1$, то

$a_1 \vdots 15$ и $a_n \vdots 34$. Пусть $a_1 > 15$ ($\Rightarrow$ min 30), тогда $x + 34a_1 \geqslant x + 34 \cdot 30 \geqslant 1020$ — противоречие $\Rightarrow a_1 = 15$. Аналог, пусть $a_n > 34$, тогда $x + 15a_n \geqslant x + 15 \cdot 68 \geqslant$ $\geqslant 1020$. $\Rightarrow a_n = 34$.

$x + 34 \cdot 15 = 592 \Leftrightarrow x + 510 = 592 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n = 82.$

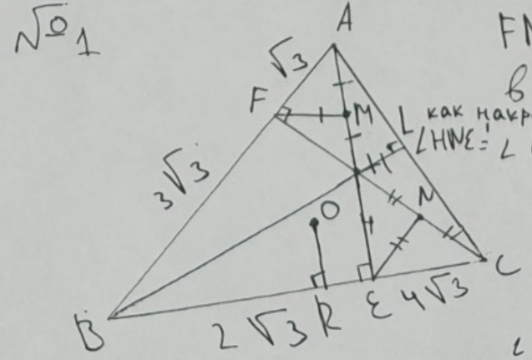
$15 + a_2 + \dots + 34 = 82 \Rightarrow a_2 + \dots + a_{n-1} = 33.$

$\boxed{15, 33, 34}$ — подходит. Если на доске $\geqslant 4$ чисел, то 33 — разбивается на части (в Σ остальные числа $= 33$). Т.к $a_2 \geqslant a_1 \Rightarrow a_2 = \min 16$, аналог $a_3 = \min 17$. Взяв $16 + 17 = 33$. Очевидно, что больше чисел быть не может и увеличить a_2, a_3 мы не можем (иначе $x > 82$).

Ответ: 15, 33, 34 или 15, 16, 17, 34.

Чистовик

№1



$FM = AM = MH$ и $HN = NE = NC$, т.к медиана в прямоуг. Δ-ке $= \frac{1}{2}$ гипотенузы.

∠ как накрест. $\angle HNE = \angle MFH = \angle MHF = \angle NHE = \angle HEN$.
вертикальн.

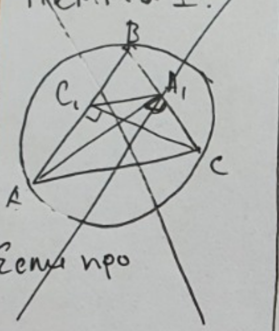
То есть ΔHNE - равнос (все по 60°), аналогично ΔFMH - равнос. $\angle FHE = 180 - \angle NHE = 120^\circ$.

$\angle FBE = 360 - 120 - 90 \cdot 2 = 360 - 300 = 60^\circ$.

$\angle ABC = 60^\circ$.

$\Delta FBE \sim \Delta CBA$, по 3м ∠-м (4х ∠-к $AFEC$ - впис, т.к $\angle AFC = \angle AEC$. Т.е $\angle BFE = \angle ACB$. аналог. $\angle FEB = \angle BAC$).

~~Лемма 1.~~



~~Если про~~

Найдем коэф. подобия. $\Delta FHE = \Delta MHN$ по двум сторонам и ∠ между ними. $\Rightarrow MN = FE$. т.к MN - ср. линия $\frac{1}{2}AC = MN = FE$.

Коэф. подобия $\frac{1}{2}$. ~~Пусть BE~~ $\frac{BE}{BF+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ и $\frac{BF}{BE+4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

Из системы получаем $BF = 3\sqrt{3}$ и $BE = 2\sqrt{3}$

$S\Delta ABC = (\sin\angle B \cdot AB \cdot BC)/2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

Осталься радиус описанной окр.

~~Найдем AC. А затем R через формулу~~ $\cancel{\frac{abc}{4R} = S_\Delta}$.

Отметим O - радиус окр. Используем факт: Длина ⊥-ра опущенного на сторону из ц. опис. окр. ~~в 2 раза меньше~~ равна длине отрезка соединяющего его противополож. вершину и ортоцентр. Пусть OR - перпенд. $\Rightarrow$ $OR = 2$. Т.к O - ц. опис. $\Rightarrow BR = RC = BC/2 = 3\sqrt{3}$.

$OB = \text{радиус} = \sqrt{2^2 + 9 \cdot 3} = \sqrt{4+27} = \sqrt{31}$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S\Delta ABC = 18\sqrt{3}$, $R = \sqrt{31}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007212**

ID профиля: **183672**

Вариант 16

Черновик

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$3x^2$

$x^4+y^4+3(x^2+y^2)-2x^2y^2=22$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ 2x^4+2y^4-x^2y^2=38 \end{cases}$$

$\cancel{(x^2-y^2)}$

$\cancel{-(2x^2+2y}$

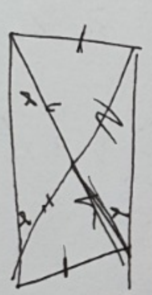
$$\begin{cases} \cancel{6x^2+6y^2-3x^2y^2=6} \\ \cancel{12x^4+2y^4-x^2y^2=38} \end{cases}$$

$\cancel{-5(x^2+y^2)+}$

$-5x^2-5y^2+2{,}5x^2y^2=-5$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2$

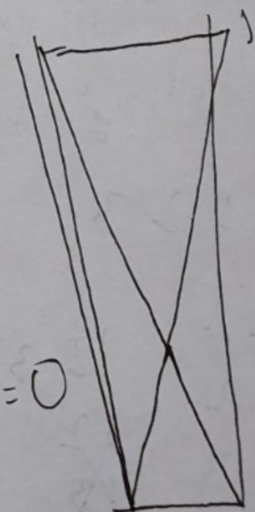
$2x^2$



$x^4+y^4+2x^2y^2-5x^2-5y^2=14$

$(x^2+y^2)^2-5(x^2+y^2)=14$

$(x^2+y^2)(x^2+y^2-5)=14$



$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{1}{2}x^2y^2=1 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t+y^2-\frac{1}{2}ty^2-1=0 \\ t^2+y^4-\frac{1}{2}ty^2-19=0 \end{cases}$$

$x^2=t.$

$t+(y^2-\frac{1}{2}y^2)-1=0$

$t(1+\frac{1}{2}y^2)-1=0$

$t=\frac{1}{1+\frac{1}{2}y^2}$

$a_6+a_4+a_5+a_8+a_4+a_{12}+a_{11}$

$a_1+a_2+a_4+a_5+a_{11}+a_8+a_{12}+a_{10}+a_{13}$

$a_1+a_4\ldots a_{12}+a_{13}$

$a_1+a_4=const$

$a_2+a_{13}=const$

$a_4=const,$

Стр. 1

Чистовик

№5

Т.к порядок выбора неважен, давайте зафиксируем, что сначала он вытащит дубль, а потом любую другую подходящую по условию карточки (аналог, когда вытаскивает одновременно)
Всего 16 дублей (1;1, 2;2 ...) => Первую карту можно взять 16 способами

Вторую карту: можем выбирать любые, чтобы только не встречалось то число, что на дубле. То есть с одной стороны может быть 1 из 15 чисел и на другой стороне тоже. Итого 15·15 карточек ~~(Но каждый оставшийся дубль мы тут посчитали 2 раза. (Сма~~. Но, случаи, когда мы оба раза выбрали дубль, мы посчитали по 2 раза (К примеру случай 1;1 и 2;2 или 2;2 и 1;1 мы учли как разные).
То есть из тех способов, что у нас есть (а их 16·15·15, по комб. правилу умножения) Вычитаем те, когда 2 дубля. (1-й дубль 1 из 16, 2й 1 из 15 оставшихся. По комб. правилу: ($C_{16}^{2} = \frac{16\cdot15}{2} = 120$)
Итого. $16\cdot15\cdot15 - 120 = 3600 - 120 = 3480$

Ответ: 3480

Чистовик

№4

$$\boxed{\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}}$$

$x^2+y^2=t$, Тогда

$$\begin{cases} 2t-x^2y^2=2 \\ t^2-2{,}5x^2y^2=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5t+2{,}5x^2y^2=-5 \\ t^2-2{,}5x^2y^2=19 \end{cases} \oplus \; t^2-5t-14=0.$$

Решаем. кв. урав. $t^2-5t-14=0$

$D=5^2-4\cdot 14=25+56=81$

$t_{1,2}=\frac{5\pm 9}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=7 \text{ – рассматриваем: Заменим. } y^2=\cancel{x^2}\,7-x^2 \\ x^2+y^2=-2 \text{ – неуд, т.к. } x^2+y^2\geq 0 \end{array}\right.$$

~~$2t-x^2y^2=2 \Leftrightarrow 14-2=x^2y^2 \Rightarrow x^2y^2=12$~~

$$\begin{cases} \cancel{2x^2}+14-\cancel{2x^2}-7x^2+x^4=2 \\ x^4+x^4-14x^2+49+\frac{1}{2}x^4-3{,}5x^2=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-7x^2+12=0 \; * \\ 2{,}5x^4-17{,}5x^2+30=0 \end{cases}$$

* Решаем. $x^2=a$.

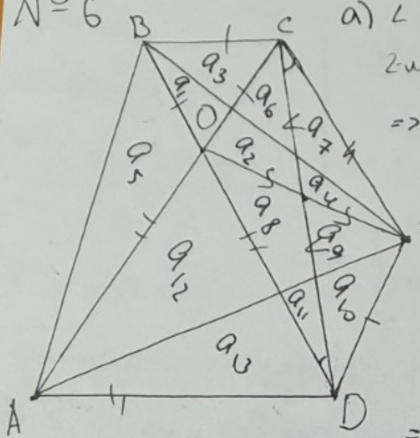
$a^2-7a+12=0$. $D=49-48=1$. $a_{1,2}=\frac{7\pm 1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} x^2=3 \;\Big|\; : y^2=4 \;.\; 2(3+4)-3\cdot 4=2 \text{ – уд и } 25-2{,}5\cdot 12=19 \text{ – уд} \\ x^2=4 \;\Big|\; : y^2=3 \text{ также уд.} \end{array}\right.$$

Ответ: $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$ (совокупность).

Чистовик   Δ-накрест леж.

№6



а) $\angle BCA=\angle CAD=60° \Rightarrow BC \parallel AD$. $\Delta BOA=\Delta COD$ по 2-м сторонам и $\angle$ між ними. ($\Rightarrow$ из усл) $\Rightarrow CD=BA \Rightarrow$ $\Rightarrow ABCD$ - равнобок. трапеция. Т.к. в CODT диаг. пересеч делятся пополам $\Rightarrow$ это параллелограм.

Заметим, что $\Delta CBT=\Delta TDC$:

1) CT - общ, $BC=CO=TD$. (парал.)

2) $\angle CTD=\angle COD=180-60=120°$.

$\angle CBT=\angle BCO+\angle OCD+\angle TCD=60+\angle OCD+\angle CDO=$ $=60+180-\angle COD=60+60=120°$.

То есть $BT=CD=AB$. Аналог $\Delta CTD=\Delta ATD$ и $TA=AB$.

б) a_i - площадь наименьших фигур (внутри кот-х нет линий)

см. пункт а), про равенство Δ-ков и параллелограм:

$$a_3+a_6+a_7=a_5=a_7+a_4+a_9+a_{10}=a_{10}+a_{11}+a_{13}=a_6+a_2+a_8+a_{11}$$

Найти: (Заметим, что мы можем найти S_Δ - в COD, BOC, BOA, DOA)

$$\frac{(a_4+a_9)+(a_2+a_8)+a_1+a_{12}+a_5}{a_3+a_6+a_1+a_2+a_8+a_{11}+a_5+a_{12}+a_{13}}=\frac{\cancel{a_5}\,3a_5-a_7-a_{10}-a_6-a_{11}+AOD-a_{13}+BOC-a_3}{2S_\Delta BOA+S_\Delta BOC+S_\Delta AOD}=\frac{a_5+BOC+AOD}{2a_5+BOC+AOD}$$

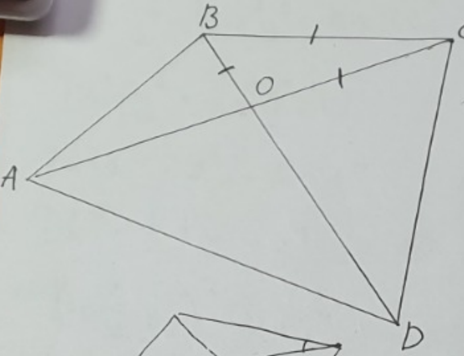
$S_\Delta BOC=\sin 60\cdot 3\cdot 3/2=\frac{\sqrt{3}\cdot 9}{4}$ $S_\Delta AOD=\sin 60\cdot 5\cdot 5/2=\frac{\sqrt{3}\cdot 25}{4}$

$S_\Delta a_5=\sin 120\cdot 3\cdot 5/2=\frac{\sqrt{3}\cdot 15}{4}$.

Итого:
$$\frac{\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{25\sqrt{3}}{4}}{\frac{30\sqrt{3}}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{25\sqrt{3}}{4}}=\frac{15+9+25}{30+9+25}=\frac{49}{64}$$

Ответ: $\frac{49}{64}$ в п. б и см. док-во а)

Черновик



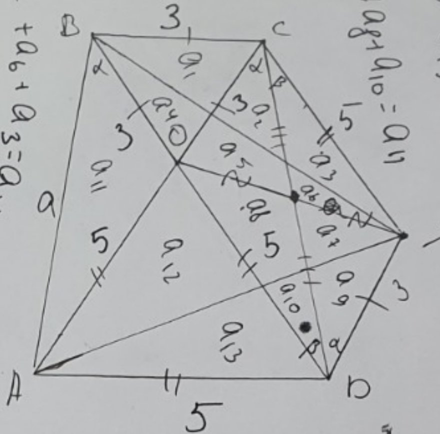
$a_1+a_2+a_3=a_4$

$a_9+a_{10}+a_{13}=a_{11}$

$a_2+a_5+a_8+a_{10}=a_{11}$

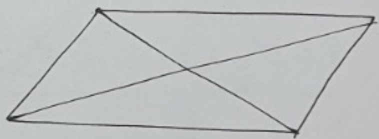
$a_9+a_7+a_6+a_3=a_{11}$

$a_2+a_5=a_8+a_{10}$



$\alpha+\beta=60°$

Изначально равно бок трапеции.



$15 \times 4 = 60$

240

$8\times15=120$

$x^2+y^2=t$

$\begin{cases} 2t-x^2y^2=2 \\ t^2-2{,}5x^2y^2=19 \end{cases}$ $\begin{cases} -5t+2{,}5x^2y^2=-5 \\ t^2-2{,}5x^2y^2=19 \end{cases}$

$240 \times 15 = 1200 + 240 = 3000$

$4\cdot14$ 56

$t^2-5t=14$ $t^2-5t-14=0$

16

$25+4\cdot14=25+56=\underline{81}$

1

$t=\frac{5\pm3}{2}$ $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=1. \end{array}\right.$ $x^2=7-y^2$

$\begin{cases} 2-x^2y^2=2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ ~~x=y=0~~ против

$3600-120=2870$ $14-\cancel{2y^2}+\cancel{2y^2}-7y^2+y^4=2$

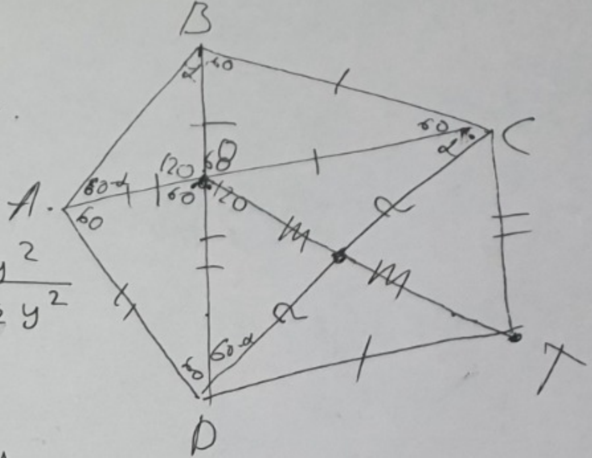
$3600-120=3480$

Стр. 3

Черновик

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{1}{2}x^2y^2=1 \ (1) \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \ (2) \end{cases}$$

$x^2=t.$



$$\begin{cases} t(1-\frac{1}{2}y^2)=1-y^2 \\ t^2-\frac{1}{2}ty^2+y^4-19=0^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=\frac{1-y^2}{1-\frac{1}{2}y^2} \end{cases}$$

$^* D=\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2-4(y^4-19)=\frac{1}{4}y^4-4y^4+76=-3,5y^4+76$

$\cancel{t=\frac{\frac{1}{2}y^2\pm\sqrt{-3,5y^4-76}}{2}}$

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant\sqrt{x^2y^2}$$

1 $\cancel{\frac{\frac{1}{2}y^2\pm\sqrt{-3,5y^4-76}}{2}}=\frac{1-y^2}{1-\frac{1}{2}y^2}$

$$\frac{x^4+y^4}{2}\geqslant x^2y^2$$

$$x^4+y^4\geqslant 2x^2y^2$$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19. \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} 3x^2+3y^2-1,5x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} 6x^2+6y^2-3x^2y^2=6 \\ 2x^4+2y^4-x^2y^2= \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x^2-3y^2+2,5x^2y^2=-3 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

1 2 3

11
12
13
23
22
33

12 3 4

~~12~~
~~13~~

3 2 1 3.1
3 2 4 1
3 4.3
4 2
11 2.2
12 2 3 3.3
13 2.4 3.4
14

$x^2+y^2=a.$

$x^4+y^4+2x^2y^2-3(x^2+y^2)=16$

$(x^2+y^2)^2-3(x^2+y^2)-16=0.$

$a^2-3a-16.$

$9+16\cdot 4$

$\begin{array}{r} 64 \\ +\ 9 \\ \hline 73 \end{array}$

$\frac{4}{4}$

$4\cdot 4$

$4\cdot 4=16$

Стр. 2