Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007173**

ID профиля: **354372**

Вариант 16

Чистовик Часть 1

№3

$$a^2x^2 - x^2 - 5a^2 - 6ay + 2xy - 2y^2 + a^2y^2 - 4a^3x + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 4ax - 6ay - 5a^2 - y^2$$

$$(x-y)^2 = -(5a^2 + 6ay + y^2 - 4ax)$$

$$(x-y)^2 = -(5a^2 + 2a(3y-2x) + y^2)$$

$$5a^2 + 2a(3y-2x) + y^2 = 0$$

$$D = (3y-2x)^2 - 5y^2$$

$$D = 9y^2 + 4x^2 - 12xy - 5y^2$$

$$D = 4y^2 + 4x^2 - 12xy$$

$$D = (2y - 2x)^2 - 4xy$$

211007173 (U354372 M1274912)

Чистовик. Часть 1

№2

Пусть a_1 - самое маленькое;

a_n - самое большое

Тогда,

$35a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 592$ (1)

$a_1 + a_2 + \ldots + 16a_n = 592$ (2)

Вычтем из (1) (2)ое

$34a_1 - 15a_n = 0$

$a_1 = \frac{15}{34} a_n$

Т.к по условию a_1 и $a_n \in N$, значит,

$\frac{15}{34} a_n \in N$,

Рассмотрим варианты, когда $\frac{15}{34} a_n$ - натуральное

~~Тогда~~, ~~$a_n =$~~ 1) Если $0 < a_n < 34$, то

$\frac{15}{34} \cdot a_n \notin Z$! т.к 15 и 34 не имеют общих делителей.

2) Если $a_n = 34$, то $a_1 = 15$;

Значит, $15 \cdot 35 + a_2 \ldots + 34 = 592$,

$a_2 + a_3 \ldots + a_{n-1} = 33$

При этом $a_2; a_3; \ldots; a_{n-1} > a_1$

Значит, подходят только числа, 16; 17; 33

в ином случае равенство не выполняется

или не выполняется условие, что a_1 - сам. мал.

3) Если $a_n > 34$, то $a_n \in N$ a_n - сам. больш. $\Leftrightarrow a_n \geq 68$

Но если $a_n = 68$, то

$68 \cdot 16 > 592$, значит такого быть не может

Следовательно, числа на доске I. 15 16 17 34

II. 15 33 34

Ответ: ~~I~~ Числа: 15; 16; 17; 33; 34

Чистовик №1 - продолжение Часть 1

5) Д-п MN - средняя линия (по определению)
M - середина AH;
N - середина HC
$MN = \frac{1}{2}AC$ (по свойству средней линии)

6) $\triangle MHN$, $MH = 1$; $HN = 4$; $\angle MHN = \angle FHE = 120°$
По теореме косинусов

$MN^2 = MH^2 + HN^2 - 2MH \cdot HN \cdot \cos\angle MHN$

$MN^2 = 1 + 16 - 8 \cdot (-\frac{1}{2}) = 17 + 4 = 21$

$MN = \sqrt{21}$

Тогда, $AC = 2MN = 2\sqrt{21}$

$2R = \frac{a}{\sin\alpha}$, где $a - AC$; $\angle\alpha = \angle FBE$.

$\angle FBE = 360 - 180 - 120 = 60$ (по свойству четырёх угол.)

$R = \frac{2\sqrt{21}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{7}$

7) $\triangle AFH$, $\angle AFH = 90$,
По теореме Пифагора
$AF = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$
Аналогично, $\triangle HBC$,
$BC = 4\sqrt{3}$
Тогда, Пусть $FB = x$, тогда $BB = \frac{\sqrt{3} + x}{2}$ (по свойству прямоуг. $\triangle$ с углом $30°$)

$x = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3} + x}{2} + 4\sqrt{3}\right)$

$2x = \frac{9\sqrt{3} + x}{2}$

$4x = 9\sqrt{3} + x$; $x = 3\sqrt{3}$;

Значит, $AB = 9\sqrt{3} + \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$; $BC = 4\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$

~~По теореме синусов~~

$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(AB \wedge BC) = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 13\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

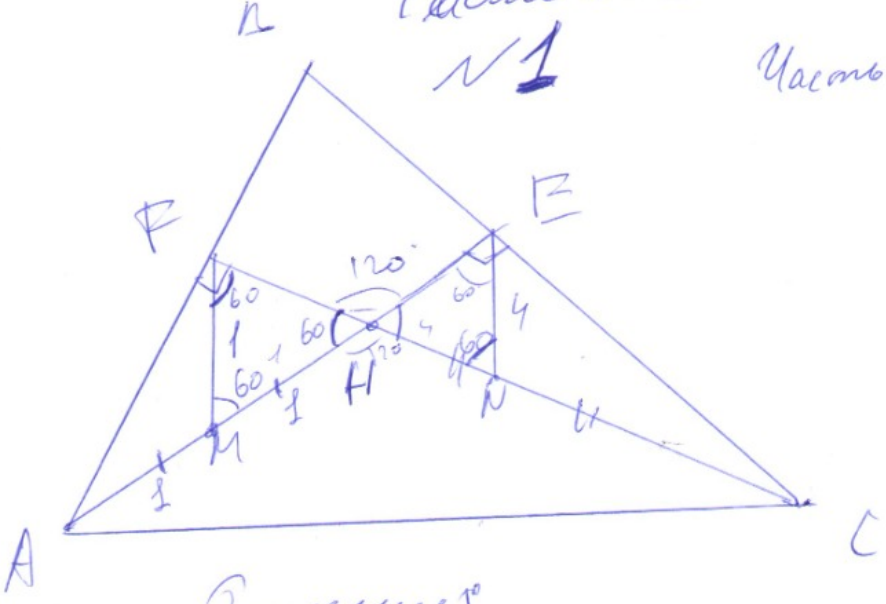
$= \cancel{\frac{13 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{39 \cdot 9\sqrt{3}}{4}} = 65\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 195\sqrt{3}$

Ответ: $\angle ABC = 60$; $R = 2\sqrt{7}$; $S = \frac{1}{2} \cdot 195\sqrt{3}$

Черновик

№1

Часть (1)



Решение:

1) $\triangle AFM$, $\angle AFH = 90°$
т.к. FM – медиана (по определению, $AM = MH$ (по условию))
то $FM = MH = AM = 1$ (по свойству прямоуг. $\triangle$)

2) Аналогично, $\triangle HEC$, $\angle HEC = 90°$:
$EN = HN = NC = 4$

3) Т.к. $MF \parallel EN$ (по условию)
$\angle MFH = \angle HNE$ | (как накрест лежащие при $MF \parallel EN$)
$\angle FMH = \angle HEN$ |
Т.к. $\triangle MFH$ – равнобедренный (по определению $FM = MH$)
то $\angle MFH = \angle MHF$ (по свойству равнобедр. треугол.)
$\triangle NHE$ – равноб. (по определению $EN = HN$)
то $\angle NHE = \angle HEN$ (по свойству равноб. $\triangle$)
Т.к. $\angle FHM = \angle EHN$ (как вертикальные)
то $\angle MFH = \angle HEN = \angle NHE = \angle HNE = \angle FMH$
Значит, $\triangle FMH$ и $\triangle HNE$ – правильные (по признаку)
Значит, все углы в треугольниках по $60°$

4) $\angle FHE = \angle MHN$ (как вертикальные)
$2\angle FHE = 360 - 120 = 240$; $\angle FHE = 120$

211007173 (U354372 M1274912)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007173**

ID профиля: **354372**

Вариант 16

Чистовик Часть 2

№6 - продолжение (б)

5) Д.п. BF - высота, $F \in AD$

Т.к. ABCD - равноб. трапеция

тогда, $AF = \dfrac{AD - BC}{2} = 1$ (по свойству равнобедренной трапеции)

6) $\triangle ABF$, $\angle BFA = 90°$

По теореме Пифагора:

$$BF^2 = AB^2 - AF^2$$
$$BF^2 = 49 - 1$$
$$BF = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

7) ABCD - равнобедренная трапеция

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot BF(BC + AD)$$
$$S(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot (8) = 16\sqrt{3}$$

тогда,

$$\frac{S(ABT)}{S(ABCD)} = \frac{\frac{49\sqrt{3}}{4}}{16\sqrt{3}} = \frac{49\sqrt{3}}{16 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{49}{64}$$

Ответ: $\dfrac{S(ABT)}{S(ABCD)} = \dfrac{49}{64}$

211007173 (U354372 M1274913)

Чистовик Часть 2

№6 — продолжен.

$BO = BC$ | (по ~~сво~~ определению
$AO = CT$ | правильных треугольников)

$\angle BOA = \angle BCT = 120°$

Тогда, $\triangle BOA = \triangle BCT$ (по двум сторонам и углу между ними)

Тогда, $AB = BT$ (из равенства треугольников,

т.к. $BT = AT$
$AB = BT$ $\Rightarrow BT = AT = AB$

Значит, $\triangle ABT$ — равносторонний (по определению) ч.т.д.

б) $BC = 3$; $AD = 5$

1) $ABCD$ — четырёхугольник

$\angle BCO = \angle CAD = 60°$ (по свойству углов правильного треугольника)

Значит, $BC \parallel AD$ (по признаку, т.к. вертикальные углы равны)

2) $\triangle OBA$ и $\triangle CAD$,

$BO = AD$ | (по свойству сторон параллелограмма)
$OA = AD$ |

$\angle BOA = \angle CTD = 120°$

Тогда $\triangle OBA = \triangle CAD$ (по двум сторонам и углу между ними).

Значит, $CD = BA$ (из равенства)

Тогда, $ABCD$ — равнобедренная трапеция (по определению)

3) $\triangle BCT$,

По теореме Косинусов:

$BT^2 = 9 + 25 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$

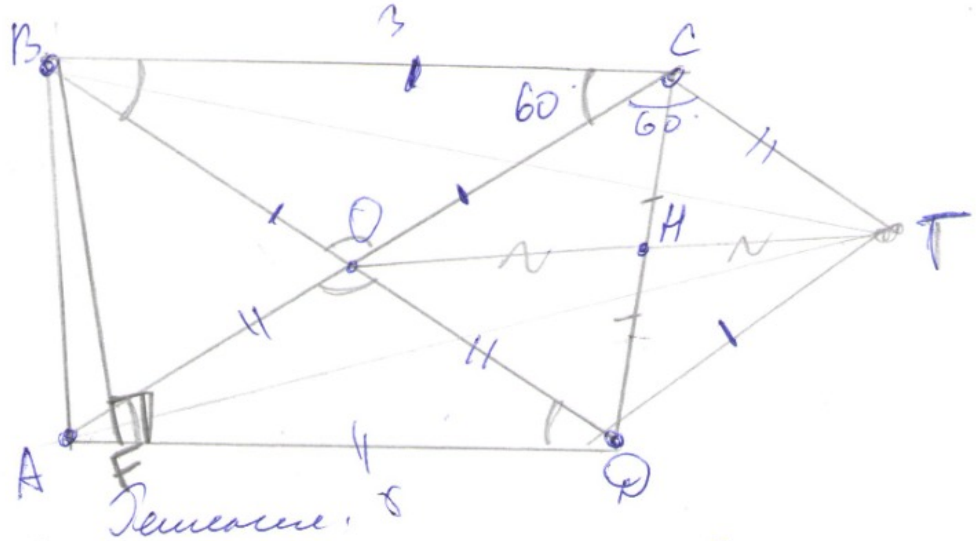
$BT = 7$;

4) $\triangle ATB$ — правильный (по доказанному)

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S(ATB) = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

Чистовик Часть 2

№ 6.



а) Решение:

1) т.к. T симметрична O относит. середины CD, то OH = HT; CH = HD

Значит, OCTD - параллелограмм (по признаку) (CD и OT - диагонали)

Тогда, ∠BOC и ∠COD - смежные;

∠BOC = 60° (по свойству правильного △ треуг.)

⇒ ∠COD = 180 - 60 = 120° (по св-ву смежных углов)

2) ∠COD = ∠CTD; ∠ODT = ∠OCT (по свойству углов параллелограмма)

∠CTD = 120°; ∠OCT = $\frac{360-240}{2}$ = 60°

3) OC = DT = BC (по свойству сторон параллелограмма)

CT = OD = AD

4) △BCT и △ADT

∠ADT = ∠BCT = 60° + 60° = 120°

AD = CT; BC = DT (по доказанному)

Значит, △BCT = △ADT (по двум сторонам и углу между ними)

BT = AT (из равенства △)

211007173 (U354372 M1274913)

5) △BOA и △BCT

∠BOA = 180° - 60 = 120° (по св-ву смежн. углов)

Чистовик часть 2

№4 - продолжение

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{t=} \ y^2=4 \\ y^2=3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2 \\ y=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Тогда,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=3 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=4 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=4 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\sqrt{3}; 2)$, $(-\sqrt{3}; 2)$ $(\sqrt{3}; -2)$, $(-\sqrt{3}; -2)$, $(2; \sqrt{3})$; $(-2; \sqrt{3})$ $(2; -\sqrt{3})$, $(-2; -\sqrt{3})$

Чистовик часть 2

№ 4

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2y^2=2-2x^2-2y^2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}(x^2y^2)=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2y^2=2-2x^2-2y^2 \\ (x^2+y^2)^2-2\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +x^2y^2=-2+2x^2+2y^2 \\ (x^2+y^2)^2-5(x^2+y^2-1)=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2=-2+2x^2+2y^2 \\ (x^2+y^2)^2-5(x^2+y^2)=14 \end{cases}$$

Пусть $a=x^2+y^2$, тогда $a\geq 0$

$a^2-5a-14=0$

$D=25+56$

$D=81$

$a=\frac{5\pm 9}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=7 \\ a=-2 \end{array} \right. \\ a\geq 0 \end{array} \right.$ $a=7$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^2+y^2=7 \end{cases}; \begin{cases} 14-2y^2+2y^2-(7-y^2)y^2=2 \\ x^2=7-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4-7y^2+12=0 \\ x^2=7-y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t^2-7t+12=0 \ (1) \\ x^2=7-y^2 \end{cases}$$

Пусть $t=y^2$

(1) $D=49-48$

$D=1$

$t=\frac{7\pm 1}{2}$ $\left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=3 \end{array} \right.$

211007173 (U354372 M1274913)