Часть 1

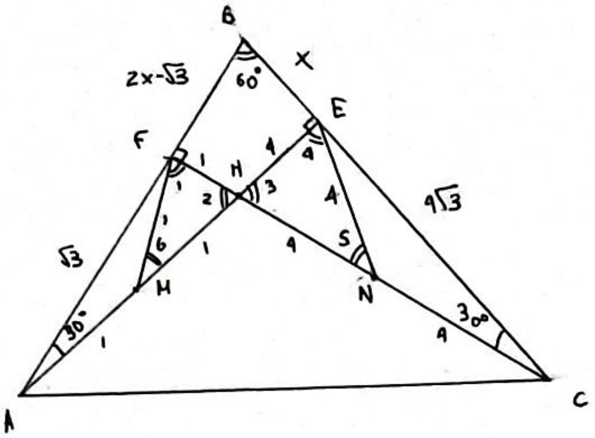
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007100**

ID профиля: **351628**

Вариант 16

Задача №1.



Дано: $\triangle ABC$, CF и AE - выс., $H = AE \cap CF$, M - сер. AH, N - сер. CH, $FM = 1$, $EN = 4$, $FM \parallel EN$

Найти: $\angle ABC$, S_{ABC}, R

Решение:

1. $\angle EHM = \angle EHN$ как верт.
2. Т.к. FM и EN - мед. в прям. треуг. $\triangle AFH$ и $\triangle HEC$, то $FM = AM = MH$ и $EN = HN = NC$
   Тогда $\triangle FMH$ и $\triangle HNE$ - равноб., $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$
3. Раз $FM \parallel EN$, то $\angle 1 = \angle 5$ как накр. леж. при сек. FN и $\angle 4 = \angle 6$ при сек. EM.
   Тогда $\triangle FMH$ и $\triangle HNE$ равност. и $\angle 3 = 60°$, откуда $\angle HCE = 90 - \angle 1 = 30°$ и
   $\underline{\angle ABC = 90 - \angle HCE = 60°}$
4. $EC = HC \cdot \cos(\angle 3) = HC \cdot \cos 60° = 4\sqrt{3}$
   $AF = AH \cdot \cos 60° = \sqrt{3}$
   $BE = x$, тогда в $\triangle AEB$ $AB = 2x$ (кат. против угл. в $30°$ равен полов. гипот.), тогда
   $FB = AB - AF = 2x - \sqrt{3}$, тогда из $\triangle FCB$:
   $(2x - \sqrt{3}) \cdot 2 = x + 4\sqrt{3}$ (кат. против угл. в $30°$)
   $4x - 2\sqrt{3} = x + 4\sqrt{3}$
   $x = 2\sqrt{3}$
5. $S_{ABC} = \cancel{\frac{1}{2} ab \sin\alpha = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} FC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4\sqrt{3} =$
   $= 18\sqrt{3}$
6. По теор. косинусов:
   $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 60°$
   $AC^2 = (4\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 16 \cdot 3 + 36 \cdot 3 - 24 \cdot 3 = 28 \cdot 3$
   $AC = 2\sqrt{21}$
   По теор. синусов:
   $\frac{AC}{\sin 60°} = 2R$
   $R = \frac{AC}{2\sin 60°} = \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{7}$
   Ответ: $\angle ABC = 60°$, $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{7}$

Чистовик, математика 9 класс

Задача №2.

2

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=S$, S - сумма чисел на доске

Разместим число в порядке возрастания: a_1 - самое мал., a_n - самое большое. Тогда по условию:

$35a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=592$

$a_1+a_2+a_3+\ldots+16a_n=592$

$34a_1+S=592$

$S+15a_n=592$

$34a_1+S=S+15a_n$

$34a_1=15a_n$

$a_n=\frac{34}{15}a_1$

Т.к. по усл. числа натур., то чтобы a_n было натур., a_1 должно быть кратно 15.

$a_1 \vdots 15$

1) $a_1=15$:

$a_n=\frac{34}{15}\cdot 15=34$

$34\cdot 15+S=592$

$S=592-510=82$

При этом $a_1<a_2, a_3, a_4 \ldots < a_n$ * ~~например это могут~~

Тогда $15+a_2+a_3+\ldots+34=82$

$a_2+a_3+\ldots=33$

У нас возможны только 2 варианта $a_2=16$ и $a_3=17$ или $a_2=33$, иначе у нас получатся числа, меньшие или равные 15, что противоречит условию* (если $a_3 \geq 18$, то $a_2<15$)

* что a_1 наимен. число

2) $a_1=30$:

$a_n=68$

$30\cdot 34+S=592$

$S=592-1020<0$, но сумма натур. чисел не может быть меньше 0, тогда все a_1, большие 30 не подойдут ($34a_1>1020$ при $a_1\geq 30$)

Ответ: 15 16 17 34 или 15 33 34

Чистовик, математика 9 класс

Задача №3

3

$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0 \quad |: a^2, \quad a \neq 0$ иначе $= 1 \neq 0$

$\underbrace{x^2 + y^2 - 4ax - \frac{2x}{a}}_{-2x\left(2a+\frac{1}{a}\right)} + 2y + 4a^2 + \frac{1}{a} = 0$

$\left(x^2 - 2x\left(2a+\frac{1}{a}\right) + \left(2a+\frac{1}{a}\right)^2\right) - \left(2a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(y^2+2y+1\right) - 1 + 4a^2 + \frac{1}{a} = 0$

$\left(x - 2a - \frac{1}{a}\right)^2 + (y+1)^2 - \ldots = 0$

$B\left(2a+\frac{1}{a}; -1\right)$

При $y = -1$:

$5a^2 - 4ax + 6a\cdot(-1) + x^2 - 2x(-1) + 2(-1)^2 = 0$

$5a^2 - 4ax - 6a + x^2 + 2x + 2 = 0$

$(x - 1 + 2a)^2 + (a-1)^2 = 0$

$\geq 0 \qquad \geq 0$

$x - 1 + 2a = 0$ и $a - 1 = 0$

$x = -1 \qquad a = 1$

$2a + \frac{1}{a} = 2 + 1 = 3$, но т. B не лежит на $x = 3$, тогда $y_A \neq -1$

Для $2a + \frac{1}{a} > 3 \quad \left(a \in (0; 0,5) \cup (1; +\infty)\right) \quad x < 3$

Черновик

$3{,}25 \,|\, 1{,}5$

$3{,}25$

$S = $

$32{,}5 \,|\, 15$; -30; 25; $2,$

$\dfrac{a^3}{2R}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$(4a^2)^2 - 2\cdot 4a^2 \cdot 0{,}5 \quad \dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$

$32{,}5 \,|\, 25$; -25; 75; -75; 0; $1{,}3$

$\dfrac{3a}{2}r$

$= \dfrac{16a^4 - 4a^2 + 0{,}25 - 3{,}25}{-4a^2} = \dfrac{(4a^2 - 0{,}5)^2 - 3{,}25}{-4a^2}$

$2x = 1$

$a = R\sqrt{3}$

$a = 2r\sqrt{3}$

6

$R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$B\left(\dfrac{4a^2+1}{2a}; -1\right)$

$\begin{array}{r} 36 \\ -24 \\ \hline 12 \end{array}$

$16 + 36 - 24$

$\vee$

12

$r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$

$\dfrac{3a\cdot a}{2\sqrt{3}\cdot 2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$3x + 3y - 3z = 3(x + y - z)$

$5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^2 + 1 = 0$

$28 \,|\, 2$; $14 \,|\, 2$; $7 \,|\, 7$; 1

$(x-a)^2 +$

$+(y-a)^2 = R^2$

$a^2x^2 - 4a^3x +$

$a \neq 0$

$x^2 + y^2 - 4ax - 2x\dfrac{1}{a} + 2y + 4 + \dfrac{1}{a^2} = 0$

$a^2 \cdot x^2 - 2\cdot 2 \cdot a^2 \cdot a + 4a^2$

$\left(\cancel{x^2 + 2\cdot x\cdot \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}}\right) + (y^2 + 2\cdot y\cdot 1 + 1)$

$a^2x^2 - 2\cdot 2a \cdot a\, x$

$-x\left(4a + \dfrac{1}{a}\right) = -x\,\dfrac{4a^2+1}{a}$

$\dfrac{16a^4 + 8a^2 + 1}{4a^2} = 4a^2 + 2 + \dfrac{1}{4a^2}$

$\dfrac{4a^2+1}{a}$

$-2xa\left(\overset{2}{4}a^2 - \overset{1}{8}\right)$

$x^2 + 2\cdot x\cdot$

$\left(x - \dfrac{4a^2+1}{2a}\right)^2 + (y+1)^2 +$

$\left(x^2 - 2\cdot x\cdot \dfrac{4a^2+1}{2a} + \left(\dfrac{4a^2+1}{2a}\right)^2\right) +$

x

$+$

$+ (y^2 + 2y + 1) \;\ldots = 0$

$4a^2 + 3 + \dfrac{1}{4a^2}$

$4 + \dfrac{1}{a^2} - 4a^2 - \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{4-1}{4a^2} - 4a^2 + 1 = \dfrac{3}{4a^2} - \dfrac{16a^4}{4a^2} + 1 = \dfrac{3 - 16a^4 + 4a^2}{4a^2} =$

Черновик

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$ $6ay$ $6ay$

$x^2-2\cdot x\cdot 2a+4a^2+$ $y^2+2\cdot y\cdot 3a+9a^2+y^2+2\cdot y\cdot 3a+9a^2$

$2(y^2+3ay+2a^2)$

$2(y^2+2\cdot y\cdot 1{,}5a+(1{,}5a)^2)$

$(x-y)^2+y^2+5a^2-4a(6y-4x)=0$

$\frac{4a^2+1}{2a}<3$

$x^2+2y^2+5a^2=2xy-6ay+4ax$

>0 >0

$\frac{4a^2+1-6a}{2a}<0$

$2xy-6ay+4ax>0$

$\frac{(2a)^2-4a+1-2a}{2a}<0$

$\frac{(2a-1)^2-2a}{2a}<0$

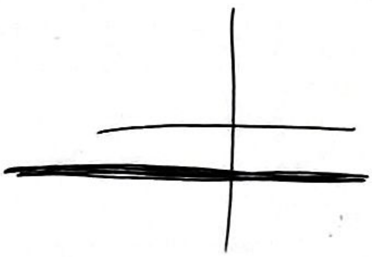
$4\cdot 4=16$

1

$5<6$

2

$1{,}5$



$a>0$

$(2a-1)^2<2a$

$a<$

$(x-e)^2+(y-c)^2=0$

$2y(3a-x$

$x^2-2ex+e^2+y^2-2cy+c^2=0$

$-4ax$ $4a^2$

$x>3$

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

$2\left(y^2+y(3a-x)+\frac{(3a-x)^2}{4}\right)$

$2a$

$-\frac{9a^2-6ax+x^2}{4}$

$2(y+3a-x)^2$

$y-x+3a$

$2(\ldots)^2-\frac{9a^2-\ldots}{4}+4ax+5a^2=0$

$2(x+y-3a)^2$

Черновик

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$

$34 a_1 = 592 - S$

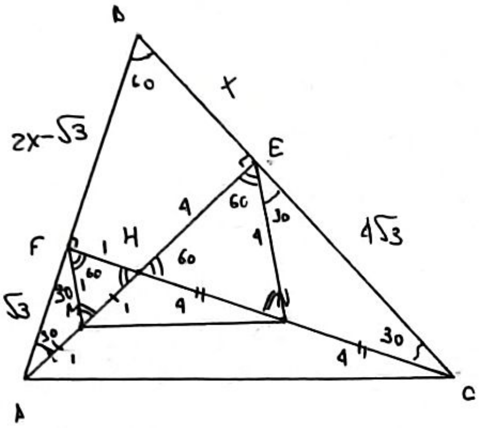
$\cancel{16}^{5} a_n = 59\cancel{6}^{2} - S$

$34 a_1 = 1\cancel{6}^{5} a_n$

$a_1 = \frac{15}{34} a_n$

$3 \cdot 5$

$17 \cdot 2$



FM=1

EN=4

FM ∥ EN

$S_{ABC} = ?$

$R - ?$

$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2}{8}$

$510 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = 592$

15 34

$a_1 = 1$

$a_n = \frac{34}{15}$

$8^2 - 4^2 = 64 - 16 = \sqrt{48}$

$8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

48 | 2

24 | 2

$a_n = \frac{34}{15} a_1$

49

$\frac{17 \cdot 2 \cdot a_1}{3 \cdot 5}$

$\cdot 10$

$82 - 49 = 33$

$2(2x - \sqrt{3}) = x + 4\sqrt{3}$

$4x - 2\sqrt{3} = x + 4\sqrt{3}$

$a_1 \vdots 15$

$a_1 = 15$

16 + 17

$3x = 6\sqrt{3}$

$x = 2\sqrt{3}$

$a_n = 34$

$34 a_1 >$

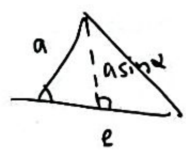
$34 \cdot 15 =$

$34 \times 15 = 170 + 34 = 510$

$510 = 592 - S$

$S = 82$

pR



20 + 21 + 22 + 19

63

19

$\frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60°$

9·2

pr

$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

2

$a_2 = 30$

$a_n = 68$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

$34 \cdot 30$

$\times 30$

1020

$S = \frac{\sqrt{3} a^2}{12}$

1020

$\frac{a \cdot a \cdot a}{2R} = \frac{a^3}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{}$

$\sqrt{3}$

60°

$a = 2r \, tg\left(\frac{180}{3}\right)$

$a = \sqrt{3} R$

$\frac{a}{\sqrt{3}}$

$2R = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

$a = 2\sqrt{3} r$

$\frac{a}{\sqrt{3}}$

Черновик

$5a^2-4ax-6a+x^2+2x+2=0$

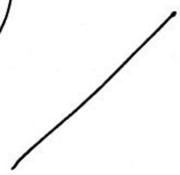
$x^2+2\cdot x\cdot(1-2a)+(1-2a)^2-(1-2a)^2+2-6a+5a^2=0$

$2\cdot x\,(1-\cancel{4}2a)$

$(x-1+2a)^2-1+4a-4a^2+2-6a+5a^2=0$

$(x+2a-1)^2+1-2a+a^2=0$

$(x+2a-1)^2+(a-1)^2=0$



$ax+by+c=0$

$x+2a-1=0$

$a-1=0$

$a=1$

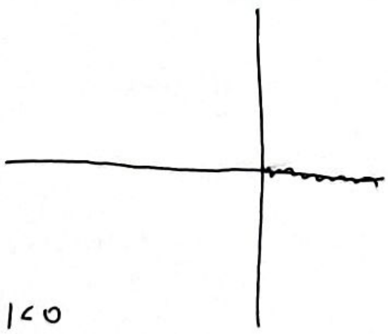
$x+2-1=0$

$x=-1$

$\frac{4a^2+1}{2a}=\frac{4+1}{2}=2{,}5$

$ax^2+ay^2-4a^2x-2x+2ay+4a^3+1=0$

$(x-y)^2+y^2$



$-4ax+6ay<0$

$-4x+6y<0$

$6y<4x$

$a<0$

$2a+1<3a$

$2a\cancel{a}-3a+1<0$

$a>0$

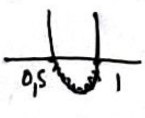
$2a^2+1>3a$

$2a+\frac{1}{a}>3$

$2a^2-3a+1>0$

$D=9-4\cdot2=1$

$a=\frac{3\pm1}{4}$ $a=1$ или $a=0{,}5$



$a\in(\cancel{-\infty}\,0;0{,}5)\cup(1;+\infty)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007100**

ID профиля: **351628**

Вариант 16

Черновик

$16^2 = 16 \cdot 16$

2

16^2

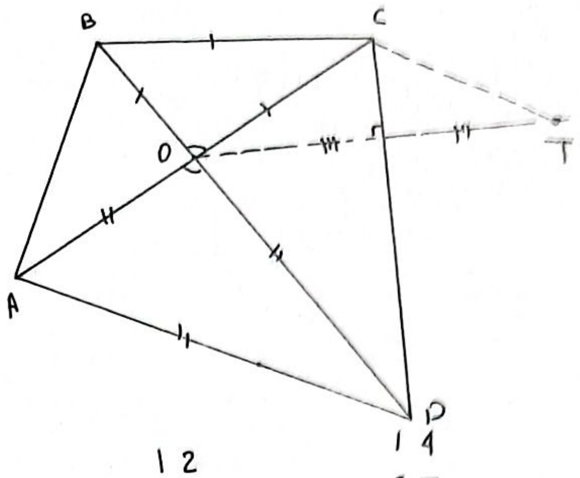
$\frac{16}{16^2} =$

3
9

· 12
· 21
· 13
· 31
· 11
· 22
· 33
· 23
· 32

16 дублей

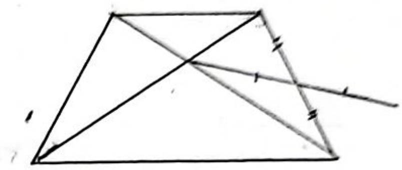
$\frac{16}{16^2} = \frac{1}{16}$



1 4
5 7

1 2
3 4
5 6
7 8
9 10
11 12
13 14
15 16

8



32

$16 / 16^2$

11
22
33
:
16 16

$n \leq 3$

$\frac{\cancel{16}^{8} \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15 = 80 + 40 = \underline{120}$

nn ab

$\frac{16(16^2 - 16 - (2 \cdot 16 - 1))}{2} =$

$16 \cdot \quad 8(16(16-3)$

$= 8(16^2 - 3 \cdot 16 + 1) = 8 \cdot 16 \cdot 13 + 8$

2n-1

$16 + 16 - 1$

$\frac{16(16^2 - 2 \cdot 16 + 1)}{2} = 8 \cdot 16 \cdot 14 + 8$

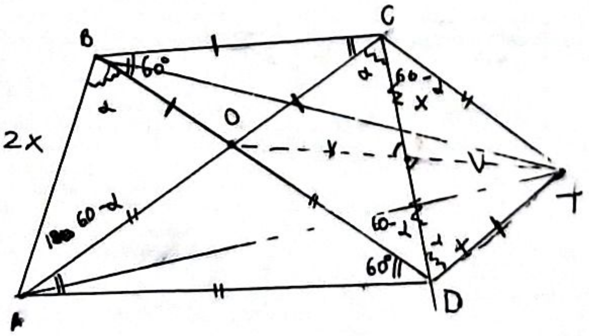
$8 \cdot 16 \cdot 13 + 8 + 8 \cdot 15$

$16(16^2 - 16 -$

$8 \cdot 16 \cdot$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 13 \\ \hline 48 \\ 16 \\ \hline 208 \\ \times\ 8 \\ \hline 1664 \end{array}$$

2x



Черновик

$2x^2+2y^2-x^2y^2=2$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19$

$x^2=a$

$y^2=b$

$$\begin{cases}2a+2b-ab=2\\ a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=19\end{cases}$$

$a^2+b^2+2ab-\frac{5}{2}ab=19$

$(a+b)^2=2,5ab+19$

$2(a+b)=2+ab$

$\cancel{a+b \quad ab+}$

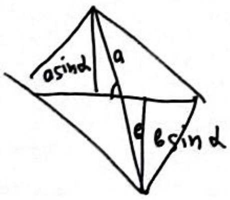
$\cancel{\frac{a+b}{2}=\frac{2,5ab+19}{2+ab}}$

$\cancel{(2+ab)(a+b)=5ab+38}$

$a(a-0,5)$

$\cancel{a(2-b)}$

$b(2-a)$



$\frac{1}{2}d\cdot a\sin\alpha+\frac{1}{2}d\,b\sin\alpha$

$\frac{1}{2}d\sin$

$3^2+8^2-3\cdot8$ (9, 64, 24)

49

$1+\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b}{2a}=\frac{19}{a^2}$

$a=$

$a(2-b)=2-2b$

$a+b-\frac{1}{2}ab=1$

$a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=19$

$a^2+b^2-a-b=18$

$a(a-1)+b(b-1)=18$

$a^2+b^2=18+a+b$

$a=\frac{2-2b}{2-b}$, $b\neq2$

$\frac{4(1-b)^2}{(2-b)^2}+b^2-\frac{(1-b)b}{2-b}=19$

$(b-b^2)(2-b)$

$(2b-b^2)^2$

$$\frac{4(1-b)^2+b^2(2-b)^2-(1-b)b(2-b)}{(2-b)^2}=19$$

$19\cdot4=76$

$4-8b+b^2+4b^2-4b^3+b^4-2b+2b^2+b^2-b^3=$

$=19(4-4b+b^2)$

$1-5-11+66-72$

$4-10b+8b^2-5b^3+b^4=76-76b+19b^2$

$\cancel{1\;5\;11\;66\;72}$

$b^4-5b^3-11b^2+66b-72=0$

$(b-5)b^3+11b(6-b)-72=0$

$(a+b)^2=19+2,5ab$

$(a+b)=1+0,5ab$

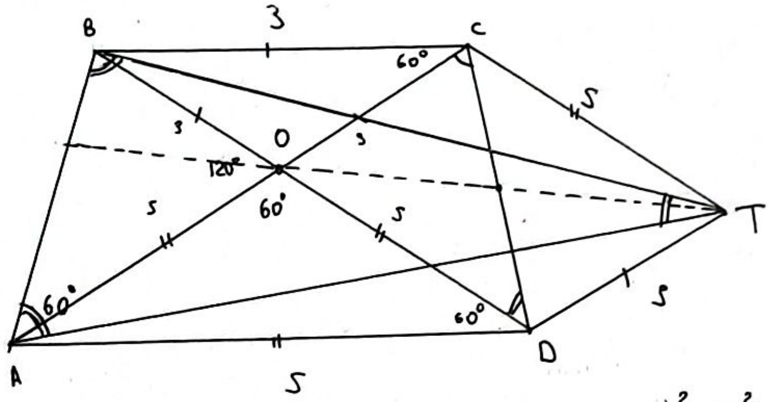
$(a+b+2)(a+b)=21+3,5ab$

$(a+b)(a+b-1)=18+2ab$

$a^2+ab+ab+b^2-a-b=$

$a^2+b^2=18+a+b$

Чорновик



$\times 62 \cdot 4$, 4, 248

$16 \times 12 = 32$, 16, 192, $+68$, 260

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 8^2 = 4 \cdot 8 = 32$

$\frac{1}{2} d_1 d_2$

$((x-y)^2+1)(x+y)^2 + xy(xy-2) = 21$

$y^8 = 2^8 = (2^4)^2 = 16^2$

$16^{4} \cdot 4$

$2x^2+2y^2-x^2y^2 = 2$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2 = 19$

$y^8-5y^6-8y^4+62y^2-68=0$

$16^2-16\cdot4\cdot5-8\cdot16+62\cdot4-68$

-12

$16(16-20-8)+62\cdot4-68$

$x^4+y^4+x^2+y^2-x^2y^2=21$

$(x^2-y^2)^2+x^2y^2+x^2+y^2=21$

$(x-y)^2(x+y)^2+x^2+2x^2y+y^2-2xy+x^2y^2=21$

$(x-y)^2(x+y)^2+(x+y)^2$

$a=x^2, \quad b=y^2$

$$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=19 \end{cases}$$

$19 \cdot 4 = 76$

2

$-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1$

$36+4\cdot72$

20

1

$a^2+b^2+a+b=18$

$a(a+1)+b(b+1)=18$

$n(n-1)(n+1) = n^2 - n$

$x^2(2-y^2)+2y^2=2$

$(2a+2b-ab)^2=4$

$+2{,}5ab$

$x^2 = \frac{2-2y^2}{2-y^2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(a+b)^2 = 19 + 2{,}5ab$

$2(a+b)=2+ab$

$x^4+y^4-\frac{(2-2y^2)y^2}{2(2-y^2)}=19$

$x^4+y^4-x^2-y^2=18$

$\frac{a+b}{2} = \frac{19+2{,}5ab}{2+ab}$

$x^2(x^2-1)+y^2(y^2-1)=18$

$\frac{y^4(2-y^2)+y^2-y^4}{2-y^2}$

$x^2(x-1)(x+1)+y^2(y-1)(y+1)=18$

$2+2y^2 \ldots = 2$

$y=0$

$x^4 = \frac{4(1-y^2)^2}{(2-y^2)^2} = \frac{4-8y^2+4y^4}{4-4y^2+y^4}$

$\frac{y^4(2-y^2)-y^2+y^4}{2-y^2}$

$= (3y^4-y^6-y^2)(2-y^2) =$

$\frac{3y^4-y^6-y^2}{2-y^2}+x^4=$

$= 6y^4-2y^6-2y^2-3y^6+y^8+y^4+4-8y^2+4y^4 = \frac{y^2(3y^2-y^4-1)(2-y^2)+4-8y^2+4y^4}{(2-y^2)^2}$

$= \frac{y^8-5y^6+11y^4-10y^2+4}{} = 19(2-y^2)^2 = 19(4-4y^2+y^4) = 72-72y^2+19y^4$

Чистовик, математика 9 класс

Задача №4.

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$a=x^2$
$b=y^2$

$2a+2b-ab=2$

$a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=19$

$2(a+b)=2+ab$

$(a+b)^2=19+2{,}5ab$

$a\neq -b$:

$\frac{a+b}{2}=\frac{19+2{,}5ab}{2+ab}=\frac{4+2ab}{2+ab}+\frac{15+0{,}5ab}{2+ab}=2+\frac{15+0{,}5ab}{2+ab}$

$a+b=\frac{2+ab}{2}$

$\frac{2+ab}{4}=\frac{19+2{,}5ab}{2+ab}$

$4+4ab+a^2b^2=76+10ab$

$a^2b^2-6ab-72=0$

$D=36+4\cdot 72$

$ab=\frac{6\pm\sqrt{36+4\cdot 72}}{2}=3\pm\sqrt{9+72}=3\pm 9$

Чистовик, математика 9 класс

2

Задача №5.

1) ~~[illegible]~~ Способов вытащить 2 дубля:

$$\frac{16\cdot(16-1)}{2} = 8\cdot 15 = 120$$ вариантов

2) Если одна из карт дубль, а другая не дубль, то не-дубль ~~[illegible]~~ не должен иметь числа, схожие с дублем (раз это не-дубль, то между собой они ~~[illegible]~~ не могут быть схожи). Таких карточек:

$$16^2 - \underset{\text{дубли}}{16} - \underset{\text{карт.}}{(16+16-1)} = 16^2 - 16 - 2\cdot 16 + 1 = 16(16-3)+1 = 16\cdot 13+1$$

1) карт. с числом с одной стор.

2) карт. с числом с другой стор.

3) 1 - дубль ~~[illegible]~~ с этим числом

Кол-во ~~[illegible]~~ способов вытащ. дубль и не-дубль:

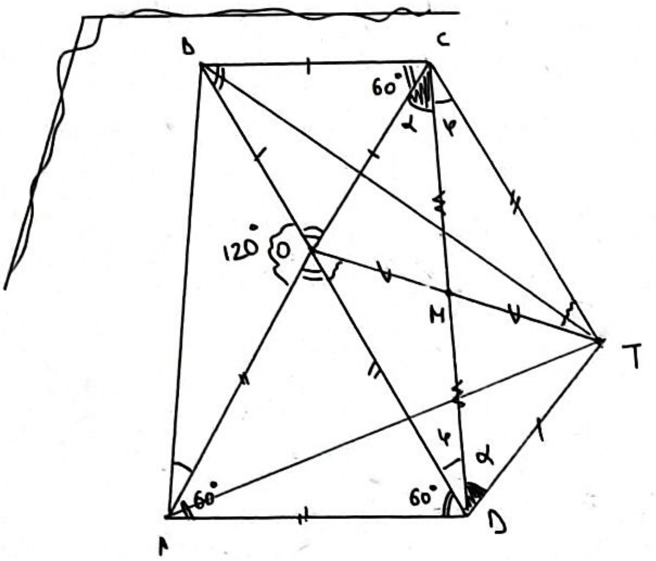
$$\frac{16\cdot(16\cdot 13+1)}{2} = 8\cdot 16\cdot 13 + 8 = 1664$$

Общ. кол-во способов: $1664 + 120 = 1784$ варианта

Ответ: 1784 способа

Чистовик, математика 9 класс

Задача №6:



Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{46}{64}$

1) Раз $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ прав., то их угл. равны 60°, тогда $ABCD$ - трапеция, т.к. $BC \parallel AD$ из-за $\angle CBD = \angle ADB$ (накр.леж.), причём она равноб. т.к. $\triangle ABO = \triangle DCO$ по 2 ст. и угл. между ними, тогда $AB = CD$

*

...

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

По теор. косинусов:

$AB^2 = BO^2 + OA^2 - 2 \cdot BO \cdot OA \cdot \cos 120^\circ$

$AB^2 = BC^2 + AD^2 + BC \cdot AD = 9 + 25 + \overset{15}{3 \cdot 5} = 49$

$AB = 7$

$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3} \cdot AB^2}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot 7^2}{4} = \frac{49}{4}\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49\sqrt{3}}{16 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{49}{64}$

* 1) Доп. постр. CT и DT, $CT = OD$, т.к. $\triangle OMD = \triangle CMT$ по 2 ст. и углу, $DT = OC$ т.к. $\triangle OMC = \triangle DMT$ по 2 ст. и углу.

2) Обозначим $\angle OCM = \alpha = \angle TDM^{**}$ и $\angle MCT = \varphi = \angle ODM^{**}$ (** из равен. треуг.)

$\triangle ADT = \triangle BCT$ по 2 ст. ($AD = CT$, $DT = OC$) и углу $(60 + \alpha + \varphi)$,

тогда $BT = AT$ смеж. с $\angle BOC$

Из треуг $\triangle OCD$ $\alpha + \varphi = 180 - (180 - 60) = 60^\circ$, тогда $\angle BCT = 120^\circ$

3) $\triangle ABO = \triangle BCT$ по 2 стор. и углу между ними (120°), тогда $AB = BT = AT$, $\triangle ABT$ равностор.