Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006985**

ID профиля: **329580**

Вариант 16

чистовик , страница 1. Вариант 16

Задача 2.

Пусть всего чисел i. ~~Пронумерем~~ Обозначим их в порядке возрастания: $a_1, a_2, a_3 \dots a_i$.

$35a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_i = 592$ (1)

$a_1 + a_2 + \dots + 16a_i = 592$ (2)

Отнимем уравнения друг от друга:

$34a_1 - 15a_i = 0 \Rightarrow 34a_1 = 15a_i$.

Т.к. 34 и 15 взаимнопросты, то a_1 кратно 15, а a_i кратно 34. Пусть $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{i-1} = S$

Т.к. $a_1 \geqslant 15$, то подставляя это в (1), получим, что: $S + a_i \leqslant 67$ (3)

Т.к. $a_i \geqslant 34$, то подставляя это в (2), получим, что $S + a_1 \leqslant 48$ (4). Сложим (3) и (4):

$a_1 + 2S + a_i \leqslant 115$, т.е. $a_1 + a_i \leqslant 115$. Рассмотрим все такие случаи: когда $a_i = 34$, $a_1 = 15; 30$ (45 уже не может быть, т.к. $a_i \geqslant a_1$). Когда $a_i = 68$, $a_1 = 15;$ 30; 45 (60 уже нет, т.к. $68 + 65 > 115$). Если $a_i = 102$, то $102 + 15 > 115$.

1) Пусть $a_1 = 15$, $a_i = 34$. Подставим это в (1) и (2):

$15 \cdot 35 + S + 34 = 592$

$15 + S + 16 \cdot 34 = 592 \Rightarrow S = 33$.

Если S состоит из 1 слагаемого, то это единственный случай: $a_1 = 15$, $a_2 = 33$, $a_3 = 34$.

Если S состоит из 2-х слагаемых, то рассматривая 2 наименьших, т.е. 16 и 17, получим, что их сумма 33, значит тут также единственный случай.

2) Пусть $a_1 = 30$, $a_i = 34$. Подставим в (1):

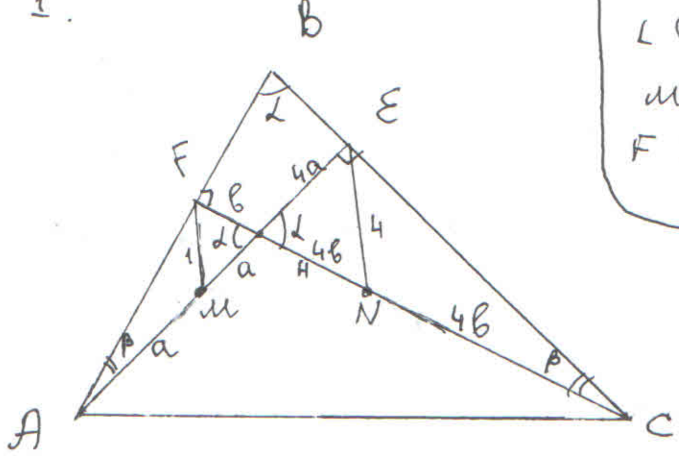
$30 \cdot 35 + S + 34 = 582 \Rightarrow S < 0$ - неверно

3) Пусть $a_1 = 15$, $a_i = 68$: Подставим в (1):

$15 \cdot 35 + S + 68 = 592 \Rightarrow S < 0$ - неверно. Очевидно, что для остальных случаев S также меньше 0.

Ответ: 15, 33, 34; 15, 16, 17, 34.

Задача 1.



$\angle CHE = \alpha$

$MH = a$

$FH = b$

Из $\triangle CHE$: $\sin\beta = \frac{4a}{8b} = \frac{a}{2b}$

Из $\triangle AFH$:

$\sin\beta = \frac{b}{2a} \Rightarrow a = b.$

$\sin\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$

$\alpha = 90 - \beta = 60^\circ$

Из $\triangle FHM$ по теор. косинусов:

$1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, т.к. $a = b$, $\cos\alpha = \cos 60 = \frac{1}{2}$:

$1^2 = 2a^2 - a^2 = a^2 \Rightarrow a = b = 1.$

$BE = AE \cdot tg\,\beta = 6a\,tg\,30 = 6\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

$EC = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$

$S_{ABC} = S_{ABE} + S_{CEA} = \frac{1}{2}AE \cdot BE + \frac{1}{2}AE \cdot EC =$

$= \frac{1}{2}AE(BE + EC) = \frac{1}{2}6a(2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$

$R = \frac{AC}{2\sin\alpha}$ $\quad AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{(6a)^2 + (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{21}$

$R = \frac{2\sqrt{21}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{7}$

$\angle ABC = \alpha = 60^\circ$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$; $R = 2\sqrt{7}$

черновик (1)

2) $a_1, a_2 \dots, a_i$

$35a_1 + a_2 + \dots + a_i = 592$

$a_1 + a_2 + \dots + 16a_i = 592$

$34a_1 - 15a_i = 0; \quad \underset{=2\cdot 17}{34}a_1 = \underset{=3\cdot 5}{15}a_i$

$a_1 \geq 15; \; a_i \geq 34 \qquad a_1 \vdots 15; \; a_i \vdots 34$

$15 + 16 + \dots + 34 = \;?$

$S + a_i \leq 67$

$S + a_1 \leq 48$

$a_1 + 2S + a_i \leq 67 + 48 = 115$

$32 + 33 + 34 = 90 + 9 = 99$

$99 + 31 + 30 = 99 + 61 = 160$

15, 30, 45, 60, 75, 90, 105

34, 68, 102

$34 - 15 \qquad 34 + 15 = 49 \qquad 49 + 66 = 115$

$34 - 30 \qquad 34 + 30 = 64$

$68 - 15 \qquad 68 + 15 = 83$

$68 - 30 \qquad 68 + 30 = 98$

последний $68 - 45 \qquad 68 + 45 = 113$

варианты

1) $15 \cdot 35 + S + 34 = 592 \qquad S = 592 - 525 - 34 = 67 - 34 = 33$

$15 + S + 16 \cdot 34 = 592 \qquad S = 592 - 544 - 15 = 48 - 15 = 33$

$\underbrace{15 \dots 34}_{33}$

1. 15, 33, 34

15, 16, 17, 34

2) $30 \cdot 35 + S + 34 = 592 \qquad S = 592 - 30 \cdot 35 - 34 < 0$ – нет.

~~$30 + S + 16 \cdot 34 = 592$~~

3) $15 \cdot 35 + S + 68 = 592 \qquad S = 592 - 15 \cdot 35 - 68 = 67 - 68 < 0$

$15 + S + 68 \cdot 16 = 592$

34

$35 \cdot 17 = 595$ (245 + 35)

$15 \cdot 7 = 105$

$595 - 105 = 490$

$35 \cdot 15 = 525$ (175 + 35)

$592 - 525 = 67$

$34 \cdot 16 = 544$ (204 + 34)

$592 - 544 = 48$

$35 \cdot 17 - 7 \cdot 15 = 490$

~~$30 + \dots + 34$~~

102

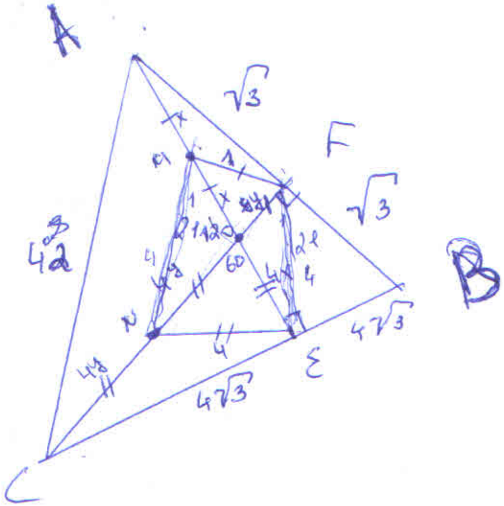
$68 + 34 = 102$

$16 + 17 = 33$

черновик.

(2)

1)



$CE = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64-16} =$

$= \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} =$

$= 4\sqrt{3}$

$AF = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$p = \dfrac{42 + 10\sqrt{3}}{2} = 21 + 5\sqrt{3}$

$$\frac{8y}{2x} = \frac{4x}{y} \Rightarrow \frac{4y}{x} = \frac{4x}{y}$$

$4x^2 = 4y^2 \Rightarrow x = y = 1$

$MN^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cos 120 = 1 + 16 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 17 + 4 = 21$

~~$S^2 = (21 + 5\sqrt{3}) \cdot$~~

$MN = \sqrt{21}$ $\qquad AC = 2\sqrt{21}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006985**

ID профиля: **329580**

Вариант 16

чистовик. Страница 1. Вариант 16.

Задача 2.

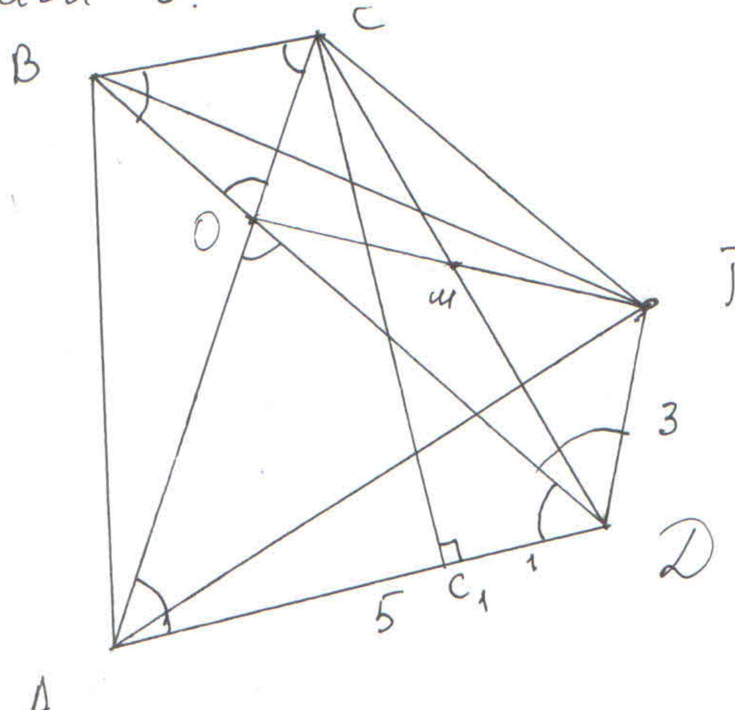
Одному дублю соответствует $(16^2 - 16 - 16 + 1)$ – пар карточек.

Значит 16-ти дублям соответствует $16(16^2 - 16 - 16 + 1)$ – вариантов пар. $= 16 \cdot 225 = 3600$.

Ответ: 3600.

Исдвик. Вариант 16, страница 2.

Задача 3.



DOCT – параллелограмм
ABCD – равнобок. трап-я
BCTD – равнобок. трап-я
CTDA – равнобок трап-я

$CC_1 = h$

$C_1D = 1$

$\triangle BCT = \triangle TDA$, т.к. $BC = DT$, $CT = DA$, а $\angle BCT = \angle TDA = 120^\circ$ (следует из того, что $BD \parallel CT$, а $AC \parallel TD$). Значит $BT = TA$.

$\triangle BTD = \triangle BCA$ ($DT = BT$, $BD = AC$, т.к. это диагонали $ABCD$, $\angle BDT = \angle ACB = 60^\circ$) $\Rightarrow BT = AB = AT$. ЧТД. Пункт (а) доказан.

Из $\triangle ATD$: $AT^2 = 9 + 25 - 2 \cdot 15 \cos 120 = 49 = AB^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = 7 = AT = BT$ – стороны $\triangle ABT$.

$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AT \cdot \sin 60 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \sin 60 = \frac{49}{4}\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(5+3)h = 4h$

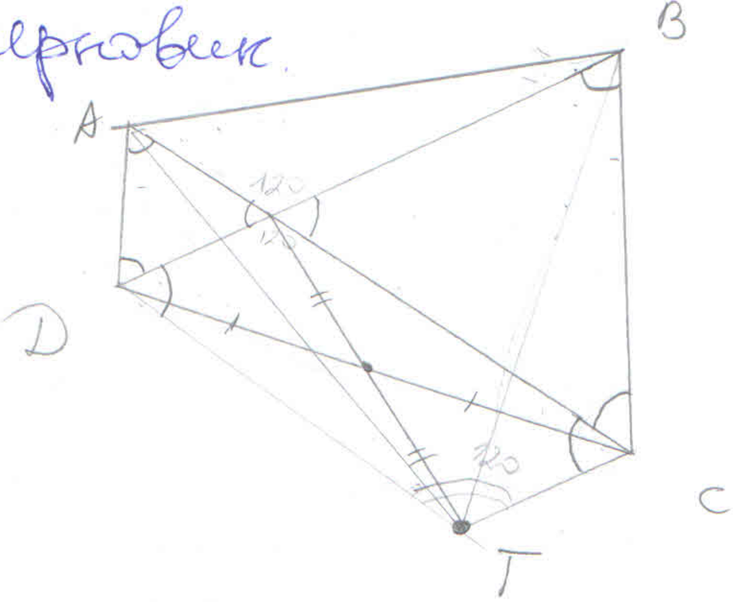
$h^2 = 7^2 - 1^2 = 48 \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$

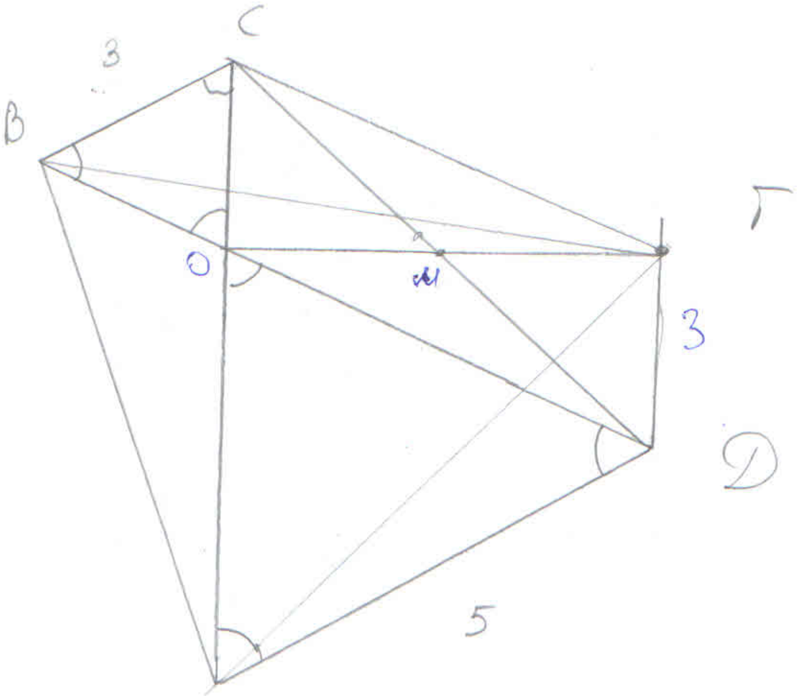
$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49}{64}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{49}{4}\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} = \frac{49}{64}$

черновик

3





$AB^2 = 9 + x^2 - 6x\cos 60 = 9 + x^2 - 3x$

$AB^2 = 25 + x^2 - 10x\cos 60 = 25 + x^2 - 5x$

$25 - 10x = 9 - 3x$

$7x = 16$ $\quad AB^2 = 9 + \frac{256}{49} - \frac{48}{7} = 9 - \frac{80}{7} =$

$x = \frac{16}{7}$

$25 - 5x = 9 - 3x$ $\quad AB^2 = 9 + 64 - 24 = 49$

$2x = 16 \quad x = 8$

$AB^2 = 25 + 9 + 15 = 49$

Черновик (1)

$x^2 = a$
$y^2 = b$

$2x^2 + 2y^2 - x^2y^2 = 2$

$x^4 + y^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 = 19$

$2a + 2b - ab = 2$

$a^2 + b^2 - \frac{1}{2}ab = 19$

$a(2-b) + b - 2 + b = 0$

$(a-b)^2 + \frac{3}{2}ab = 19$

$a(2-b) = 2 - 2b$

$a = \frac{2-2b}{2-b}$

$\left(\frac{2-2b}{2-b}\right)^2 + b^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2-2b}{2-b} \cdot b = 19$

$\frac{4-8b+4b^2}{4-4b+b^2} + b^2 - \frac{b-b^2}{2-b} = 19$

$-a(2-b) + 2 - b - b = 0$

$(2-b)(1-a) - b = 0$

$a(2-a) + b(2-b) - \frac{1}{2}ab = -17$

$(2-b)(3-a-b) + a(2-a) - b - \frac{1}{2}ab = -17$

$(a-b)^2 + 3a^2 + 3b^2 = 76$

$\frac{4-8b+4b^2-(b-b^2)(2-b)}{(2-b)^2} + b^2 = 19$

$\frac{4-8b+4b^2-2b+b^2+2b^2-b^3}{(2-b)^2} + b^2 = 19$

черновик (2)

$$\frac{4-10b+7b^2-b^3}{(2-b)^2}+b^2=19$$

$$\frac{4-10b+7b^2-b^3+b^2(2-b)(2-b)}{(2-b)^2}=19$$

$$\frac{4-10b+7b^2-b^3+b^2(4-4b+b^2)}{(2-b)^2}=19$$

$$4-\underline{10b}+\underline{7b^2}-b^3+\underline{4b^2}-4b^3+b^4=76-\underline{76b}+\underline{19b^2}$$

$$-8b^2+66b-5b^3+b^4-72=0$$

$$\cancel{-8\ -66\ +5}$$

$$-32+132-40+16-72\neq 0$$

$$\cancel{+32\ \wedge\ 132}$$

$$2a+2b-ab=2$$

$$a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=19 \qquad (a+b)^2-\frac{5}{2}ab=19$$

$$(a+b)^2+2(a+b)-\frac{7}{2}ab=21$$

$$(a+b)(a+b+2)-\frac{7}{2}ab=21$$