Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

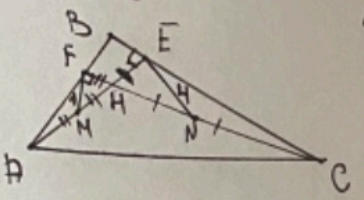
Шифр: **211006728**

ID профиля: **175248**

Вариант 16

Чистовик

1.



Дано: $\triangle ABC$: $\angle A, \angle B, \angle C < 90^\circ$

$CF \perp AB$, $AE \perp BC$

$CF \cap AE = H$

M: $AM = MH$

N: $CN = NH$

$FM = 1$

$EN = 4$

$FM \parallel EN$

Окр$(O; R)$ - опис.

Найти: $\angle ABC$; S_{ABC}; R

Решение:

Р-м $\triangle FMH$ и $\triangle HEN$

$\angle FHM = \angle EHN$ (как верт.)

$\angle FMH = \angle HEN$ (как ВН/У при $FM \parallel EN$, ME - сек.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\triangle MFH \sim \triangle HEN$ (по 2 $\angle$) $\Rightarrow \frac{FM}{EN} = \frac{FH}{HN} = \frac{MH}{HE} = \frac{1}{4}$

$\frac{FH}{HN} = \frac{1}{4}$

$HN = \frac{1}{2} HC$ (по усл.) $\Rightarrow \frac{FH}{HC} = \frac{1}{8} \Rightarrow 8FH = HC$, $FH = \frac{HC}{8}$

$\frac{MH}{HE} = \frac{1}{4}$

$MH = \frac{1}{2} AH$ $\Rightarrow \frac{AH}{HE} = \frac{1}{2} \Rightarrow HE = 2AH$, $AH = \frac{HE}{2}$

Р-м $\triangle AFH$ и $\triangle HEC$

$\angle AFH = \angle HEC = 90^\circ$ (по усл.)

$\angle AHF = \angle EHC$ (как верт.) $\Rightarrow \triangle AFH \sim \triangle HEC$ (по ост. $\angle$) $\Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{FH}{HE}$

$\frac{AH}{8FH} = \frac{FH}{2AH} \Rightarrow 2AH^2 = 8FH^2$

$AH^2 = 4FH^2$

$AH = 2FH$ (они не могут быть разных знаков $\Rightarrow AH \neq -2FH$)

$\frac{\frac{HE}{2}}{HC} = \frac{\frac{HC}{8}}{HE} \Rightarrow \frac{HE}{2HC} = \frac{HC}{8HE} \Rightarrow 8HE^2 = 2HC^2$

$4HE^2 = HC^2$

$HC = 2HE$ (они не могут быть разных знаков $\Rightarrow HC \neq -2HE$)

Р-м $\triangle AHF$:

$\angle AFH = 90^\circ$

$\sin\angle FAH = \frac{FH}{AH} = \frac{FH}{2FH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle A = 30^\circ$ или $\angle A = 150^\circ$, но $150 + 90 > 180$ что невозможно

Чистовик

1. (Продолжение)

Р-м $\triangle ABH$:

$\angle AEB = 90^\circ$ (по усл.)
$\angle BAE = 30^\circ$ (по док.) $\Rightarrow$ $\boxed{\angle ABC = 60^\circ}$ (по сумме ост. $\angle$. прямоугол. $\triangle$)

$\angle FHM = 60^\circ$ (т.к. $\triangle FAH$ - прямоугол., $\angle A = 30^\circ$)
$\angle FHM = \angle EHC$ (как верт.) $\Rightarrow \angle FHM = \angle EHC = 60^\circ$

по т. косинусов

$FM^2 = MH^2 + FH^2 - 2MH \cdot FH \cdot \cos 60$
$MH = FH$ (т.к. $FH = \frac{1}{2}AH$ и $MH = \frac{1}{2}AH$) $\Rightarrow 1^2 = 2MH^2 - 2MH^2 \cdot \frac{1}{2}$

$1 = MH^2$

$MH = 1$ или $MH = -1$
но такое невозможно

$\Downarrow$

$MH = 1 \Rightarrow AM = MH = FH = 1$

по т. косинусов

$EN^2 = EH^2 + HN^2 - 2EH \cdot HN \cdot \cos 60$
$EH = HN$ (т.к. $EH = \frac{1}{2}HC$, $HN = \frac{1}{2}HC$) $\Rightarrow 4^2 = 2EH^2 - 2EH^2 \cdot \frac{1}{2}$

$4^2 = EH^2$

$EH = 4$ или $EH = -4$
Такое невозможно

$\Downarrow$

$EH = 4 \Rightarrow HE = HN = NC = 4$

Р-м $\triangle EHC$:

$\angle HEC = 90^\circ$ (по усл.)
$HE^2 + EC^2 = HC^2$ (по т. Пифагора)
$4^2 + EC^2 = 8^2$
$EC^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow EC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

Р-м $\triangle AFH$:

$\angle AHF = 90^\circ$ (по усл.)
$HF^2 + AF^2 = AH^2$ (по т. Пифагора)
$1^2 + AF^2 = 2^2$
$AF^2 = 4 - 1 \Rightarrow AF = \sqrt{3}$

211006728 (U175248 M1275168)

Чистовик

1. (Продолжение II)

Р-м $\triangle AFH$ и $\triangle ABE$

$\angle AFH = \angle AEB = 90^\circ$ (по усл.)
$\angle A$ - общ.

$\Rightarrow \triangle AFH \sim \triangle ABE$ (по ост. $\angle$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{FH}{BE} = \frac{AF}{AE}$ (как сходственные стороны)

$AH = 2$ (по док.)
$FH = 1$ (по док.)
$AF = \sqrt{3}$ (по док.)
$AE = 1+1+4 = 6$ (по док.)

$\Rightarrow \frac{2}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

Р-м $\triangle EHC$ и $\triangle BFC$:

$\angle BFC = \angle HEC = 90^\circ$ (по усл.)
$\angle C$ - общ.

$\Rightarrow \triangle BFC \sim \triangle HEC$ (по ост $\angle$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{HC}{BC} = \frac{EC}{FC}$

$HC = 8$ (по док.)
$EC = 4\sqrt{3}$ (по док)
$FC = 4+4+1 = 9$ (по док.)

$\Rightarrow \frac{8}{BC} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \Rightarrow BC = \frac{9 \cdot \cancel{8}^{2}}{\cancel{4}\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin ABC}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$

по т. косинусов

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 60$

$AC^2 = 48 + 108 - \cancel{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 156 - 72 = 84$

$AC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

по т. синусов

$\frac{AC}{\sin B} = 2R \qquad \frac{2\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$

$4\sqrt{7} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{7}$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$; $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$; $R = \sqrt{7}$

211006728 (U175248 M1275168)

Чистовик

2. Пусть числа $a_1 \ldots a_n$

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

$$- \begin{cases} 35a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 592 \\ a_1 + a_2 + \ldots + 16a_n = 592 \end{cases}$$

$34a_1 - 15a_n = 0$ НОД$(15; 34) = 1$

$34a_1 = 15a_n$

$\Downarrow$

$a_1 \vdots 15 \quad a_n \vdots 34$

Пусть $a_1 = 15$

$35 \cdot 15 + a_2 + \ldots + a_n = 592$

$a_2 + \ldots + a_n = 67$

Если $a_n = 34$, то $a_2 + \ldots + a_{n-1} = 33$

$15 < a_i < 34 \Rightarrow a_2 = 16, a_3 = 17$

Получим $15; 16; 17; 34$

Если $a_n = 34 \cdot 2 = 68 \Rightarrow a_2 + \ldots + a_{n-1} = -1$, это невозможно

Пусть $a_1 = 15 \cdot 2$

$35 \cdot 30 = 1050 > 592 \Rightarrow$ такое невозможно

Проверим при $a_1 = 15, a_n = 34$

$15 + 16 + 17 + 34 \cdot 16 = 592$ верно

Ответ: $15; 16; 17; 34$

211006728 (U175248 M1275168)

Чистовик.

3 В: $a^2x^2+a^2y^2-2ax-4a^3x+2a^2y+4a^4+1=0$

$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0 \quad | : a^2$

если $a=0$, то $1=0$ неверно $\Rightarrow a\neq 0$

$x^2-4ax-\frac{2x}{a}+y^2+2y+4a^2+\frac{1}{a^2}=0$

$x^2-2x\left(2a+\frac{1}{a}\right)+y^2+2y+1+4a^2+\frac{1}{a^2}=1$

$x^2-2x\left(2a+\frac{1}{a}\right)+\left(2a+\frac{1}{a}\right)^2+(y+1)^2=5$

$\left(x-\left(2a+\frac{1}{a}\right)\right)^2+(y+1)^2=5$

Центр $\left(2a+\frac{1}{a}; -1\right)$ $R=\sqrt{5}$

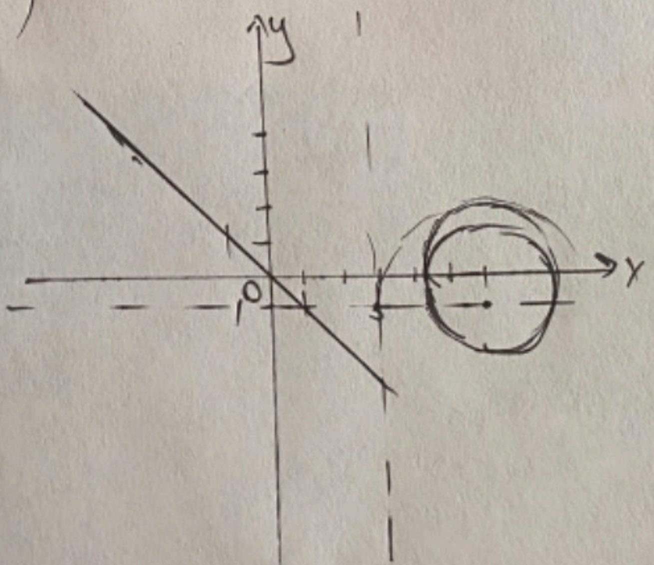
А: $5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=6$

$x^2-2x(2a+y)+(2a+y)^2+a^2+2ay+y^2=0$

$(x-(2a+y))^2+(a+y)^2=0$

$\begin{cases} x=2a+y \\ y=-a \end{cases}$ $\begin{cases} x=a \\ y=-a \end{cases}$ $A(a;-a)$

А лежит на прямой $y=-x$

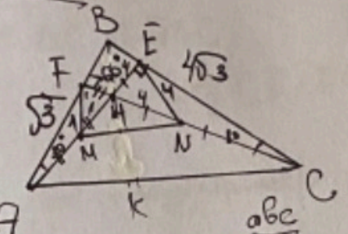


Ответ: при $a\in(-\infty;3]$

211006728 (U175248 M1275168)

Черновик

1\.



$R_{опи} = \frac{abc}{4R}$

Дано: $\triangle ABC$: $\angle A, \angle B, \angle C < 90°$

$CF \perp AB$, $AE \perp BC$

$CF \cap AE = H$

$M: AM = MH$

$N: CN = NH$

$FM = 1$

$EN = 4$

$FM \parallel EN$

Окр$(O; R)$ - опис.

Найти: $\angle ABC$, S_{ABC}; R

Решение:

$S = \frac{abc}{4R}$

Р-м $\triangle MFH$ и $\triangle HEN$

$\angle FHM = \angle EHN$ (как верт.)

$\angle FMH = \angle HEN$ (как внлу при $FM \parallel EN$ ME - сек.) $\Big| \Rightarrow \triangle MFH \sim \triangle HEN$ (по 2 $\angle$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{FM}{EN} = \frac{FH}{HN} = \frac{MH}{HE} = \frac{1}{4}$ $\qquad 8FH = HC$

$\frac{FH}{HN} = \frac{1}{4}$

$HN = \frac{1}{2} HC$ (по усл.) $\Big| \Rightarrow \frac{FH}{HC} = \frac{1}{8}$

$\frac{MH}{HE} = \frac{1}{4}$

$MH = \frac{1}{2} AH$ $\Big| \Rightarrow \frac{AH}{HE} = \frac{1}{2}$ $\qquad \cancel{AH = \frac{HE}{2}}$ $HE = 2AH$

Р-м $\triangle AFH$ и $\triangle HEC$

$\angle AFH = \angle HEC = 90°$ (по усл.)

$\angle HAF = \angle EHC$ (как верт.) $\Big| \Rightarrow \triangle AFH \sim \triangle HEC$ (по ост. $\angle$) $\Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{FH}{HE} = \frac{AF}{EC}$

$\frac{AH}{8FH} = \frac{FH}{2AH}$

$2AH^2 = 8FH^2$

$AH^2 = 4FH^2$

$AH = 2FH$

$\frac{\frac{HE}{2}}{HC} = \frac{\frac{HC}{8}}{HE}$ (отриц. быть не может)

$\frac{HE}{2HC} = \frac{HC}{8HE}$

$8HE^2 = 2HC^2$

$4HE^2 = HC^2$

$HC = 2HE$

Р-м $\triangle AHF$:

$\angle AFH = 90°$

$\sin A = \frac{FH}{AH} = \frac{FH}{2FH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle A = 30°$

Р-м $\triangle ABH$: $\angle AEB = 90°$

$\angle BAE = 30°$ $\Big| \Rightarrow \angle ABC = 60°$

211006728 (U175248 M1275168)

Черновик $\quad \frac{AB}{\sin C} \quad \frac{AC}{\sin B} = 2R$

$R_{опис} =$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin ABC$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} CF \cdot AB, = \frac{1}{2} BC \cdot AE$

$S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$

$S_{ABC} = pr$, где p - полупериметр

$MN = \frac{1}{2} AB$ (как ср. линия $\triangle AHC$)

$\angle FHM = \angle HHN = 60°$ (как верт.) а $60°$ из смежности

$FM^2 = MH^2 + FH^2 - 2 \cdot MH \cdot FH \cdot \cos 60$

$1 = 2MH^2 - 2MH^2 \cdot \frac{1}{2}$

$1 = 2MH^2 - MH^2$

~~$MH(2MH-1) = 1$~~

~~$2MH^2 - MH - 1 = 0$~~

~~$D = 1 + 8 = 9$~~

~~$MH_1 = \frac{1+9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$~~

~~$MH_2 = \frac{1-9}{4} < 0$~~

$MH^2 = 1$

$MH = \pm 1$, но -1 невозможно

$EN^2 = HE^2 + HN^2 - 2HE \cdot HN \cdot \cos 60$

$16 = 2HE^2 - HE^2$

$16 = HE^2$

$HE = \pm 4$, но -4 невозможно

~~$MN^2 = HN^2 + MH^2 - 2HN \cdot MH \cdot \cos 120$~~

~~$MN^2 = 16 + 1 + 4$~~

~~$MN^2 = 21$~~

~~$MN = \sqrt{21} \Rightarrow AC = 2\sqrt{21}$~~

~~$S_{ABC} = \frac{1}{2}$~~

$EC = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{(8-4)(8+4)} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$CF = 4 + 4 + 1 = 9$

$AB - ?$

$AF = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$\triangle FBC \sim \triangle EHC$

$\frac{EH}{FB} = \frac{BC}{HC} = \frac{EC}{FC}$

$\frac{4}{FB} = \frac{BC}{HC} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

$\frac{BC}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad BC = \frac{32\sqrt{3}}{9}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32\sqrt{3}}{9} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$

$\triangle ABE \sim \triangle FBK$

$\frac{AH}{AB} = \frac{FH}{BE} = \frac{AF}{AE}$

$\frac{2}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$AB = 4\sqrt{3}$

$2\sqrt{21} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} =$

$36 = \frac{4\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{63}}{3} =$

$0 = \frac{4 \cdot 3\sqrt{7}}{3} \quad 84$

42 + 108 = 56 - 78 = 84

$3 \times 3 = 72 \quad 84$

Черновик

Черновик

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

Окр $\cancel{5a^2}\cdot a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0$

$\cancel{5a^2-4ax+6ay+(x-y)^2}=$

$5a^2-4a(x-2y)+2ay+(x-2y)^2-2ay=0$

$\cancel{5a^2-(x-2y)(4a+x-2y)-2ay=0}$

$x^2-4ax+4a^2+2y^2+6ay+a^2=0$

$\cancel{(x-2a)^2+2(y^2+3y+\frac{9}{4}a^2)}-\cancel{3,5}a^2=0$

$\cancel{(x-2a)^2+2(y+\frac{3}{2}}$

$\cancel{x^2+6}(x^2-2xy+y^2)+y^2-4ax+6ay+5a^2=0$

$(x-y)^2\cancel{=}4a(x-y)+y^2$

Черновик
8. Пусть у нас числа $a_1 \ldots a_n$.
При увеличении одного получается $35a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=592$
$a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$
При увеличении крайнего $a_1+a_2+a_3+\ldots+16a_n=592$

$$-\begin{cases} 35a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=592 \\ a_1+a_2+a_3+\ldots+16a_n=592 \end{cases}$$

$34a_1-15a_n=0$

$34a_1=15a_n$

$a_1=\frac{15a_n}{34}$, по условию числа - N => $15a \vdots 34$ => $a \vdots 34$ т.к $15 \not\vdots 2$; $15 \not\vdots 17$

Так же $a_1 \vdots 15$
Пусть $a_1=15$, тогда
$35\cdot15+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n=592$
$a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n=67$
Пусть $a_n=34$ тогда $a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}=33$
значит $15<a_i<34$, значит
$a_2=16$, $a_3=17$
(Проверим при $a_n=34\cdot2=68$
$67-68=-1$ не удов.
При $a_1=15\cdot2$, $30\cdot35=1050$
$1050>592$ => невозможно
Проверка: $15+16+17+34\cdot16=592$ верно
Ответ: 15, 16, 17, 34

$35\times15=175+35=525$; $592-525=67$
$35\times30=1050$
$34\times16=204+34=544$; $544+16=560$; $560+15=575$; $575+17=592$

211006728 (U175248 M1275168)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006728**

ID профиля: **175248**

Вариант 16

(4) Чистовик

1. $\begin{cases} 2x^2+2y^2-(xy)^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}(xy)^2=19 \end{cases}$

Пусть $x+y=a$, $xy=b$, тогда $x^2+y^2=a^2-2b$

$(x^2+y^2)^2=(a^2-2b)^2$

$x^4+y^4+2(xy)^2=(a^2-2b)^2$

$x^4+y^4=(a^2-2b)^2-2b$

Получаем

$\begin{cases} 2(a^2-2b)-b^2=2 \quad :2 \\ (a^2-2b)^2-2b-\frac{1}{2}b^2=19 \end{cases}$ $\begin{cases} (a^2-2b)-\frac{b^2}{2}=1 \\ (a^2-2b)^2-2b^2-\frac{b^2}{2}=19 \end{cases}$

$\begin{cases} (a^2-2b)-\frac{b^2}{2}=1 \quad |\cdot(-5) \\ (a^2-2b)^2-\frac{5b^2}{2}=19 \end{cases}$ $+\begin{cases} -5(a^2-2b)+\frac{5b^2}{2}=-5 \\ (a^2-2b)^2-\frac{5b^2}{2}=19 \end{cases}$

$(a^2-2b)^2-5(a^2-2b)-14=0$

по т. Виета

$a^2-2b=7$ или $a^2-2b=-2$

$\begin{cases} a^2-2b=7 \\ 2(a^2-2b)-b^2=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} a^2-2b=-2 \\ 2(a^2-2b)-b^2=2 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-2b=7 \\ b^2=12 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-2b=-2 \\ 4-b^2=2 \end{cases}$

$\begin{cases} b=\pm 2\sqrt{3} \\ a^2=7+2b \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-2b=-2 \\ b^2=-2 \text{ корней нет} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=2\sqrt{3} \\ a^2=7+2b \end{cases} \\ \begin{cases} b=2\sqrt{3} \\ a^2=7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-2\sqrt{3} \\ a^2=7-4\sqrt{3}=\sqrt{49}-\sqrt{48}>0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=2\sqrt{3} \\ a=\pm(2+\sqrt{3}) \end{cases} \\ \begin{cases} b=-2\sqrt{3} \\ a=\pm(2-\sqrt{3}) \end{cases} \end{array}\right.$

211006728 (U175248 M1275169)

(4) Чистовик

1 (Продолжение)

$$\begin{cases} x+y=2+\sqrt{3} \\ xy=2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (2;\sqrt{3});(\sqrt{3};2)$$

$$\begin{cases} x+y=-(2+\sqrt{3}) \\ xy=2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (-2;-\sqrt{3});(-\sqrt{3};-2)$$

$$\begin{cases} x+y=2-\sqrt{3} \\ xy=-2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (2;-\sqrt{3});(-\sqrt{3};2)$$

$$\begin{cases} x+y=-(2-\sqrt{3}) \\ xy=-2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (-2;\sqrt{3});(+\sqrt{3};-2)$$

Ответ: $(2;\sqrt{3});(\sqrt{3};2);(-2;-\sqrt{3});(-\sqrt{3};-2);(2;-\sqrt{3});(-\sqrt{3};2);$
$(-2;\sqrt{3});(\sqrt{3};-2)$.

(5) Чистовик

2. Всего у фокусника 256 карточек.

Дублей всего 16 – (1;1); (2;2); (3;3)... (16;16).

То есть, если вытащить дубль (a;a), то на второй карточке числа a не должно быть.

Найдём сколько всего карточек содержит число a

кр си   кр си ... кр си

a 1   a 2   a 16 – всего 16 карточек содержат число a (там же находится наш дубль (a;a))

кр си   кр си ... кр си

1 a   2 a   16 a – так же 16 карточек, без дубля получится 15.

Итого: всего карточек с числами a у нас $15+16=31$.

Получается карточек без a $256-31=225$

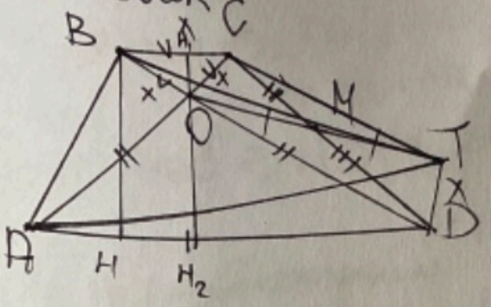
Значит способов $16 \cdot 225 = (4 \cdot 15)^2 = 60^2 = 3600$

Ответ: 3600 способов.

211006728 (U175248 M1275169)

Чистовик

6.



Дано: ABCD - чет-ик

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$-прав.

M: OM=MD

T: точка симметрична O относительно M

Док-ать: а) $\triangle ABT$ - прав.

б) BC=3, AD=5

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

Решение:

а) $\angle OBC = \angle ODA = 60^\circ$

$\angle OBC$ и $\angle OBA$ ВНЛУ при BC и AD и BD-сек. $\Big| \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ABCD - трап.

AC=AO+OC

BD=OD+OB

OB=OC (по усл.)

AO=OD (по усл.)

$\Big| \Rightarrow AC=BD \Rightarrow ABCD$ - р/б трап.

OM=MT т.к. O и T - симметричны по усл.

Доп. CT и DT

OCTD - пар-м, т.к. CD и OT в точке пересечения делятся $\Rightarrow$ пополам

$\Rightarrow \angle ODC = \angle DCT$ (как ВНЛУ при BC∥TD OT-сек.)

$\angle OCD = \angle CDT$ (как ВНЛУ при OD∥CT CD-сек.)

$\angle BCO = 60^\circ$ (по усл.) и $\angle ODA = 60^\circ$ (по усл.)

$\angle ADT = 60^\circ + \angle ODC + \angle CDT$

$\angle BCT = 60^\circ + \angle DCT + \angle OCD$ $\Big| \Rightarrow \angle ADT = \angle BCB$

Пусть OB=OC=BC=x $\Rightarrow$ DT=x (по св-ву пар-ма)

Пусть AD=AO=OD=y $\Rightarrow$ CT=y (по св-ву пар-ма)

$\triangle BCT = \triangle ADT$: $\angle BCT = \angle ADT$ (по док.)

BC=DT=x

AD=CT=y

$\Big| \Rightarrow \triangle BCT = \triangle ADT$ (по 2 сторонам и $\angle$ м/у ними) $\Rightarrow BT=AT$

211006728 (U175248 M1275169)

6. (Продолжение) Чистовик

$OCTD$ - пар-м $\Rightarrow \angle COD + \angle ODT = 180^\circ$ (по сумме $\angle$ прилеж. к одной стороне)

$\angle COD = 180 - \angle AOD = 120^\circ$ (смежные) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ODT = 60^\circ \Rightarrow \angle ADT = 120^\circ \Rightarrow \triangle ADT = \triangle AOB$: $BO = DT = x$, $AO = AD = y$, $\angle O = \angle D = 120^\circ$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABT$ - равносторонний

б) $BC = 3$, $AD = 5 \Rightarrow BD = 8$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot \sin 60 = \frac{32\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$

Д.п. $BH \perp AD$; $H_1H_2 \perp AD \Rightarrow \triangle AHB$ - прямоугол.

$BH = OH_1 + OH_2$

$OH_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $OH_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (как высоты равност. $\triangle$) $\Rightarrow BH = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$AB^2 = BH^2 + AH^2$ (по т. Пифагора)

$AH = 5 - 3 = 2$

$AB^2 = 16 \cdot 3 + 4 = 52 \Rightarrow AB = 2\sqrt{13}$

$S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{2} = \frac{52\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = 13\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{13\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} = \frac{13}{16}$

Ответ: б) $\frac{13}{16}$

211006728 (U175248 M1275169)

h

Черновик

б) $BC=3,\ AD=5 \Rightarrow BD=8$

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 8^2\cdot \sin 60=\frac{32\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$

Д.п. $BH\perp AD \Rightarrow \triangle AHB$ - прямоугол. $BH=OH_1+OH_2$

$OH_1=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ $OH_2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (как высоты прав $\triangle$)

$BH=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

$AB^2=BH^2+AH^2$, $AH=5-3=2$

$AB^2=16\cdot 3+4=52$

$AB=2\sqrt{13}$

$S_{ABT}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{2}=\frac{52\sqrt{3}}{4}=13\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{13\sqrt{3}}{16\sqrt{3}}=\frac{13}{16}$

211006728 (U175248 M1275169)

Черновик

~~Пусть $(xy)^2=a$, $x+y=b$~~

$\cancel{\frac{2b^2-8a}{a}}$

$x^2+y^2=a^2+$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-(xy)^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}(xy)^2=19 \end{cases}$$

Пусть $xy=a$
$x+y=b$

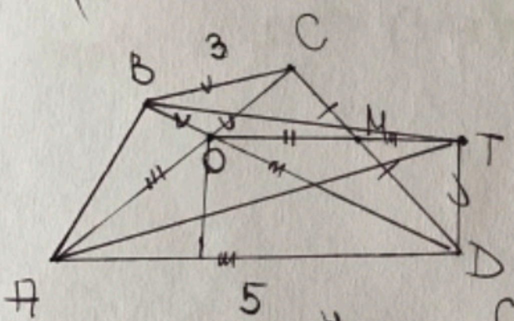
$x^2+y^2=b^2-2a$

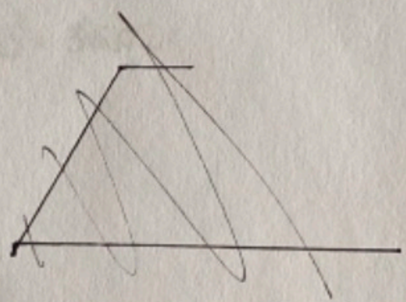
$(x^2+y^2)^2=(b^2-2a)^2$

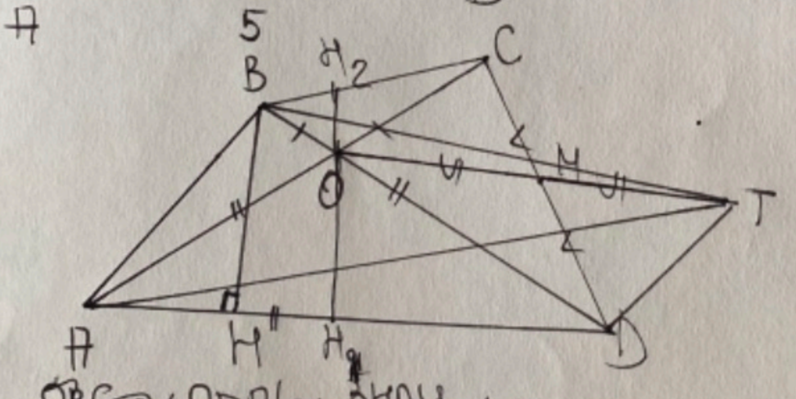
$x^4+y^4+2(xy)^2=(a^2-2b)^2$

$x^4+y^4=(a^2-2b)^2-2b^2$

2(







~~$\angle OBC=\angle ODA$ (как ВНЛУ при~~

$\angle OBC=\angle ODA=60^\circ$ (по усл.)

$\angle OBC$ и $\angle ODA$ – ВНЛУ при BC и AD BD-сек. $\Rightarrow$ BC∥AD $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ABCD – трап.

OM=MT (по усл.) т.к. O и T – симметр.

3. AC=BD $\Rightarrow$ ABCD – р/б

21006728 (U175248 M1275169)

Черновик

Всего 256 карточек

Дублей всего 16 $(1;1);(2;2);(3;3)\dots(16;16)$

То есть, если вытащить дубль $(a;a)$, то на второй карточке числа быть не должно.

Найдем, сколько карточек содержит любое число a

кр	сн	кр	сн		кр	сн	
a	1	a	2	~	a	16	– 16 карточек среди которых нам дубль $(a;a)$

кр	сн	кр	сн	…	кр	сн	
1	a	2	a		16	a	– тоже 16 карточек, а если убрать дубль, то 15

Итого: всего карточек с числом $a = 15+16 = 31$

Получается карточек без a – 225

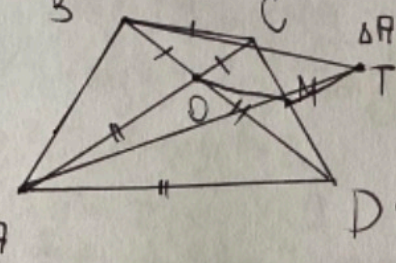
Итого $16\cdot 225 = (4\cdot 15)^2 = 60^2 = 3600$

211006728 (U175248 M1275169)

Черновик

~~4. $\begin{cases} 2x^2+2y^2-(xy)^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}(xy)^2=19 \end{cases}$~~

6.



$\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – правильные

T симметрична ~~относит~~ точке O относительно середины CD

Док-ть: а) $\triangle ABT$ – прав.

б) $BC=3$, $AD=5$

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

Решение:

а)

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-(xy)^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}(xy)^2=19 \end{cases}$$

$(xy)^2=2-2x^2-2y^2 \,|:2$

$\frac{1}{2}(xy)^2=1-x^2-y^2$

$x^4+y^4-1+x^2+y^2=19$

$x^4+y^4+x^2+y^2=20$

$$+\begin{cases} x^4+y^4+x^2+y^2=20 \\ x^4-y^4-x^2-y^2=18 \end{cases}$$

$2x^4=38$

$x^4=19$

$$-\begin{cases} 2x^2+2y^2-(xy)^2=2 \\ 2x^4-2y^4-(xy)^2=38 \end{cases}$$

$2x^4-2y^4-2x^2-2y^2=36$

$x^4-y^4-x^2-y^2=18$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-(xy)^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}(xy)^2=19 \,|\cdot 2 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 2x^2+2y^2-(xy)^2=2 \\ 2x^4+2y^4-(xy)^2=38 \end{cases}$$

$2x^4-\cancel{2x^2+2y^4}-2y^2=36$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \,|:2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{1}{2}x^2y^2=1 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2y^2=x^2+y^2-1 \\ x^4+y^4-x^2-y^2+1=19 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}x^2y^2=x^2+y^2-1$

$x^4+y^4-x^2-y^2=18$

Черновик

8x

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}(xy)^2=19 \end{cases}$$

$$x^4+y^4-2x^2-2y^2+\frac{1}{2}(xy)^2=17$$

$$x^2+xy+y^2=$$

$$x^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{16}y^2$$

$$2x^2+$$

$$\left(x+\frac{1}{4}y^2\right)^2+\frac{15}{16}y^2=19$$

$$\left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(x+\frac{1}{2}y\right)+\frac{15}{16}y^2=19 \quad 1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-(xy)^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}(xy)^2=19 \end{cases}$$

$$\cancel{2x^2+x^4+2y^2+y^4-\frac{3}{2}(xy)^2=21} \;|:x$$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-(xy)^2=2 & |:(xy)^2 \\ x^4+y^4-\frac{(xy)^2}{2}=19 & |:\frac{(xy)^2}{2} \end{cases}
\quad
\begin{cases} 2\frac{x}{y}+2\frac{y}{x}-xy=\frac{2}{xy} \\ \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{xy}{2}=\frac{19}{(xy)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2+2y^2}{xy}-xy=\frac{2}{xy} \\ \frac{x^4+y^4}{(xy)^2}-\frac{1}{2}=\frac{19}{(xy)^2} \end{cases}
\quad
\begin{cases} \frac{2}{y^2}+\frac{2}{x^2}-1=\frac{2}{(xy)^2} \\ \frac{2}{y^4}+\frac{2}{x^4}- \\ \frac{2x^2}{y^2}+\frac{2y^2}{x^2}-1=\frac{38}{(xy)^2} \end{cases}
\quad
\begin{cases} \frac{2x^2+2y^2}{(xy)^2}-1=\frac{2}{(xy)^2} \\ \frac{2x^4+2y^4}{(xy)^2}-1=\frac{38}{(xy)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{y^2}+\frac{2}{x^2}-1=\frac{2}{(xy)^2} \\ \frac{2}{y^4}+\frac{2}{x^4}-\frac{1}{(xy)^2}=\frac{19}{(xy)^4} \end{cases}
\quad
\begin{cases} \frac{2x^2+2y^2}{(xy)^2}-1=\frac{2}{(xy)^2} \\ \frac{2x^4+2y^4}{(xy)^4}-\frac{1}{(xy)^2}=\frac{19}{(xy)^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2(x^2+y^2)}{(xy)^2}-\frac{2}{(xy)^2}-1=0 \\ \frac{2(x^4+y^4)}{(xy)^4}-\frac{1}{(xy)^2}=\frac{19}{(xy)^4} \end{cases}
\quad
\begin{cases} \frac{2(x+y)^2-4xy}{(xy)^2}-\frac{2}{(xy)^2}-1=0 \\ \frac{2((x^2+y^2)^2-2(xy)^2)}{(xy)^4}-\frac{1}{(xy)^2}-4=\frac{19}{(xy)^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2(x+y)^2-4xy}{(xy)^2}-\frac{2}{(xy)^2}-1=0 \\ \frac{2((x+y)^2-2xy)-2(xy)^2)}{(xy)^4}-\frac{1}{(xy)^2}=\frac{19}{(xy)^4} \end{cases}$$

211006728 (U175248 M1275169)

Черновик

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-(xy)^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}(xy)^2=19 \end{cases}$$

Пусть $x+y=a$

$xy=b$

$x^2+y^2=a^2-2b$

$(x^2+y^2)^2=(a^2-2b)^2$

$x^4+y^4+2(xy)^2=(a^2-2b)^2$

$x^4+y^4=(a^2-2b)^2-2b$

$$\begin{cases} 2(a^2-2b)-b^2=2 \; |:2 \\ (a^2-2b)^2-2b-\frac{1}{2}b^2=19 \end{cases} \quad \begin{cases} (a^2-2b)-\frac{b^2}{2}=1 \\ (a^2-2b)^2-2b^2-\frac{b^2}{2}=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^2-2b)-\frac{b^2}{2}=1 \; |\cdot -5 \\ (a^2-2b)^2-\frac{5b^2}{2}=19 \end{cases} \quad + \begin{cases} -5(a^2-2b)+\frac{5b^2}{2}=-5 \\ (a^2-2b)^2-\frac{5b^2}{2}=19 \end{cases}$$

$(a^2-2b)^2-5(a^2-2b)-14=0$

по т. Виета

$a^2-2b=7$ или $a^2-2b=-2$

$$\begin{cases} a^2-2b=7 \\ 2(a^2-2b)-b^2=2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2-2b=-2 \\ 2(a^2-2b)-b^2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-2b=7 \\ b^2=12 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-2b=-2 \\ 4-b^2=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-2b=-2 \\ b^2=-2 \end{cases}$$ корней нет

$$\begin{cases} b=\pm 2\sqrt{3} \\ a^2=7\pm 2b \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=2\sqrt{3} \\ a^2=7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-2\sqrt{3} \\ a^2=7-4\sqrt{3}=\sqrt{49}-\sqrt{48}>0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=2\sqrt{3} \\ a=\pm(2+\sqrt{3}) \end{cases} \\ \begin{cases} b=-2\sqrt{3} \\ a=\pm(2-\sqrt{3}) \end{cases} \end{array}\right.$$

Дальше обратная замена

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2+\sqrt{3} \\ xy=2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-(2+\sqrt{3}) \\ xy=2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-(2-\sqrt{3}) \\ xy=-2\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=2-\sqrt{3} \\ xy=-2\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

1. $x=2$, $y=\sqrt{3}$; $x=\sqrt{3}$, $y=2$
2. $x=-2$, $y=-\sqrt{3}$; $x=-\sqrt{3}$, $y=-2$
3. $x=-2$, $y=+\sqrt{3}$; $x=-\sqrt{3}$, $y=2$

$-2+\sqrt{3}$

211006728 (U175248 M1275169)