Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

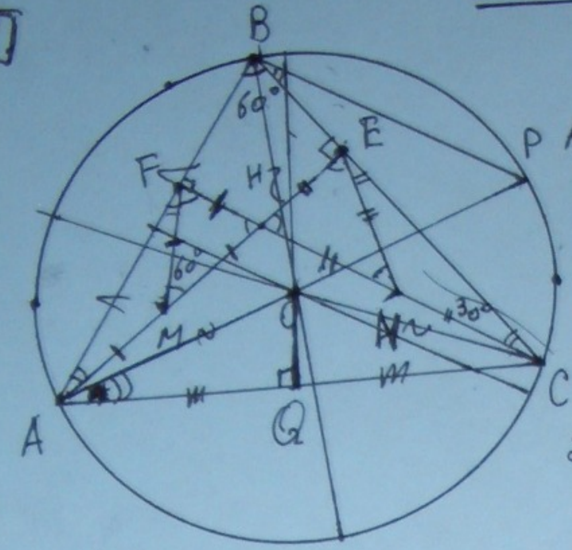
Шифр: **211006727**

ID профиля: **344280**

Вариант 16

Чистовик

1)



Дано: AE, CF – выс., $FM = 1$, $EN = 4$, $FM \parallel EN$, $AM = MH$, $CN = NH$.

Найти: $\angle ABC$, S_{ABC}, $R_0 = OA$.

Решение:

1. FM – мед. пр. $\Delta \Rightarrow FM = \frac{1}{2}AH = AM = MH$

EN – мед. пр. $\Delta \Rightarrow EN = \frac{1}{2}CH = CN = NH$

2. $\angle MFH = \angle FHM$ – р/б Δ

$\angle NEH = \angle NHE$ – р/б Δ

$\angle FHM = \angle EHN$ – верт.

$\left.\begin{array}{l}\angle FMH = \angle HEN \\ \angle ENH = \angle HFM\end{array}\right\} FM \parallel EN$

$\Rightarrow \Delta FHM, \Delta ENH$ – р/ст. Все углы по $60°$

3. $\angle FHE = 180° - \angle FHM = 120°$

4. $\angle ABC + \angle FHE = 180°$ ($\square FBEH$ – впис., т.к. $\angle BFH = \angle BEH = 90°$)

$\angle ABC = 180° - \angle FHE = \underline{60°}$

5. $CF = CH + HF = CN \cdot 2 + HF = CN \cdot 2 + FM = EN \cdot 2 + FM = 9$

$AE = AH + HE = 2 \cdot FM + EN = 6$

~~6. $AB = AE \cdot \sin ABC = 6 \cdot \sin 60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ – пр. ABE прямоуг.~~

~~7. $S_{ABC} = \frac{CF \cdot AB}{2} = \frac{9 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 13,5\sqrt{3}$~~

6. $AB = \frac{AE}{\sin \angle ABC} = \frac{6}{\sin 60°} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ – ΔABE – прямоуг.

7. $S_{ABC} = \frac{CF \cdot AB}{2} = \frac{9 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = \underline{18\sqrt{3}}$

~~8. т. O – т. пересеч. биссектрис.~~

~~9.~~ [illegible]

10.

8. $\left.\begin{array}{l} BF = \frac{BC}{2} = 3\sqrt{3} \\ AF = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3} \\ BE = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{3} \\ CE = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \angle ACF = \frac{AF}{CF} = \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{9\sqrt{3}}$

$\frac{\sin \angle ACF}{\cos \angle ACF} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$\cos ACF = 3\sqrt{3} \sin ACF$

$\sin^2 ACF + \cos^2 ACF = \sin^2 ACF + 27 \sin^2 ACF = 1$

$\sin^2 ACF = \frac{1}{4 \cdot 7}$

$\sin ACF = \frac{1}{2\sqrt{7}}$

$\frac{AF}{AC} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{AC} \Rightarrow AC =$ [illegible] $\sqrt{7}$

Чистовик

9. $\angle CAP \overset{\text{впис. ∠, оп. на 1 дугу}}{=} \angle CBP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow OQ = \frac{1}{2} AO = x$ – OQ – ср. пер. (центр оп. окр. Δ нах. на пересеч. ср. пер.)

$\angle OAQ = 30^\circ$ в прямоуг. Δ

10. $x^2 + \left(\frac{2\sqrt{21}}{2}\right)^2 = 4x^2$ – т. Пифагора

$21 = 3x^2$

$x^2 = 7$

$x = \sqrt{7}$

$AO = 2\sqrt{7} = R$

Ответ: 60°; $18\sqrt{3}$; $2\sqrt{7}$

211006727 (U344280 M1276536)

Чистовик.

[2] Пусть минимальное число равно a; макс. равно z.

Сумма оставшихся чисел равна S

По условию: $\left.\begin{matrix} S+35a+z=592 \\ S+a+16z=592 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 35a+z=a+16z \\ 34a=15z \end{matrix}$

Числа натуральные, 34 и 15 — взаимнопростые ($НОД(34,15)=1$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow z \underset{34}{\equiv} 0$

$a \underset{15}{\equiv} 0$

Пусть $z=34$. Тогда $S+a+16z=S+a+544=592$. При $z=68$ и более:

$S+a+16z=S+a+68\cdot16+(z-68)\cdot16=$

$=S+a+1088+16(z-68)>592.$

Значит $z=34 \Rightarrow a=\frac{15z}{34}=15$. Тогда:

$S+15\cdot35+34=S+525+34=S+559=592$

$S=33.$

Все числа различны $\Rightarrow$ ост. числа лежат в диапазоне $(15;34)$. Пусть b (одно из чисел) равно 16. Тогда c (другое число) $=33-16=17$. При $b=17 \Rightarrow c=16$.

Если $b>17$ $c\leq15$ — такое невозм., т.к. a — мин.

Если $b=33$, то c не натуральное.

Итого получаем 2 варианта: $(15,16,17,34)$ и $(15,33,34)$

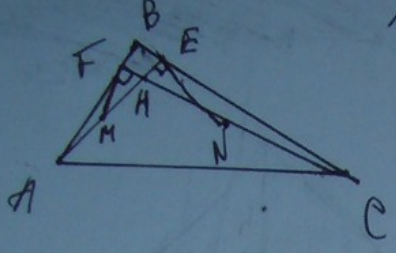
Ответ: 15, 16, 17, 34;
15, 33, 34.

③

211006727 (U344280 M1276536)

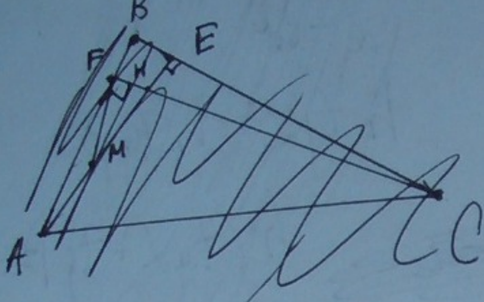
Черновик

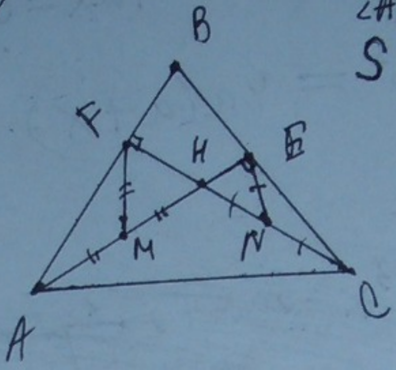
[redacted]



$AH = 2$

$HC = 8$





$\angle ABC = ?$

S

$34a = 15z$

$14 \cdot 2a = 3 \cdot 5z$

$a \underset{15}{\equiv} 0$

$z \underset{34}{\equiv} 0$

$a = \frac{15}{34} z$

$z = 34$

$34 \cdot 16 = \underline{544}$

$$\begin{array}{r} \times\ 34 \\ 16 \\ \hline 204 \\ +\ 34\ \ \\ \hline 544 \end{array}$$

$592 - 544 = 88$

$$\begin{array}{r} 592 \\ -\ 44 \\ \hline 88 \end{array}$$

$a = 15$ 30

$S_0 = S + a + z$

$15 \cdot 35 = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{525}$

$S + 35a + z = 592$

$30 \cdot 35 = 1050$

$S + 525 + 34 = 592$

$S + 559 = 592$

$592 - 559 = 33$

15, 16, 17, 34

15, 33, 34

$35 \cdot 15 = 34 \cdot 15 + 15 = 34 \cdot 16 + 15 - 34 = 34 \cdot 16 - 19$

$S = 33$

$33 - 16 = 17$

$90-\alpha-\beta$ черновик $\alpha+\beta$

$$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+y^2+y^2=0$$

$$(x-y)^2+(3a+y)^2-4a^2-4ax=0$$

$$(x-y)^2+(y+3a)^2=4a(a+x)$$

$$\cancel{a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0}$$

$$\cancel{x^2+y^2-4ax-\frac{2}{a}x+2y+4a^2+\frac{1}{a^2}=0}$$

$\alpha=60^\circ$

$h\,tg\,\alpha+h\,tg\,\beta$

$h(tg\,\alpha+tg\,\beta)$

$$x^2+\left(\frac{\sqrt{51}}{2}\right)^2=4x^2$$

$\parallel -30^\circ$

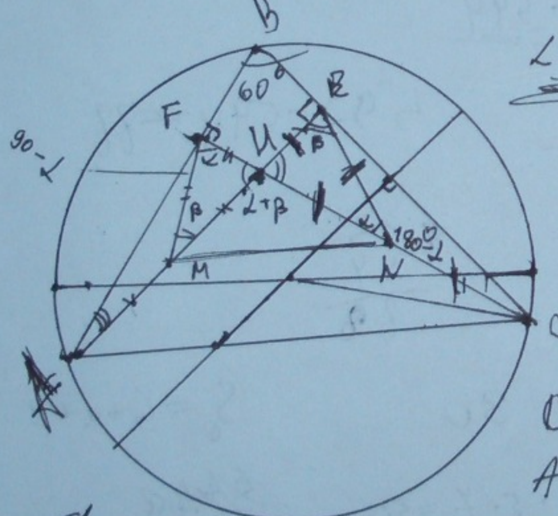
$BF=\frac{BC}{2}=3\sqrt{3}$

$AF=4\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$BE=\frac{AB}{2}=2\sqrt{3}$

$\angle=\beta=60^\circ$

$CE=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$



$AH=2\,FM=2$

$CH=2EH=8$

$CF=FM+2EH=9$

$AE=2FM+EH=6$

$tg\,ACF=\frac{1}{4}$

$5x^2=\frac{51}{4}$

$x^2=\frac{51}{12}=\frac{17}{4}$

$x=\frac{\sqrt{17}}{2}$

$$AB=AE\sin 60^\circ=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

$$S=\frac{CF\cdot AB}{2}=\frac{9\cdot 3\sqrt{3}}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{2}$$

$BC=$ $BC\cdot AE=CF\cdot AB$

$36\sqrt{3}=6\,BC$ $\qquad BC=6\sqrt{3}$

-Черновик

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$4\sin\alpha = \cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha + 16\sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{17}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{AC} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$AC = \sqrt{51}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006727**

ID профиля: **344280**

Вариант 16

$y^8+y^4+4y^2-8=0$

$\ldots-4y^2+4=(y^2-2)^2$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \quad | : x^2y^2$

$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{1}{2}=\frac{19}{x^2y^2}$

$x^4-x^2+y^4-y^2=18 \quad | : x^2y^2$

$x^2(x^2-1)+y^2(y^2-1)=18$

$\frac{x^2-1}{y^2}+\frac{y^2-1}{x^2}=\cancel{\frac{18}{x^2y^2}}$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases} \quad | \times 2$$

$x^2+y^2=1+\frac{1}{2}x^2y^2$

$x^4+y^4+2x^2y^2-2,5x^2y^2=19$

$(x^2+y^2)^2-2,5x^2y^2=19$

$(1+\frac{1}{2}x^2y^2)^2-2,5x^2y^2=19$

$t=x^2y^2$

$(1+\frac{t}{2})^2-2,5t=19$

$1+t+\frac{t^2}{4}-2,5t=19$

$\frac{t^2}{4}-1,5t=18$

$\frac{t^2}{4}-1,5t-18=0$

$\frac{t^2-6t}{4}=18$

$t^2-6t=72$

$t^2-6t-72=0$

$D=36+4\cdot 72=36+288=324=18^2$

$t=\frac{6\pm 18}{2}=3\pm 9$

$$2x^2+2y^2-x^2y^2=2$$

$$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19$$

$$x^4+y^4-y^2-x^2=\cancel{20}\ 18$$

$$\cancel{x^2(x^2-1)+y^2(y^2-1)=18}$$

11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{1}{2}x^2y^2=1 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$x^4-x^2+y^4-y^2=18$$

$$x^2(x^2-1)+y^2(y^2-1)=18$$

$16^2=256$

16 дробей

Для каждого вычисл. y:

$255-15-15=\underline{225}$

$225\cdot16-15\cdot8=3600-120=$

$=16\cdot217+8$

1 – 1

1 – 16

2 – 1

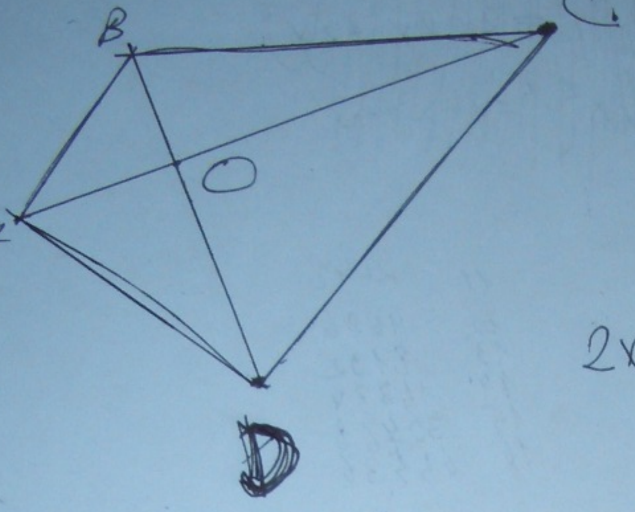
2 – 11

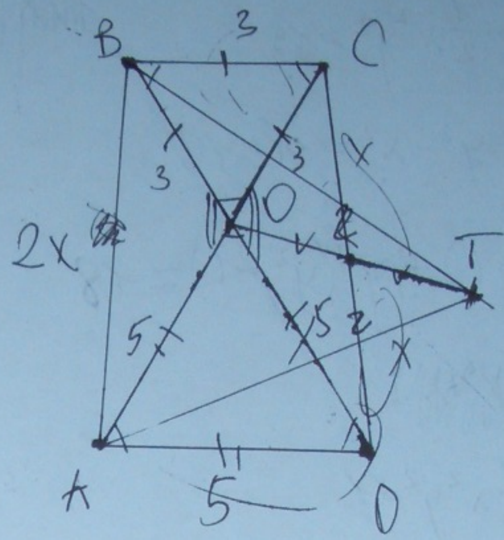
16 – 1

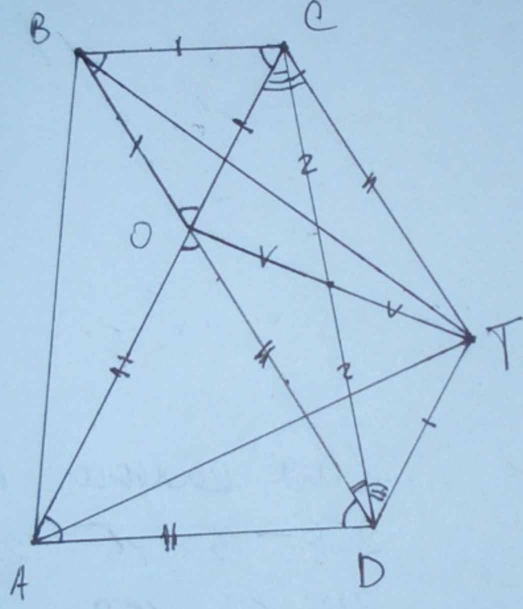
16 – 16

$225\cdot16=225\cdot4\cdot4=900\cdot4=3600$

1

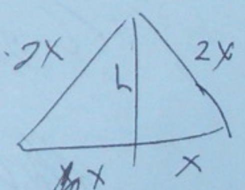






$4 \cdot 72 = 280 + 8 = 288$

$$\begin{array}{r} 288 \\ +\ 36 \\ \hline 324 \end{array}$$



$\sqrt{3}\,\frac{\text{ст.}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ст.

$x^2 + h^2 = 4x^2$

$h^2 = 3x^2$

$h = \sqrt{3}\,x$

$18^2 =$

$S = \frac{2x \cdot h}{2} = \sqrt{3}\,x^2$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 18 \\ \hline 144 \\ +\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$16 \cdot 3 = 30 + 18 = 48$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}x^2y^2=1$$

$$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19$$

$$\cancel{x^4-x^2+y^4-y^2=18=9(2x^2+2y^2-x^2y^2)=18x^2+18y^2-9x^2y^2}$$

$$\cancel{x^4+y^4-19x^2-19y^2+9x^2y^2=0}$$

$$\cancel{x^4+y^4-16x^2-16y^2+(3y^2-9x^2y^2+3x^2)=0}$$

$$2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \quad \Big| \times \frac{x^2}{y^2}$$

При $y=0$: $\cancel{x}=\pm 1 \qquad x=\sqrt[4]{19}$

$\pm 1 \neq \sqrt[4]{19}$ $\Big\} \Rightarrow y\neq 0$, $x\neq 0$ - Аналог.

$$2x^4+2x^2-x^4=2\frac{x^2}{y^2}$$

$$x^4+2x^2=2\frac{x^2}{y^2}$$

$$x^2+2=2\frac{1}{y^2}$$

$$x^2+2=\frac{2}{y^2}$$

$$\frac{4(1-y^2)^2}{y^4}+y^4-(1-y^2)=19$$

$$\frac{4(1-y^2)^2}{y^4}+2y^4-1=19$$

$$\frac{4(1-2y^2+y^4)}{y^4}+2y^4=\cancel{20}\ 10$$

$$x^2=\frac{2}{y^2}-2=\frac{2-2y^2}{y^2}=\frac{2(1-y^2)}{y^2}$$

$$\frac{2-4y^2}{y^4}+1+y^4=10$$

$$2-4y^2+y^4+y^8=10$$

Чистовик

4. $2x^2+2y^2-x^2y^2=2$

При $y=0$: $x^2=1$ $x^4=19$ – невозм.
Аналогично при $x=0 \Rightarrow x\neq 0,$ $y\neq 0$

$x^2+y^2-\frac{1}{2}x^2y^2=1$

$x^2+y^2=\frac{1}{2}x^2y^2+1$

$x^4+y^4+2x^2y^2-2{,}5x^2y^2=19$

$(x^2+y^2)^2-2{,}5x^2y^2=19$

$(1+0{,}5x^2y^2)^2-2{,}5x^2y^2=19$

$t=x^2y^2$

$(1+0{,}5t)^2-2{,}5t=19$

$1+t+\frac{t^2}{4}-2{,}5t=19$

$\frac{t^2-6t}{4}=18$

$t^2-6t-72=0$

$D=36+4\cdot 72=324=18^2$

$t=\frac{6\pm 18}{2}=3\pm 9$

$x^2y^2=\cancel{-6}$ или $x^2y^2=12$

$x^2\geq 0$ $y^2\geq 0 \Rightarrow x^2y^2\neq -6$

$x^2=\frac{12}{y^2}$

$\frac{12}{y^2}+y^2-\frac{1}{2}\cdot 12=1$

$\frac{12}{y^2}+y^2-6=1$

$\frac{12}{y^2}+y^2-7=0 \quad |\times y^2$

$y^4-7y^2+12=0$

$D=49-4\cdot 12=1$

$y^2=\frac{7\pm 1}{2}=3;4$

$y=\pm\sqrt{3};\pm 2$

$x^2=4$ $x^2=3$

$x=\pm 2;$ $x=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(2;\sqrt{3}),(-2;-\sqrt{3}),(\sqrt{3};2),(-\sqrt{3};-2)$

1

Чистовик

5. Всего 16 дублей. Рассмотрим случай, когда уже вытянут 1 д.: Остается 255 карт (255 случаев). Из них 15 с первой цифрой как у д., и 15 со второй. Остаётся 225 случаев, когда вытянутые карты не имеют повт. цифр.

Всего таких случаев $225 \cdot 16 = 3600$. Случаев с двумя дублями $15 \cdot 16$. Если убрать повт. ((1-1)-(2-2) и (2-2)-(1-1)), останется ровно в 2 раза меньше – $15 \cdot 8$.

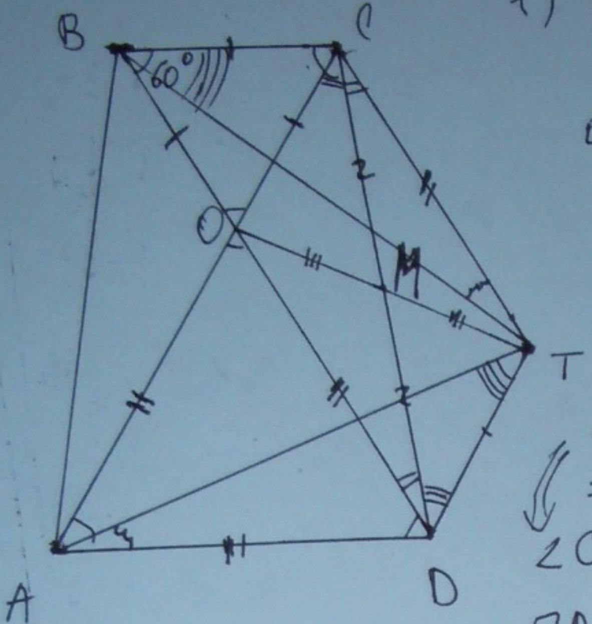
Итого имеем $(255-15-15) \cdot 16 - \frac{15 \cdot 16}{2} = 225 \cdot 16 - 15 \cdot 8 = 3600 - 120 = 3480$ случаев (способов) вытянуть 2 карты с такими условиями.

2

211006727 (U344280 M1276537)

Чистовик

6.



1) $\triangle BOC$, $\triangle AOD$ – правильные (р/ст) $\Rightarrow BC \parallel AD$; $\triangle ABCD$ – трапеция (р/б)

$OM = MT$

$\square OCTD$ – паралл-м, т.к. диаг. делят друг друга пополам. $\Rightarrow CT = OD$;

$TD = OC$;

$\angle TCD = \angle ODC \Big\} CT \parallel OD$

$\angle OCD = \angle TDC \Big\} CO \parallel TD$

$\triangle ADT = \triangle BCT$ по 2 ст. и $\angle$ между ними $\Rightarrow$

$\Rightarrow BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – р/б

$\angle CBT = \angle ATD$; $\angle CTB = \angle TAD$

$\square BCTD$ – р/б трапеция ($CT \parallel BD$, $BC = TD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCT = \angle CTD \Rightarrow \triangle BCT = \triangle DCT \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = BT \Rightarrow AB = BT = TA \Rightarrow \triangle ABT$ – р/ст ч.т.д. (правильный)

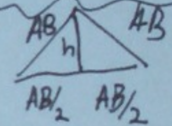
2) $BC = 3$

$AD = 5$

$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2$

$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h =$

$= 4h$

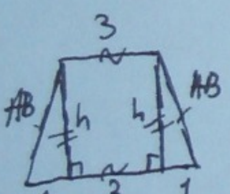


$\frac{AB^2}{4} + h^2 = AB^2$

$h^2 = \frac{3AB^2}{4}$

$h = \sqrt{3}\frac{AB}{2}$

$S = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{AB \cdot \sqrt{3}\frac{AB}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$



$1^2 + h^2 = AB^2$

$h^2 = (AB-1)(AB+1)$

$h = \sqrt{AB^2 - 1}$

$AB = \sqrt{h^2+1}$

$h = h_{BOC} + h_{AOD} = \frac{\sqrt{3}}{2}(BC + AD) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 4\sqrt{3}$

~~$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{3}AB^2}{4 \cdot 4 \cdot \sqrt{AB^2-1}} = \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{AB^2}{\sqrt{AB^2-1}}$~~

$1 + 16 \cdot 3 = AB^2$

$AB^2 = 49$

$AB = 7$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 7^2}{4 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{49}{64} = \frac{7^2}{8^2}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49}{64}$

3